L'énigme du type 14

Michel Lafond(*)

Cet article est déjà paru dans la revue Feuille de Vigne nº 123 du mois de décembre 2013 publiée par l'Irem de Dijon.

Résumé : *Étude d'un pavage pentagonal, permettant en examinant tous les indices présents sur une figure, à la manière d'une enquête policière, de lever toutes les incertitudes sur le pavé de base.*
Les calculs (trigonométrie, calculs vectoriels) sont assez simples pour être effectués dans les classes.

1. Les pavages pentagonaux

Le type 14 signifie ici la dernière classe connue de pentagones convexes pouvant paver le plan.

En effet, si on sait depuis longtemps que tout triangle et tout quadrilatère (même non convexe) peut paver le plan, chez les pentagones la propriété est plutôt rare et le problème ardu.

La preuve, on ne connait aujourd'hui que 14 types de pentagones convexes qui ont été trouvés laborieusement : cinq en 1918, trois en 1968, un en 1975, quatre entre 1975 et 1984 et un récemment en 1985, le quatorzième, qui fait l'objet de cet article.

Contrairement à ce qui s'est passé plusieurs fois dans le passé, personne aujourd'hui ne se hasarde à dire que la liste des 14 types connus est complète. Les 14 pavages sont visibles en annexe.

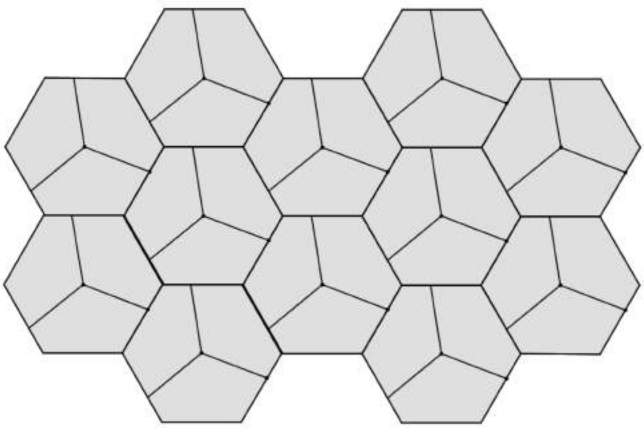


figure 1 : un pavage du type 3

(*) mlafond001@yahoo.fr

Il est à noter que dans ce cas, le pavage du plan est obtenu par déplacements.

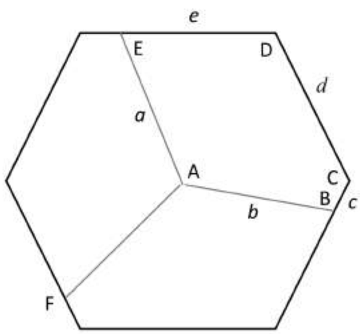


figure 2

2. Le pavage pentagonal du type 3

Un type de pavage pentagonal dépend en général d'un paramètre comme on le voit avec le cas du type 3 (figure 1).
C'est l'un des types les plus simples, on part d'un hexagone régulier (figure 2), et du centre A, on trace trois rayons [AB], [AE], [AF] faisant entre eux des angles de 120°. On obtient trois pentagones égaux, et le pavé ainsi obtenu peut être défini (à une similitude près) par les seules conditions suivantes :

- Les angles A, C et D doivent mesurer 120° (C et D sont sommets de l'hexagone).
- Les longueurs a et b doivent être égales.
- d doit être égal à la somme $c + e$ des longueurs des deux petits côtés (pour assurer le contact dans le pavage).

C'est la raison pour laquelle ce type 3 est résumé traditionnellement par :

$$\text{Type 3 : } A = C = D = 120°,\ a = b,\ d = c + e$$

avec les notations fixées une fois pour toutes des angles A, B, C, D, E et des côtés a, b, c, d, e qu'on retrouvera dans toute la suite.

Ce type de pavage dépend d'un paramètre car le seul choix qu'on a est celui du premier rayon (par exemple [AB]) dans l'hexagone. Après quoi l'angle E est défini, donc l'angle B aussi et le pavé est parfaitement déterminé.

