Diamètre et aire

Pierre Legrand

Une bonne partie de cet article ne suppose que les connaissances du collège. De nombreux points peuvent être traités isolément.

1. Le problème

• Nous utiliserons le mot « diamètre » au sens de distance maximale de deux points d'une figure (on montrera plus loin que, pour tout polygone, ce maximum existe).
• Dans ce qui suit, les mots « triangle », « quadrilatère », « polygone » s'entendent contour et intérieur compris.

1.1. Diamètre et aire d'une figure

Une figure $\mathcal{F}$ de diamètre donné d peut évidemment avoir une aire S aussi petite que l'on veut (prendre un segment de longueur d).
Mais cette aire ne peut pas prendre des valeurs arbitrairement grandes car, si O désigne un point quelconque de $\mathcal{F}$, tout autre point M de $\mathcal{F}$ vérifie $OM \leq d$, donc $\mathcal{F}$ est incluse dans le disque de centre O et de rayon d, d'aire πd^2. Une première majoration est donc $S \leq \pi d^2$, mais elle n'est pas difficile à améliorer.
Nous étudierons d'abord ce qui se passe si on se limite aux triangles ou aux quadrilatères. Puis nous montrerons que l'on peut, par des moyens artisanaux, obtenir dans le cas général une majoration du rapport S/d^2 nettement inférieure à π (sans être pour autant la plus faible possible).
Nous ferons un usage abondant du lemme classique ci-après.

1.2. Lemme (L)

Observons la variation de la distance d'un point fixe O à un point M décrivant le segment [AB]. Si H est la projection orthogonale de O sur la droite Δ support de [AB], la distance OM est d'autant plus grande que M est plus éloigné de H. En distinguant selon la position de H par rapport à A et B (voir figures 1a et 1b), on prouve aussitôt ce qui suit :

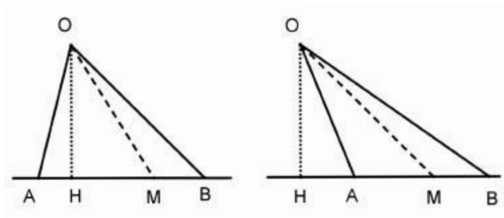

figure 1a figure 1b

(L) : *Étant donné un point* O *et un segment* [AB], *la distance de* O *à tout point* M *de*]AB[*est strictement inférieure à la plus grande des deux distances* OA *et* OB.

2. Diamètre et aire d'un triangle

2.1. Théorème

Le diamètre d'un triangle est la longueur de son plus grand côté.

Il suffit de montrer qu'étant donné deux points M et N du triangle, leur distance est au plus égale à la longueur du plus grand côté.

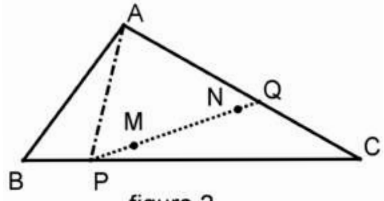

figure 2

Si M et N sont sur un même côté, c'est évident. Sinon, la droite (MN) coupe le bord du triangle en P et Q, mettons P sur [BC] et Q sur [AC]. On a [MN] $\subset$ [PQ], donc MN $\leq$ PQ.
Supposons que l'un des deux points P et Q ne soit pas un sommet, par exemple Q. D'après le lemme (L), nous avons PQ < max(PA, PC) ; mais PC $\leq$ BC et, toujours d'après ce lemme, PA $\leq$ max(AB, AC). Au total MN $\leq$ PQ < max(AB, AC, BC).

2.2. Corollaire

On a, chemin faisant, prouvé que *si deux points du triangle ne sont pas tous deux des sommets, leur distance est strictement inférieure au diamètre.*

2.3. Théorème

Parmi les triangles de diamètre donné d, ceux dont l'aire est la plus grande sont les triangles équilatéraux de côté d ; l'aire maximum en question est $d^2\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Soit un triangle ABC de diamètre *d* et [AB] son plus grand côté (au sens large), qui est de longueur *d*. Le point C appartient au disque de centre A passant par B et au disque de centre B passant par A. En ne considérant que ce qui se passe dans l'un des demi-plans définis par la droite (AB), on voit que le point C est intérieur au « triangle » curviligne ABVJUA de la figure 3. Dans ce « triangle », le point le plus éloigné de la droite (AB) est le point J. Il en résulte que, si C n'est pas en J, l'aire du triangle ABC est strictement inférieure à celle du triangle équilatéral ABJ.

