Cordes à nœuds

Henry Plane
illustrations de Julien Lyotard

Résumé : cet article montre comment des cordes à nœuds permettent de faire apparaître des angles ou des polygones particuliers, de trisecter un angle, mais aussi fait le lien avec un jeu de meccano.

La classique corde à 13 nœuds.

Et d'abord, la plus célèbre : la corde à treize nœuds. Treize nœuds régulièrement espacés qui déterminent ainsi 12 intervalles égaux.

Tous les ouvrages sur les vieux métiers en parlent, sa trace figure sur les murs de vieilles églises. En effet, si on dispose ces 12 longueurs pour former un triangle dont les côtés ont pour mesure 3, 4 et 5 de ces segments égaux, ce triangle est rectangle (figure 1). On avait ainsi un angle droit ; il y avait là un moyen pour charpentier ou tailleur de pierres du moyen-âge de s'assurer que son travail l'était également.

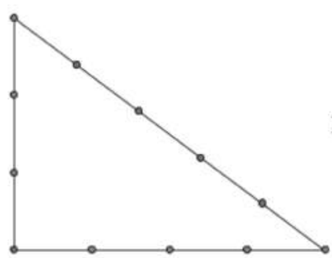


Figure 1

Mais, avec moins de nœuds réguliers, d'autres cordes ont mérité attention.

La corde à 4 nœuds.

Avec 4 nœuds, soit 3 segments égaux, on forme d'abord un triangle équilatéral, polygone à la fois équilatéral et équiangle (figure 2). Un angle de $\pi/3$ peut toujours être utile, mais nous allons trouver là le problème de la trisection de l'angle.

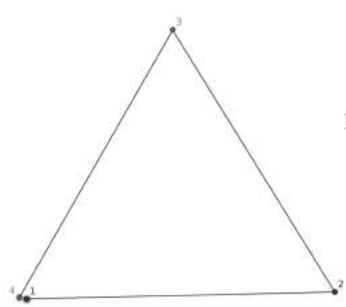


Figure 2

(*) Cet article a déjà été publié dans la Feuille de Vigne N° 129 (décembre 2013) de l'IREM de Dijon

Soit un angle $\widehat{xOy}$ (figure 3).

(Ox') opposée à (Ox).

On pose le deuxième nœud en O et le premier sur Oy. On cherche alors à poser le quatrième nœud sur Ox' et à aligner les nœuds 1, 3 et 4 (une règle peut être utile).

Soit a la mesure de $\widehat{234}$.

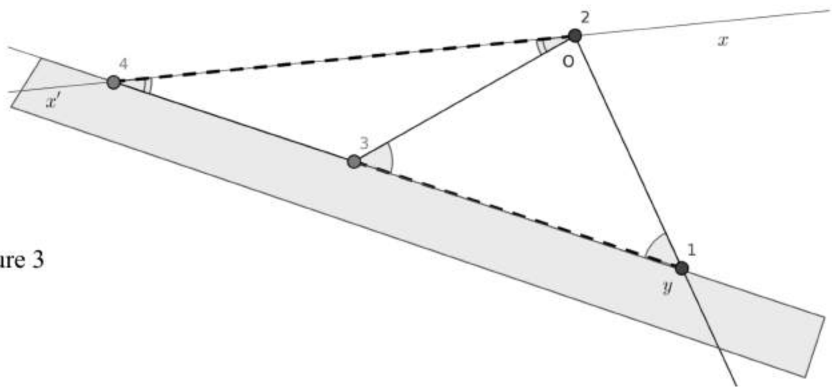


Figure 3

Il vient : Si $\widehat{423}=a$, $\widehat{231}=\widehat{423}+\widehat{243}=2a$, $\widehat{213}=\widehat{231}=2a$,

$\widehat{xOy}=\widehat{241}+\widehat{214}=a+2a=3a$.

On a, au quatrième nœud, le tiers de l'angle $\widehat{xOy}$ (après avoir tracé [Ox']).

