Autour de la grande pyramide

Jean-Pierre Forgès et Pierre Legrand(*)

> — Et moi, cria Chéops, je suis l'éternité.
> Et je vis, à travers le crépuscule humide,
> Apparaître la haute et sombre pyramide.
> VICTOR HUGO *La légende des siècles*
> (« Les sept merveilles du monde »)

La pyramide de Kheops (ou Cheops, en grec Χεοψ) est âgée de quarante-cinq siècles. Ce n'est pas seulement la plus monumentale construction jamais édifiée par l'homme, c'est aussi sans doute celle qui a le plus inspiré de délires mathématiques.

Sans aller jusqu'au délire, on peut tenter de faire un peu rêver nos élèves. Le texte qui suit s'y essaie ; il ne suppose que les connaissances du collège.

La pyramide telle que la décrivent les auteurs grecs et latins

HÉRODOTE, Histoires (vers – 440), livre II, § 124

« La pyramide même coûta vingt années de travail : elle est carrée ; chacune de ses faces a huit plèthres de largeur sur autant de hauteur ; elle est en grande partie de pierres polies, parfaitement bien jointes ensemble, et dont il n'y en a pas une qui ait moins de trente pieds. »

DIODORE DE SICILE Bibliothèque historique (vers -40), livre I, § LXIII

« Le spectateur reste frappé d'étonnement devant la grandeur et l'immensité de ces ouvrages, dont l'exécution a exigé tant de bras. La plus grande pyramide, de forme carrée, a pour chaque côté de la base sept plèthres et plus de six pour la hauteur ; elle va en se rétrécissant depuis la base, de sorte qu'au sommet chaque côté n'est plus que de six coudées. »

STRABON Géographie (vers l'an 10), Livre XVII, § 33

« À 40 stades au delà de la ville de Memphis règne une côte montagneuse sur laquelle se dressent plusieurs pyramides, qui sont des sépultures royales. Trois de ces pyramides sont particulièrement remarquables. Il y en a même deux, sur les trois, qui sont rangées au nombre des sept Merveilles du monde : elles n'ont pas moins d'un stade de hauteur, leur forme est quadrangulaire et la longueur de chacun de leurs côtés n'est inférieure que de très peu à leur hauteur. »

PLINE L'ANCIEN Histoire naturelle (vers l'an 78), livre XXXVI, chapitre XVII

« La plus grande pyramide[1] occupe sept jugères de terrain ; les quatre angles sont

(*) forgeor@wanadoo.fr ; p.m.legrand@sfr.fr

(1) « Amplissima septem iugera optinet soli. Quattuor angulorum paribus intervallis DCCLXXXIII pedes singulorum laterum, altitudo a cacumine ad solum pedes DCCCXXV colligit ».

d'égale ouverture, la longueur de chaque côté étant de sept cent quatre-vingt-trois pieds. La hauteur, du sol au sommet, est de sept cent vingt-cinq. » Nous donnons en note, histoire d'exercer les élèves à la lecture des chiffres romains, le texte original.

La pyramide telle qu'elle est de nos jours

La base est un carré presque parfait : la longueur de chaque côté est comprise entre 230,2 et 230,5 mètres. Les angles de ce quasi-carré sont compris entre 89,9° et 90,1°. En outre les côtés sont orientés selon les quatre points cardinaux à moins de 1/10 de degré près. On comprend qu'une telle précision (de l'ordre du millième en valeur relative) dans cette construction gigantesque ait inspiré les amateurs de mystère : science perdue, intervention des Atlantes ou des extraterrestres, etc.

La base est horizontale à quelque vingt centimètres près. La distance du point le plus haut à la base est actuellement de 139 m. On estime qu'elle devait être initialement d'environ 146 m. Cette diminution a deux causes : tassement sous le poids, mais aussi et sans doute surtout vandalisme. Dès l'Antiquité, des bâtisseurs peu scrupuleux ont utilisé son revêtement comme carrière et la pyramide a perdu sa pointe (voir le texte de Diodore) alors que la pyramide de Kephren, sa voisine, a gardé la sienne.

La pyramide théorique

Ce monument peut être représenté avec une bonne fidélité par une pyramide de base carrée ABCD dont le sommet S est sur l'axe du carré de base. Désignons par O le centre du carré, par H le milieu du côté [AB], et posons AB = a, OS = h, HS = b.

On a immédiatement $b^2 = h^2 + \frac{1}{4}a^2$.

Si l'on admet les valeurs $a = 230$ et $h = 146$, on en tire $b \cong 186$.

La forme de la pyramide est déterminée par la pente des ses quatre faces, autrement dit, avec les notations de la figure 1, par le rapport $r = \frac{\mathrm{OS}}{\mathrm{OH}} = \frac{h}{c}$, avec $c = a/2$. Ici on a donc $r \cong 1{,}27$.

On peut aussi dire que l'angle θ d'une face avec le sol vérifie $\cos\theta = \frac{c}{b} \cong 0{,}618$, d'où $\theta \cong 51{,}6°$.