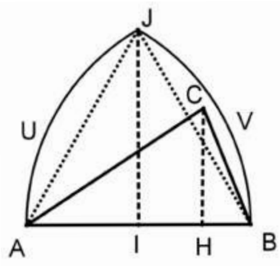

figure 3

2.4. Parenthèse

***Exercice** : Un triangle* ABC *de diamètre d étant donné, trouver, parmi les triangles de même diamètre d le contenant, celui ou ceux dont l'aire est la plus grande.*

Supposons que le plus grand côté du triangle ABC (ou l'un des plus grands) soit encore [AB]. Si A et B n'étaient pas des sommets du triangle cherché, le diamètre de ce dernier serait strictement supérieur à *d* (Cf. le corollaire du § 2.2.).

On cherche donc un point E tel que le triangle ABE contienne C, soit de diamètre *d* et d'aire aussi grande que possible. On reprend les notations de la figure 3. Le triangle ABE est de diamètre *d* si et seulement si le point E est dans le triangle curviligne ABVJUA.

Si le point C est dans le triangle équilatéral ABJ (intérieur ou pourtour), il est immédiat que l'unique solution est de placer E en J.

Si le point C n'est pas dans le triangle équilatéral, il est dans l'une des deux lunules JVBJ ou JUAJ, mettons JVBJ. Prolongeons [AC] en une demi-droite A*x* et [BC] en une demi-droite B*y*. Le triangle ABE contient le triangle ABC si et seulement si E est dans le secteur angulaire *x*C*y* (voir figure 3 bis). Il est de diamètre *d* si et seulement si E est dans le triangle curviligne ABVJUA. On a maintenant la réponse : le point E doit être mis dans le triangle curviligne CPQ à la position la plus éloignée de la droite (AB), c'est-à-dire en Q.

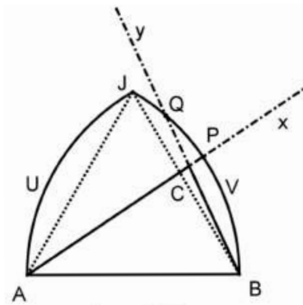

figure 3 bis

Il y a donc là encore une solution unique ABQ, qui est un triangle isocèle dont deux côtés ont pour longueur *d*, le troisième étant d'une longueur inférieure.

Remarque : Une situation singulière est à examiner, celle où deux des côtés du triangle ont une longueur égale au diamètre. Si par exemple AB = AC = *d*, les points C, P, Q sont confondus : l'unique triangle contenant ABC, de même diamètre que lui et d'aire maximale, est ABC lui-même.

3. Diamètre et aire d'un quadrilatère

Qui peut le plus peut le moins : nous allons d'abord démontrer un théorème valable pour tous les polygones.

3.1. Théorème

Le diamètre d'un polygone est la plus grande parmi les distances mutuelles de ses sommets. De plus, si la distance de deux points du polygone est égale au diamètre, ces deux points sont des sommets.

La démonstration est calquée sur celle faite pour le triangle. Il nous faut montrer qu'étant donné deux points M et N du polygone qui ne sont pas tous deux des sommets, il existe deux sommets dont la distance mutuelle est strictement plus grande que MN.

Si M et N sont sur le même côté, c'est évident. Sinon, la demi-droite M*x* d'origine M opposée à N coupe le bord du polygone en au moins un point P (qui peut éventuellement être M) et la demi-

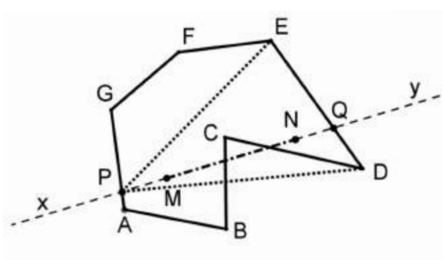

figure 4

droite Ny d'origine N opposée à M coupe le bord du polygone en au moins un point Q (qui peut éventuellement être N). On a donc [MN] $\subset$ [PQ], d'où MN $\leq$ PQ. Mettons que P soit sur [GA] et Q sur [DE].
Supposons que l'un des deux ne soit pas un sommet, par exemple Q. D'après le lemme (L), nous avons PQ < max(PE, PD). Supposons par exemple PE $\leq$ PD ; nous avons, toujours d'après ce lemme, PD $\leq$ max(AD, GD) et donc