Sur les 14 types, un seul ne dépend d'aucun paramètre, c'est-à-dire que le pavé correspondant est unique. C'est le dernier découvert, il s'agit du 14ème de la liste d'où son « appellation » : pavage pentagonal du type 14. Le voici (figure 3) :

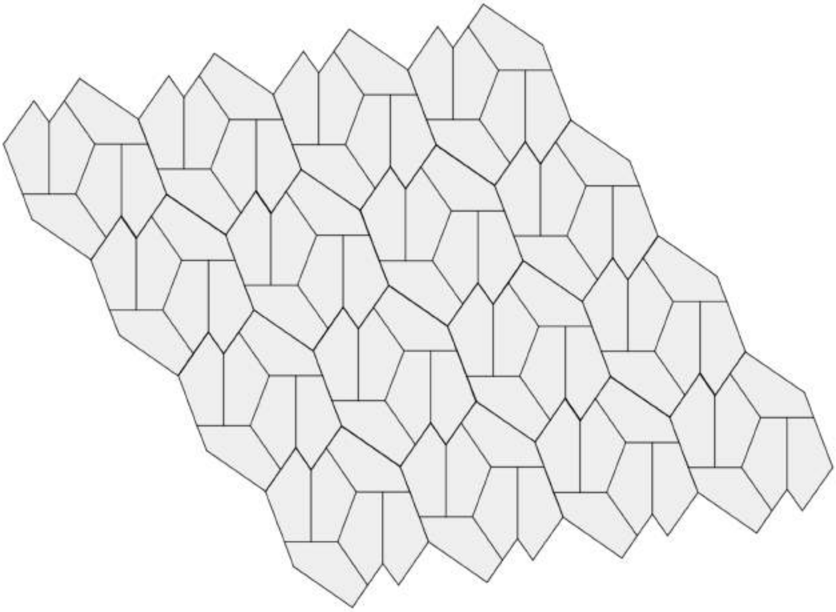


figure 3 : le pavage du type 14

Ce pavage, contrairement au pavage du type 3 précédent, est obtenu par déplacements et retournements du pavé de base.

Comme on va le voir, la seule connaissance de cette figure permet le calcul de toutes les caractéristiques (côtés et angles) du pavé, à l'échelle près évidemment. Voici ce pavé qu'on notera (P) :

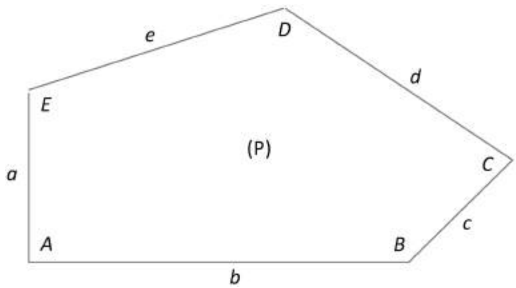


figure 4

On prendra comme unité $a = 1$.
Il s'agit maintenant de calculer tout le reste en commençant l'enquête :

3. Étude du pavage pentagonal du type 14

Un coup d'œil sur la figure 3 montre qu'un groupement judicieux de 6 pavés (P) forme un nouveau pavé (en traits gras) qui par simples translations pave également le plan. (figure 5 ci-dessous)

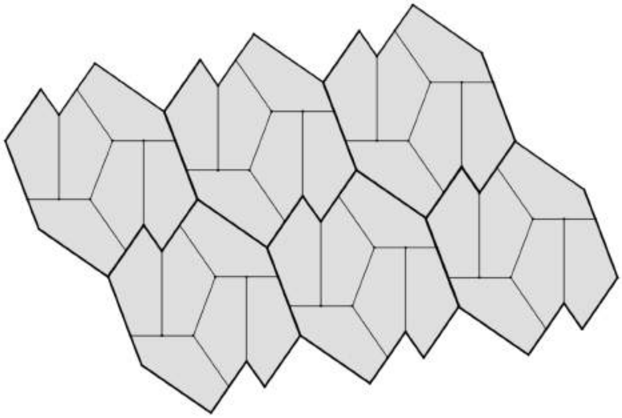


figure 5

Ce nouveau pavé, isolé dans la figure 6, examiné sous tous les angles, va nous donner tous les renseignements souhaités.