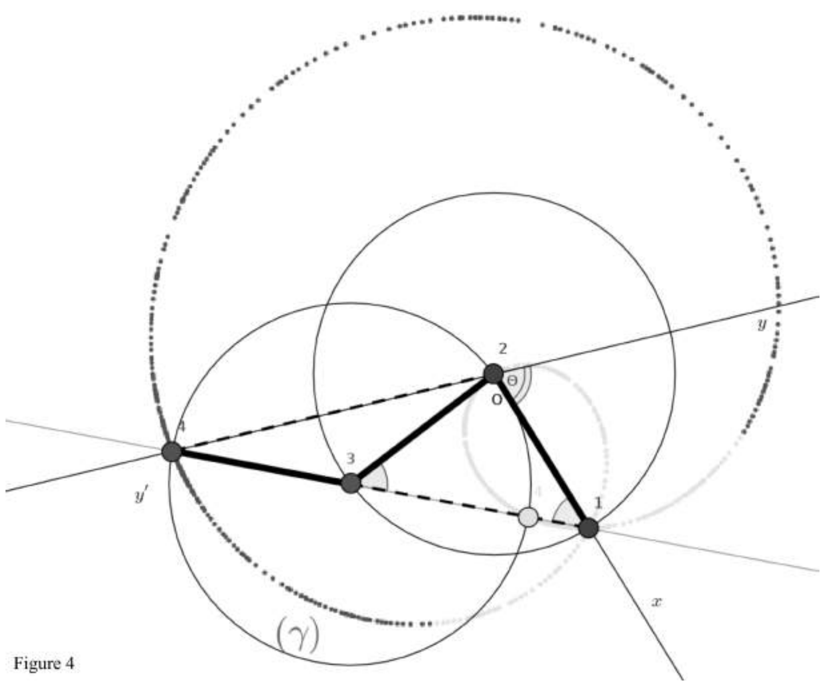


Figure 4

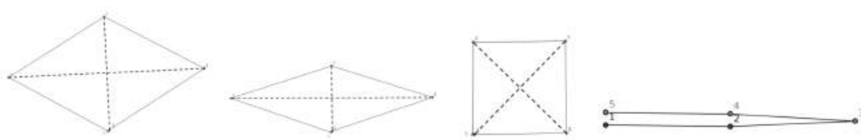
Ainsi lorsque l'angle de mesure Θ, représenté par $\widehat{xOy}$, varie (Ox) restant fixe, $(y'Oy)$ pivote autour de O, le point 3 décrit le cercle de centre 2 et de rayon [2,1] constant. Le point 4 décrit une courbe (γ) obtenue en prolongeant la corde [1,3] du cercle d'une longueur (3,4) égale au rayon de celui-ci.
(γ) ne dépend que du cercle et du point 1.

Cette situation n'a pas échappé, semble-t-il, à Étienne Pascal, le père de Blaise. La seule connaissance de (γ) permet d'obtenir en 4 un angle de mesure $\Theta/3$ à partir de $\widehat{xOy}$ convenablement placé.

C'est Roberval qui donna à (γ) le nom de *Limaçon de Pascal*. Dans la terminologie actuelle il s'agit en réalité d'un cas particulier des limaçons de Pascal. Cette courbe, conchoïde de cercle, se révélera par la suite également podaire et épicycloïde du cercle. Cela méritait de s'y arrêter…

La corde à 5 nœuds.

Avec 4 segments, donc 5 nœuds équidistants, si on réunit les deux extrêmes 1 et 5 en tendant le tout, il vient toujours un losange, polygone équilatère, mais pas toujours équiangle, de périmètre constant mais d'aire variable…



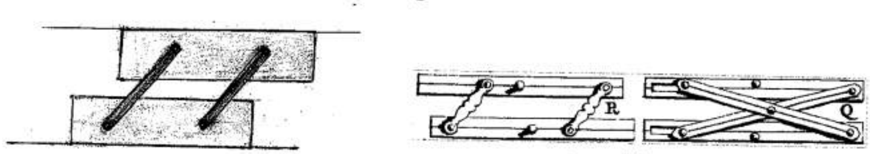
biéquilatéral　　　Carré, équangle

Figures 5

Mais, toujours pour le géomètre, les diagonales médiatrices l'une de l'autre et bissectrices des angles opposés. Tout cela bien utile pour obtenir le milieu d'un segment ou la moitié d'un angle et des droites orthogonales…
Il n'y a pas que lui pour s'en être servi. Et puis il y a deux couples de droites parallèles.