$$\mathrm{MN} \leq \mathrm{PQ} < \max(\mathrm{AD}, \mathrm{GD}).$$

La distance MN est donc strictement inférieure soit à AD, soit à GD, ce qui règle la question.
N.B. : avec une classe, on peut limiter la démonstration à un quadrilatère convexe, ce qui suffit pour traiter intégralement le § 3.

3.2. Théorème

L'aire maximum d'un quadrilatère de diamètre donné d est $\frac{1}{2}d^2$. *Elle est atteinte par les carrés de diagonale d, mais pas seulement par eux.*

Écartons d'abord le cas d'un quadrilatère non convexe ABCD. Si un de ses sommets, mettons D, est intérieur au triangle formé par les trois autres, ici ABC, le diamètre d du quadrilatère est celui du triangle et son aire est strictement inférieure à celle du triangle, elle-même au plus égale à $d^2\frac{\sqrt{3}}{4}$. Nous nous limitons donc maintenant aux quadrilatères convexes.

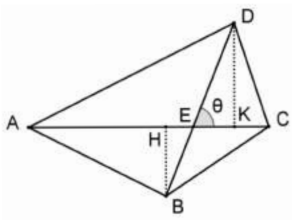

figure 5

Soit ABCD un quadrilatère convexe de diamètre d. Ses diagonales [AC] et [BD] se coupent en un point E. Soit θ l'angle aigu ou droit qu'elles forment. En appelant S son aire, H et K les projections de B et D sur la droite (AB), il vient :

$$\begin{aligned} \mathrm{S} &= \mathrm{Aire}(\mathrm{ABC}) + \mathrm{Aire}(\mathrm{ADC}) \\ &= \frac{1}{2}(\mathrm{AC}\times\mathrm{BH} + \mathrm{AC}\times\mathrm{DK}). \end{aligned}$$

$$\mathrm{S} = \frac{1}{2}\mathrm{AC}\times(\mathrm{BH}+\mathrm{DK}) = \frac{1}{2}\mathrm{AC}\times(\mathrm{BE}\sin\theta + \mathrm{ED}\sin\theta),$$

et enfin

$$\boxed{\mathrm{S} = \frac{1}{2}\mathrm{AC}\times\mathrm{BD}\sin\theta.}$$

Pour maximiser ce produit, il est nécessaire et suffisant de maximiser chacun des facteurs : prendre AC = BD = d et $\theta = 90°$, ce qui donne une aire maximale de $\frac{1}{2}d^2$.

et qui est réalisé notamment par un carré de côté $\frac{1}{\sqrt{2}}d$.

N.B. : On peut se passer du sinus. Il suffit de remarquer que BH + DK ne peut être égal à BE + ED que si $\theta = 90°$.

3.3. Problème

On se donne deux points A *et* C *situés à la distance d l'un de l'autre. On se propose de trouver le lieu des points* B *et* D *tels que le quadrilatère* ABCD *soit convexe, de diamètre d et d'aire* $\frac{1}{2}d^2$.

Une condition nécessaire et suffisante est, d'après ce qui précède, que les deux diagonales [AC] et [BD] soient perpendiculaires et de longueur d et que les quatre côtés soient de longueur au plus égale à d.

Fixons donc A et C à la distance d l'un de l'autre et considérons ce segment comme horizontal. Les points B et D doivent appartenir à l'intersection $\mathcal{S}$ du disque de centre A passant par C et du disque de centre C passant par A. En outre nous voulons que [BD] soit vertical et de longueur d ; si nous appelons B le plus haut des deux, une fois que B aura été choisi dans $\mathcal{S}$, D sera déterminé : ce sera le point situé sur la verticale de B, au-dessous de B et à la distance d de B. On tiendra une solution si le point D ainsi construit est bien dans $\mathcal{S}$, autrement dit si B est pris dans l'intersection de $\mathcal{S}$ et de l'image de $\mathcal{S}$ par la translation verticale ascendante de mesure d.