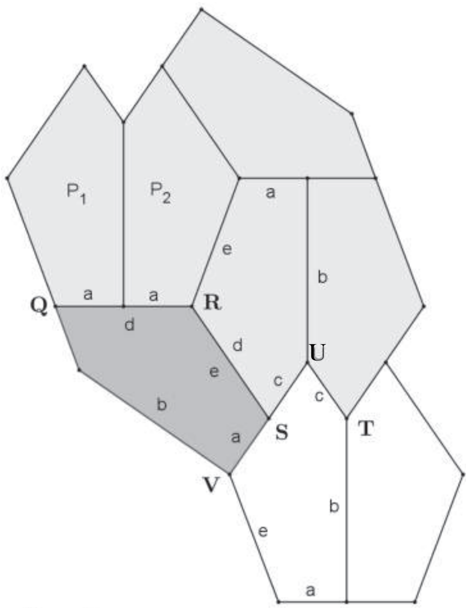


figure 6

Rappelons que les notations sont celles de la figure 4.

Commençons par les angles :

La symétrie des pavés (P_1) et (P_2) montre que $A = \dfrac{\pi}{2}$.

Les angles en S montrent que $C + E = \pi$. (1)

Les angles en T montrent que $2B + C = 2\pi$. (2)
Les angles en R montrent que $2D + E = 2\pi$. (3)
Par ailleurs la somme des 5 angles vaut $3 \times \pi$ comme dans tout pentagone convexe.

Comme on connaît $A = \frac{\pi}{2}$, il reste $B + C + D + E = \frac{5\pi}{2}$. (4)

On a bien 4 équations pour 4 angles inconnus, mais elles ne sont pas indépendantes, et tout ce qu'on peut en tirer pour l'instant (exercice laissé au lecteur) est :

$$E = 2B - \pi,\ C = 2\pi - 2B,\ D = \frac{3\pi}{2} - B.$$

Continuons l'enquête par les côtés :

Le segment [QR] de la figure 5 montre que $d = 2a$.
Le segment [RS] montre que $d = e$.
Enfin, [UV] montre que $d = a + c$, mais comme $d = 2a$ on en déduit $c = a$.
Pour les segments, on a donc : $c = a$ et $d = e = 2a$.

Cette première investigation des lieux nous a donné des renseignements qui sont résumés dans la figure 7 ci-dessous :

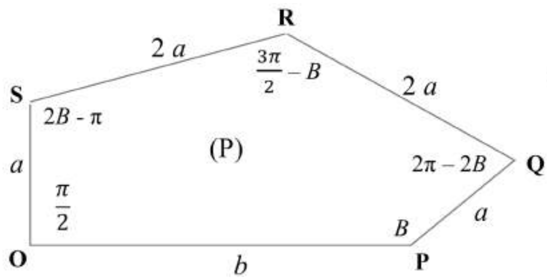


figure 7

Si on fixe a égal à 1, il reste deux inconnues : le côté b et l'angle B.
Un indice nous aurait-il échappé ?
En effet, il faut traduire d'une manière ou d'une autre le fait que tous ces indices se recoupent !
Une manière de le faire est d'écrire de deux manières le vecteur $\overrightarrow{OR}$:

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SR}.$$

Dans le repère orthonormé d'axes (OP, OS) et d'unité a = 1, on a : $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$,

Puisque $\cos(\pi - B) = -\cos(B)$ et $\sin(\pi - B) = \sin(B)$, on a : $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -\cos(B) \\ \sin(B) \end{pmatrix}$

donc

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} b + \cos(B) \\ 3\sin(B) \end{pmatrix}. \qquad (5)$$

Puisque $\cos\left(2B - \dfrac{3\pi}{2}\right) = -\sin(2B)$ et $\sin\left(2B - \dfrac{3\pi}{2}\right) = \cos(2B)$, on a

$$\overrightarrow{SR} = 2\begin{pmatrix} -\sin(2B) \\ \cos(2B) \end{pmatrix}$$

donc

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SR} = \begin{pmatrix} -2\sin(2B) \\ 1 + 2\cos(2B) \end{pmatrix} \qquad (6)$$