Sur ce dernier point, il semble que les quatre morceaux de corde furent assez tôt remplacés par quatre baguettes dont les points d'articulation formaient le losange précédent. Ce fut l'outil qui figurait dans la besace de tout dessinateur, mais qui n'a pas laissé de nom.

Figures 6

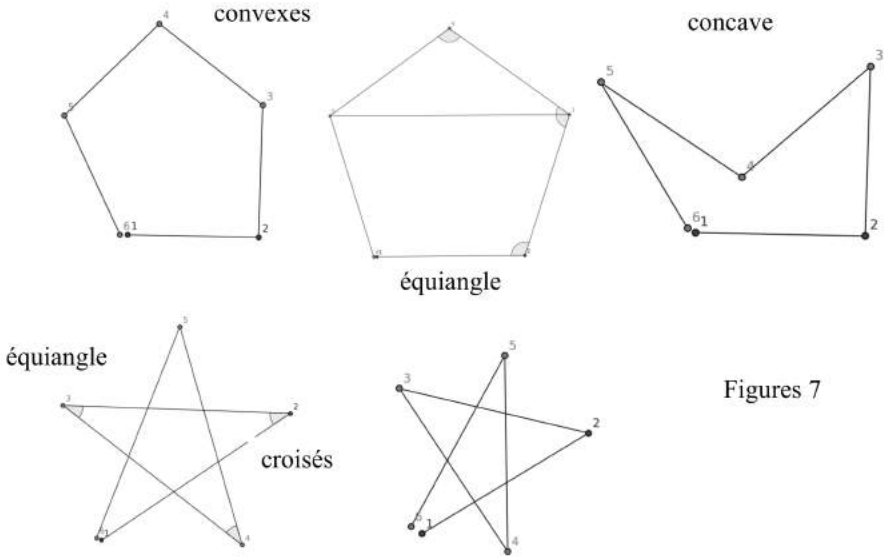


Modèles XVIIIe siècle

On ne sait quand ce « parallélogramme à parallèles » est apparu.

La corde à 6 nœuds.

Avec 5 segments égaux, même si on réunit les extrêmes, la variété des types de figures augmente nettement.



Figures 7

Dans ce dernier type, une figure attire notre attention, elle prolonge une observation déjà faite.

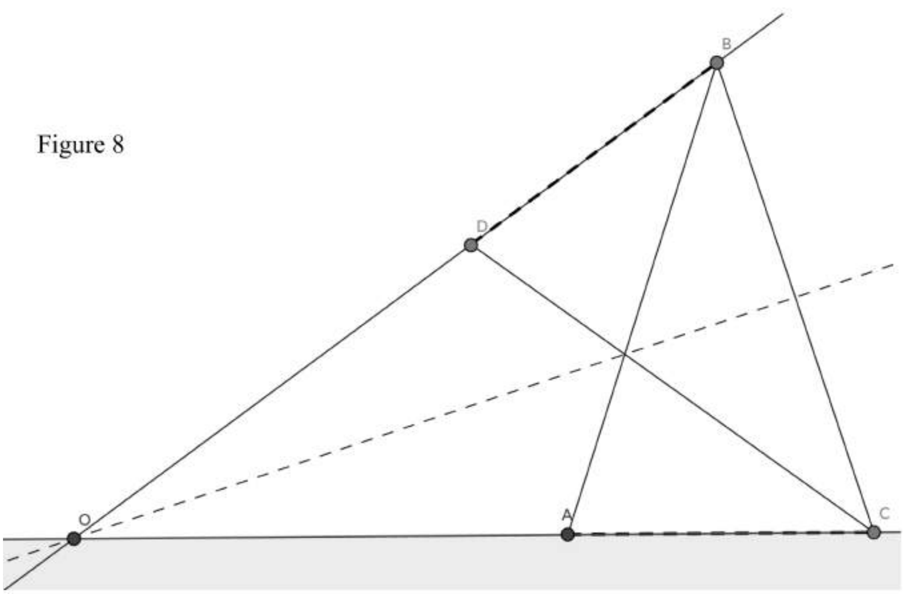


Figure 8

OA = AB = BC = CD = DO avec O, A et C alignés d'une part, et O, D et B également (une règle facilite l'opération).