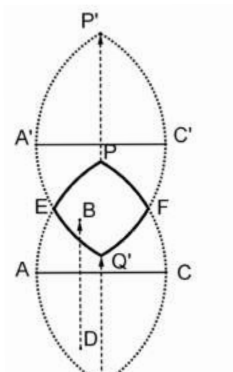

figure 6

On voit sur la figure 6 que cette intersection est le quadrilatère curviligne EQ′FP, que nous appellerons $\mathcal{K}$, qui est donc le lieu des positions de B. Le lieu des positions de D est l'image de $\mathcal{K}$ par symétrie par rapport à la droite (AC), mais il se déduit aussi de $\mathcal{K}$ par une translation évidente.

3.4. Parenthèse

La figure $\mathcal{K}$ est intéressante en elle-même. Sa construction et son étude peuvent se faire indépendamment de ce qui précède. Il suffit en effet, étant donné un carré, de tracer pour chaque sommet le quart de cercle ayant pour centre ce point et pour extrémités les deux sommets voisins (figure 7). On a ainsi reconstitué $\mathcal{K}$, qui de par cette construction a toutes les symétries du carré de départ. On peut alors faire tout un lot de calculs d'angles, de longueurs et d'aires.

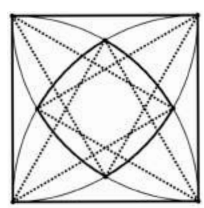
figure 7

4. Diamètre et aire d'un polygone quelconque

Prenons maintenant un polygone $\mathcal{F}$ de diamètre d (ou plus généralement une figure(1)

(1) Le lecteur épris de rigueur ou de généralité pourra remplacer dans ce paragraphe « polygone» par « partie compacte » et « aire » par « mesure ». Les résultats et les raisonnements restent valables.

admettant ce diamètre) et d'aire S et essayons de majorer le rapport S/d^2.

4.1. Première majoration

Si A et B désignent deux points de $\mathcal{F}$ situés à la distance d l'un de l'autre, tout autre point M de $\mathcal{F}$ vérifie AM ≤ d et BM ≤ d ; M appartient donc à l'intersection $\mathcal{L}$ des deux disques fermés de centres A et B et de rayon commun d (figure 8). L'aire de $\mathcal{F}$ est donc majorée par celle de $\mathcal{L}$.

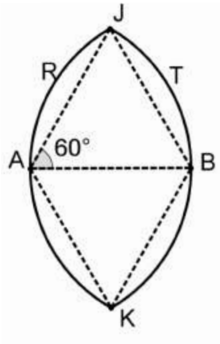

figure 8

Calculons cette dernière. Avec les notations de la figure 8, elle est le double de l'aire du triangle curviligne ABTJRA. Celle-ci est la somme de l'aire σ du secteur de cercle ABTJA, de centre A et d'angle 60°, et de l'aire σ' de la « lunule » délimitée par l'arc de cercle ARJ et le segment [AJ].

On a évidemment $\sigma = \frac{\pi}{6}d^2$. Quant à σ', c'est la différence entre l'aire du secteur de cercle BJRAB, de centre B et d'angle 60°, qui vaut $\frac{\pi}{6}d^2$, et celle du triangle équilatéral ABJ, qui vaut $\frac{\sqrt{3}}{4}d^2$.

L'aire du triangle curviligne ABTJRA est donc $\frac{\pi}{6}d^2 + \left(\frac{\pi}{6}d^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}d^2\right)$, soit $d^2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$. Nous obtenons donc la majoration :

$$S \le d^2\left(\frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Finalement, nous obtenons pour une majoration d'à peu près 1,22837… ce qui est déjà un progrès notable sur la majoration π que nous avions au départ.

4.2. Une majoration meilleure

La méthode précédente avait un point faible : avec toujours les notations de la figure 8, puisque $\mathcal{F}$ est de diamètre d et que $\mathrm{JK} = d\sqrt{3}$, $\mathcal{F}$ ne peut contenir à la fois des points proches de J et des points proches de K.