De (5) et (6) on tire :

$$b = -\cos(B) - 2\sin(2B) \text{ et } 3\sin(B) = 1 + 2\cos(2B) \qquad (7)$$

De (7) on tire $3\sin(B) = 1 + 2\left(1 - 2\sin^2(B)\right)$ d'où

$$\sin(B) = \frac{-3+\sqrt{57}}{8} \qquad (8)$$

$\cos^2(B) = 1 - \sin^2(B) = \dfrac{-2+6\sqrt{57}}{8}$ d'où

$$\cos(B) = -\frac{\sqrt{-2+6\sqrt{57}}}{8} \quad \left(\cos(B) < 0\right).$$

On tire les approximations :

$$B \approx 145{,}3°,$$

d'où d'après (1) (2) (3)

$$C \approx 69{,}3°,\ D \approx 124{,}7°,\ E \approx 110{,}7°$$

Enfin $b = -\cos(B) - 2\sin(2B) = -\cos(B) \times (4\sin(B) + 1)$ donne

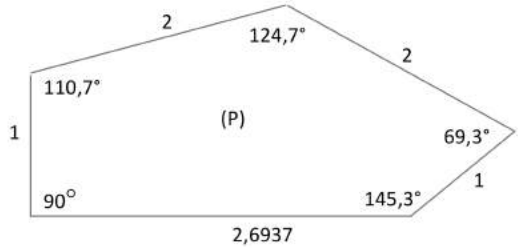
$$b = \frac{\sqrt{-2+6\sqrt{57}}}{8} \times \left(1 + \frac{-3+\sqrt{57}}{2}\right),$$

soit $b = \dfrac{-1+\sqrt{57}}{16} \times \sqrt{-2+6\sqrt{57}}$. On vérifie alors que $b^2 = \dfrac{-50+22\sqrt{57}}{16}$.

D'où la simplification :

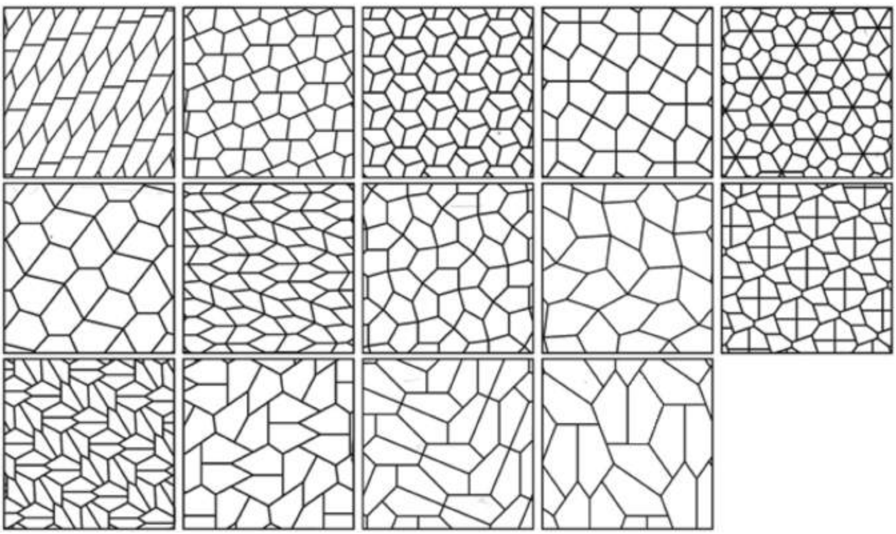
$$b = \frac{\sqrt{22\sqrt{57}-50}}{4} \approx 2{,}6937.$$

Il reste à vérifier que la solution trouvée est suffisante, tâche que nous laissons au lecteur. L’affaire est close et on a approximativement (à l’échelle près) :



ANNEXE

Voici les 14 pavages pentagonaux convexes connus en octobre 2013 :



Bibliographie :

– Le dictionnaire PENGUIN des curiosités géométriques de David WELLS chez Eyrolles.
– L’article « Les pavages pentagonaux : une classification qui s’améliore. » de Jean Paul Delahaye dans le numéro 432 de Pour la Science.

Sitographie :

– http://mathworld.wolfram.com/PentagonTiling.html
– http://www.mathpuzzle.com/tilepent.html où les pavages sont en couleur.
– Wikipédia (pavage pentagonal)