On constate une symétrie de la figure par rapport à la médiatrice [BC]. Que peut-on y lire ?

Triangle ODC isocèle, si $\widehat{COD} = \theta$: $\widehat{DCO} = \theta$ et $\widehat{DBC} = \widehat{CDB} = 2\theta$.

Triangle BCD isocèle : $\widehat{DBC} = \widehat{CDB} = 2\theta$.

Dans le triangle BOC : $\pi = \widehat{COB} + \widehat{OBC} + \widehat{BCO} = \theta + 2\theta + 2\theta = 5\theta$.

L'angle en O a pour mesure $\frac{\pi}{5}$. donc BC est le côté du décagone régulier inscrit dans le cercle de centre O et de rayon OC = ρ.

Qui plus est, les triangles isocèles BOC et ABC sont semblables : $\frac{\text{BC}}{\text{OB}} = \frac{\text{AC}}{\text{BC}}$ et AC = OC − OA

En prenant [BC] comme unité de longueur il vient : $\frac{1}{\rho} = \frac{\rho - 1}{1}$ ou $\rho^{-1} = \rho - 1$

C'est la fameuse relation définissant le « nombre d'or », donc $\rho = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Si C_{10} est le côté d'un décagone régulier, celui-ci est inscriptible dans un cercle de rayon $\frac{1+\sqrt{5}}{2}\,C_{10}$.

Et la « corde à 6 nœuds » permettait la construction. N'en restons pas là.
Traçons le cercle de centre A et passant par O et B. (Tracer des cercles avec des cordes pour rayon, ce ne sont pas les géomètres qui s'y refuseront.)