Nous allons utiliser l'idée suivante : utiliser la droite Δ parallèle à (AB) passant par le point le plus haut de $\mathcal{F}$ et la parallèle Δ' à (AB) située au-dessous de Δ à la distance d. Il est immédiat que $\mathcal{F}$ est tout entière incluse dans la bande définie par ces deux droites,

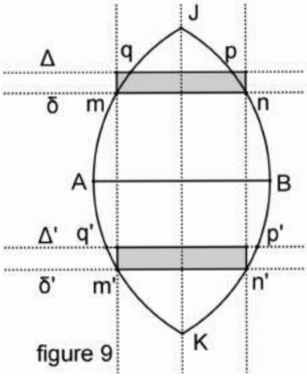

figure 9

donc aussi dans la région $\mathcal{U}$ intersection de cette bande et de $\mathcal{L}$.
L'aire de $\mathcal{F}$ est donc majorée par celle de $\mathcal{U}$, que nous n'allons pas calculer, mais majorer.

Considérons les droites δ et δ' parallèles à (AB) situées à la distance $\frac{1}{2}d$ respectivement au-dessus et au-dessous de Δ et soit $\mathcal{V}$ la région intersection de la bande définie par δ et δ' et et de $\mathcal{L}$ (voir figure 9).
Supposons, au prix d'une symétrie éventuelle par rapport à (AB), que Δ soit au-dessus de δ ; Δ' est alors au-dessus de δ'. On passe de $\mathcal{V}$ à $\mathcal{U}$ en ajoutant le trapèze curviligne *mnpq* et en retranchant le trapèze curviligne $m'n'p'q'$. Or le premier est inclus dans le plus haut des deux rectangles en gris sur la figure 9 et le second contient le plus bas des deux rectangles, isométrique au premier. Donc l'aire de $\mathcal{U}$ est inférieure à celle de $\mathcal{V}$.

Calculons maintenant l'aire de $\mathcal{V}$, en utilisant les notations de la figure 10. Cette aire est la somme de l'aire du rectangle $mnn'm'$ et du double de l'aire de la lunule $\mathcal{L}$ délimitée par l'arc de cercle $n\text{B}n'$ et le segment $[nn']$.
Le triangle $\text{A}nn'$ étant équilatéral de côté d, nous avons $nk = \frac{1}{2}d$ et $\text{O}k = \text{A}k - \text{AO} = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)d$.
L'aire du rectangle $mnn'm'$ est donc $4 \times \frac{1}{2} d \times \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) d$, soit $d^2\left(\sqrt{3}-1\right)$..

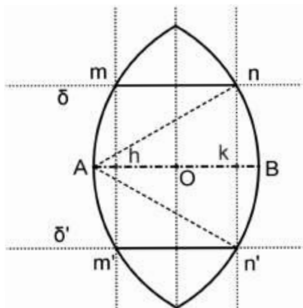

figure 10

Celle de la lunule $\mathcal{L}$ est la différence entre l'aire du secteur de centre A limité par l'arc de cercle $n\text{B}n'$, qui vaut $\frac{\pi}{6}d^2$, et l'aire du triangle équilatéral $\text{A}nn'$, qui vaut $\frac{\sqrt{3}}{4}d^2$. D'où

$$\text{Aire}(\mathcal{V}) = \left(\sqrt{3}-1\right)d^2 + 2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)d^2 = d^2\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right).$$

Conclusion

L'aire de toute figure de diamètre d est au plus égale à $\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)d^2 \approx 0{,}914d^2$ *(arrondi par excès).*

Cette majoration artisanale de S/d^2 est malheureusement encore assez loin de la meilleure possible, qui est $\frac{\pi}{4}$ soit à peu près 0,785.

5. Quid des *n*-gones pour $n \geq 5$?

Au vu de ce qui a été fait pour le triangle et le carré, on pourrait penser deux choses :

- *primo*, que l'étude du cas général ne doit pas soulever de difficulté majeure ;
- *secundo*, que parmi les *n*-gones le *n*-gone régulier est celui ou l'un de ceux donnant le plus grand rapport S/d^2.

Comme on va le voir, ces deux conjectures sont à enterrer au cimetière des illusions perdues.

5.1. Histoire du problème

Le premier à s'être intéressé à la maximisation de l'aire d'un *n*-gone de diamètre donné semble être Karl Reinhardt qui en 1922, dans un article intitulé « Extremale Polygone gegebenen Durchmessers » (*autrement dit* : Polygones extrémaux de diamètre donné), prouva que la solution pour *n* impair est le *n* -gone régulier.
Pour *n* pair, le problème se révéla beaucoup plus coriace. Il fallut attendre 1975 pour que soit résolu le cas de l'hexagone, 2002 pour celui de l'octogone et 2007 pour le cas général. Et les démonstrations ne sont ni simples ni élémentaires.