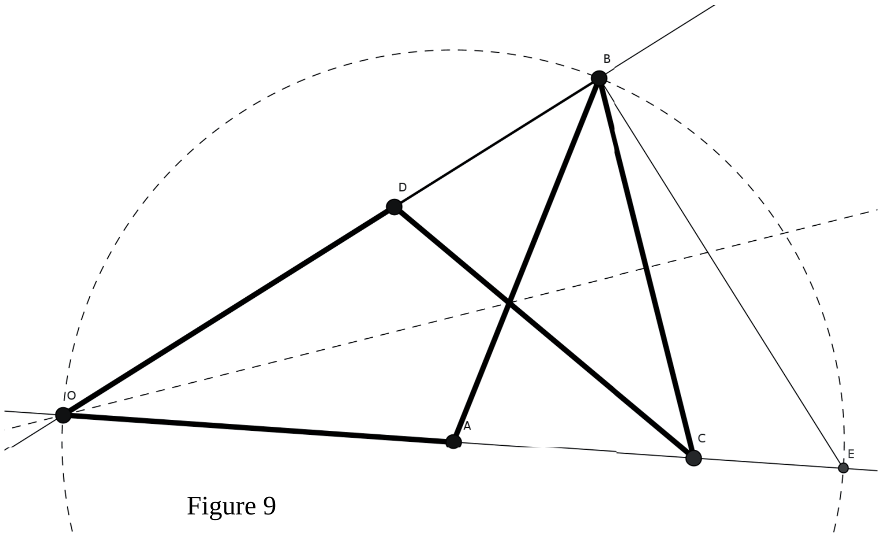


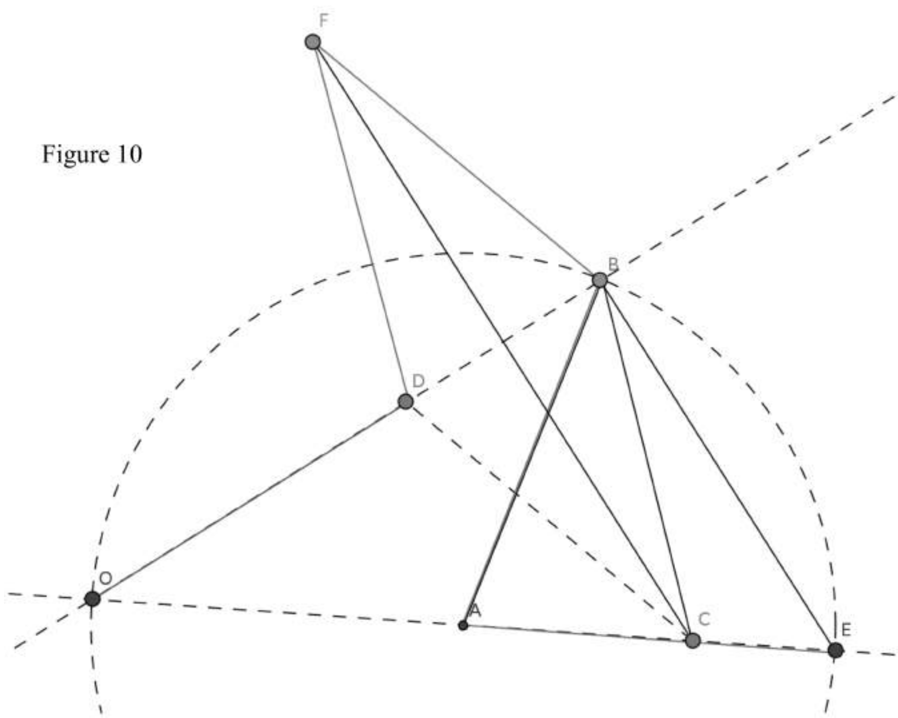
Figure 9

Ce cercle recoupe (OC) en E ; le triangle ABE est isocèle et $\widehat{BAE} = 2\widehat{BOC} = 2\frac{\pi}{5}$.

$\dfrac{2\pi}{5}$ est la mesure de l'angle au centre défini par le côté du pentagone régulier inscrit.
BE est donc le côté d'un pentagone régulier inscrit dans le cercle de centre A.

Remarques. 1) Les points O, A, B, C, D étant marqués (figure 10), on a fait pivoter le segment [OA] en [AE] (demi-tour) et si on fait pivoter le couple de segments [BC], [CD] par symétrie d'axe (BD), on a une nouvelle disposition continue de la corde, à savoir EABFDO, avec sommets remarquables.
Dans le cercle de centre O et de rayon OB, on a BC côté du décagone régulier inscrit et CF côté du pentagone régulier inscrit.

Figure 10



2) Pour le calcul de BE, on n'oubliera pas que $\widehat{OBE}$ est droit (OE diamètre).

Puisque $BE^2 = OE^2 - OB^2$, $BE^2 = 2^2 - \rho^2 = \dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$.

On notera : AE = 1 ; $BE = \sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}}$.

Cette construction d'un angle de $\dfrac{\pi}{5}$ fournit-elle une voie d'approche d'angles fractions simples de $\dfrac{\pi}{5}$?

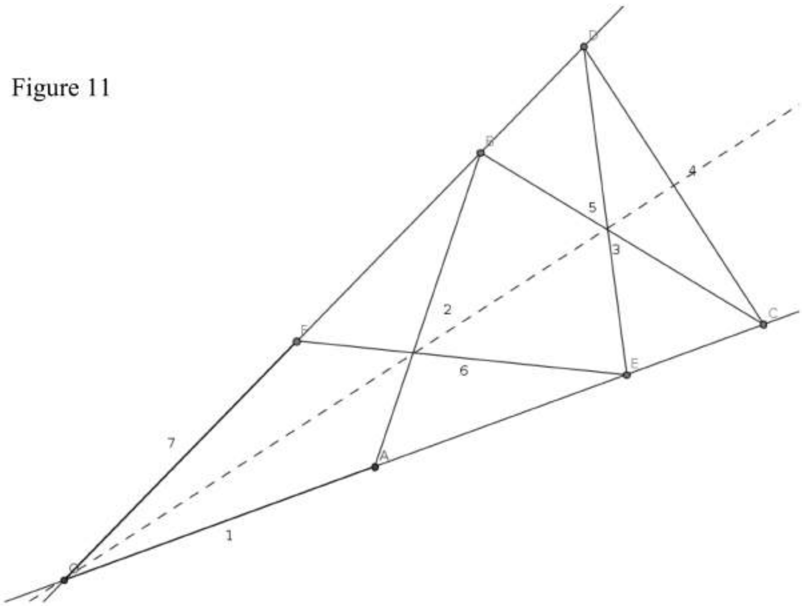
Ne parlons pas de $\dfrac{\pi}{6}$ et l'hexagone régulier inscrit. Toutes les rosaces en dessins ou d'architectures sont là pour témoigner.

La corde à 8 nœuds.

Mais $\dfrac{\pi}{7}$? avec 7 segments égaux ? Peut-on réaliser la figure suivante ?

$$\mathrm{OA} = \mathrm{AB} = \mathrm{BC} = \mathrm{CD} = \mathrm{DE} = \mathrm{EF} = \mathrm{FO}$$

Figure 11



Bien sûr, symétrie par rapport à la médiatrice de [CD] le segment médian ; il faut l'alignement des nœuds O, A, E et C d'une part, O, F, B et D d'autre part.

Si on peut réaliser cela, alors, avec $\widehat{\mathrm{COD}} = \alpha$, il vient :

triangle isocèle FOE : $\widehat{\mathrm{FEO}} = \alpha$ et $\widehat{\mathrm{DFE}} = \widehat{\mathrm{FOE}} + \widehat{\mathrm{FEO}} = \alpha + \alpha = 2\alpha$,

triangle isocèle EFD : $\widehat{\mathrm{FDE}} = \widehat{\mathrm{DFE}} = 2\alpha$,

triangle OED : $\widehat{\mathrm{DEC}} = \widehat{\mathrm{DOE}} + \widehat{\mathrm{ODE}} = \alpha + 2\alpha = 3\alpha$,

triangle isocèle : $\widehat{\mathrm{DCE}} = \widehat{\mathrm{DEC}} = 3\alpha$,

triangle DOC : $\pi = \widehat{\mathrm{DOC}} + \widehat{\mathrm{ODC}} + \widehat{\mathrm{CDO}} = \alpha + 3\alpha + \alpha = 7\alpha$,

$\alpha = \dfrac{\pi}{7}$,

Le cheminement a été le même que précédemment.
Pour le cercle de centre O et passant par C et D, la corde [CD] est le côté du polygone régulier inscrit de 14 côtés.

Même si les triangles OCD et DEC sont semblables, on ne peut pas obtenir une relation simple ente OC et CD car EO ne s'exprime pas directement en fonction de CD et OC.

On s'arrêtera à $\frac{\pi}{7}$ sachant qu'une certaine généralisation est possible. Affaire à suivre...

La corde à nœuds apportait bien des ressources jadis. Avec l'apparition des machines à diviser, des règles graduées, des cercles gradués et autres outils précis largement répandus, il ne restait plus qu'à déposer la corde à nœuds au musée. *Sic transit gloria mundi…*

Remarque. Au XX^{e} siècle, le Meccano, un jeu de construction métallique, que les plus anciens d'entre nous ont bien connu, permet aussi des montages géométriques intéressants. Voici un des montages ainsi réalisable :

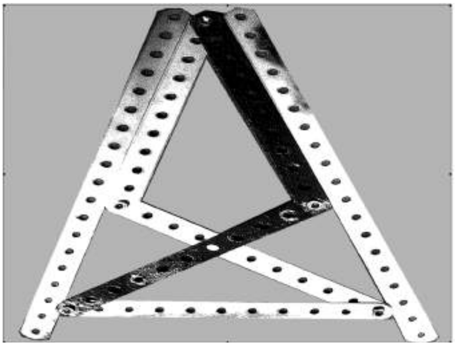


Figure 12

On notera que pour un côté de décagone régulier de 10 intervalles - c'est-à-dire tige à 11 trous - il faut un rayon du cercle circonscrit d'un peu plus de 17 trous -c'est-à-dire un peu plus de 16 intervalles. Or $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}62$.

Figures 13