5.2. Calcul du rapport S/d^2 pour le pentagone et l'hexagone réguliers

- Soit ABCDE un pentagone régulier inscrit dans un cercle de rayon R. Son aire S est 5 fois l'aire du triangle OCD de la figure 11 : $S = \frac{5}{2}R^2 \sin 72°$. Son diamètre, distance maximale entre deux de ses sommets, est CE, soit 2R sin 72°.

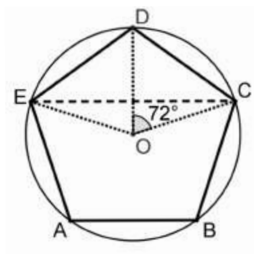

figure 11

On a donc $S/d^2 = \frac{5}{8} \times \frac{1}{\sin 72°} \approx 0{,}6572$.

- Prenons maintenant un hexagone régulier inscrit dans un cercle de rayon R. Son diamètre d' est évidemment celui du cercle, soit 2R. Son aire S′ est 6 fois l'aire d'un triangle équilatéral de côté R : $S' = 6R^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$, donc $S'/d^2 = \frac{3\sqrt{3}}{8} \approx 0{,}6495$.

5.3. Théorème

Parmi les hexagones de diamètre donné, l'hexagone régulier n'est pas d'aire maximale.

- Pour qui accepte l'idée qu'un pentagone est un hexagone dont deux sommets sont confondus, la preuve réside dans l'inégalité 0,6495 < 0,6572.

- Pour qui tient à un hexagone véritable, la figure 12 donne une réponse. Aux sommets du pentagone régulier ABCDE, dont le diamètre *d* est donné par exemple par [AD], on adjoint un point F situé sur

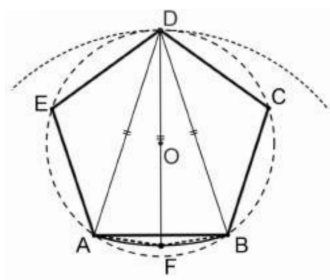

figure 12

la demi-droite [DO) à la distance d. On obtient ainsi un hexagone AFBCDE d'aire strictement supérieure à celle de ABCDE.
Son diamètre est la plus grande des distances mutuelles de ses sommets. Si l'on considère le cercle de centre F passant par D, le cercle circonscrit au pentagone lui est tangent intérieurement, donc les distances de F aux sommets du pentagone initial sont au plus égales à d. Le diamètre de AFBCDE est donc le même que celui de ABCDE, mais son aire est plus grande :

$$\text{aire}(\text{AFBCDE}) = \text{aire}(\text{ABCDE}) + \text{aire}(\text{AFB}).$$

Son rapport S/d^2 est par suite supérieur à celui du pentagone régulier et *a fortiori* à celui de l'hexagone régulier.

5.4. Ultimes remarques

On démontre que le plus grand rapport S/d^2 est donné :
- pour les pentagones par le pentagone régulier,
- pour les hexagones par l'hexagone non régulier de la figure 12.

Plus généralement, le plus grand rapport S/d^2 pour les n-gones est donné lorsque n est impair par le n-gone régulier et lorsque n est pair par le collage, sur un côté d'un $(n - 1)$-gone régulier, d'un petit triangle isocèle fabriqué selon le même principe que sur la figure 12.

On démontre aussi (Ludwig Bieberbach[(2)], 1915) que, pour tout polygone, le rapport S/d^2 est strictement inférieur à $\pi/4$ (*autrement dit* : Tout polygone a une aire strictement inférieure à celle du disque de même diamètre) et que cette borne $\pi/4$ est la meilleure possible. Bizarrement, cette *inégalité isodiamétrale* s'établit de façon plus facile et plus élémentaire que celle relative à un n-gone où n est donné. Elle utilise un outil simple et performant, la *symétrisation de Steiner*, qui fera l'objet d'un prochain article.

(2) « Über eine Extremaleigenschaft des Kreises» (Sur une propriété extrémale du cercle).