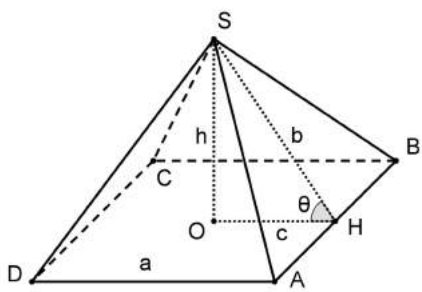

figure 1

Exercices

Lorsqu'un des auteurs cités plus haut parle de la hauteur de la pyramide, il ne s'agit pas de la distance du sommet à la base, mais de la <u>distance du sommet à un côté de la base</u>, seule accessible à une mesure directe.

Les mesures grecques et romaines se traduisent ainsi : 1 pied $\cong$ 30 cm ; 1 plèthre = 100 pieds ; 1 coudée[2] $\cong$ 45 cm ; 1 stade $\cong$ 192 m ; 1 jugère $\cong$ 2520 mètres carrés.

La qualité des estimations anciennes

1) *Trouver pour chacun des quatre auteurs les valeurs de a et b qu'il attribue à la pyramide.*

2) *Quelle valeur en résulte-t-il pour h dans chacun des quatre cas ?*

3) *La forme de la pyramide est caractérisée par le rapport h/c. Lequel des quatre a donné la meilleure estimation de ce rapport ?*

4) *Pline a commis une erreur grossière. Laquelle ?*

Les réponses

- *Hérodote* : $a \cong b \cong 240$; donc $h \cong 208$ et $\dfrac{h}{c} \cong 1{,}73$.
- *Diodore* : $a \cong 210$; $b \cong 180$ (au moins) ; donc $h \cong 146$ (au moins) et $\dfrac{h}{c} \cong 1{,}39$ (au moins).
- *Strabon* : $a \cong 192$ (au moins) ; $b \cong 192$ (avec b un peu inférieur à a) ; donc $h \cong 166$ et $\dfrac{h}{c} \cong 1{,}73$.
- *Pline* : $a \cong 235$; $b \cong 217$; donc $h \cong 182$ et $\dfrac{h}{c} \cong 1{,}55$.

Impressionnés sans doute par l'énorme masse du monument, les auteurs anciens ont tous surestimé sa hauteur. Le meilleur résultat est celui de Pline, qui en revanche évalue la surface au sol à 7 jugères, soit environ 17 640 m^2, incompatible avec sa valeur de a, qui donnerait 55 225 m^2.

La chambre du roi

Le pavement de la « chambre du roi » (la pièce où se trouvait le sarcophage du pharaon) est, prétendent certains, à un niveau tel que la section de la pyramide par le plan de ce pavement ait une aire exactement moitié de l'aire de la base de la pyramide.

Question : à quelle hauteur se trouve-t-il ?

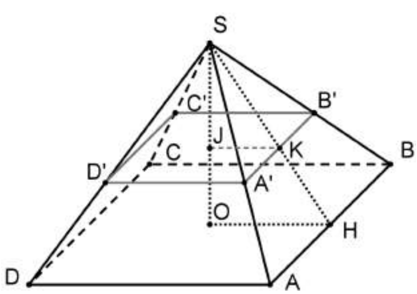

figure 2

Utilisons les notations de la figure 2 et posons SJ = x ; le rapport des deux aires

(2) Il s'agit ici de la coudée grecque ; la coudée royale égyptienne mesurait 52 ou 53 cm.

A′B′C′D′ et ABCD est $\left(\frac{\mathrm{A'B'}}{\mathrm{AB}}\right)^2$, soit encore $\left(\frac{\mathrm{SK}}{\mathrm{SH}}\right)^2$ et donc aussi $\left(\frac{\mathrm{SJ}}{\mathrm{SO}}\right)^2$, c'est-à-dire finalement $\left(\frac{x}{h}\right)^2$.

La condition imposée est donc $x^2 = \frac{1}{2}h^2$, soit $x = \frac{h}{\sqrt{2}}$.

Il en résulte $\mathrm{OJ} = h\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

En prenant pour h la valeur « initiale » de 146 m, on voit que la chambre est située à environ 43 m au-dessus du sol.

La pyramide des imaginatifs

L'idée directrice

Les interprétations mystico-mathématiques des proportions de la pyramide partent d'une idée qui est bien résumée par le texte(3) ci-dessous :

« Ce dernier [Hérodote] aurait appris de prêtres égyptiens que les proportions de la pyramide de Chéops étaient telles que le carré construit sur la hauteur comme côté avait une aire égale à celle de l'une quelconque des faces latérales triangulaires. »

Cette déclaration attribuée à Hérodote ne figure malheureusement nulle part dans ses œuvres et ne semble mentionnée dans aucun texte de l'Antiquité. Mais il est intéressant de regarder si elle est compatible avec les données.

Vers le nombre d'or

Si on revient au modèle géométrique illustré par la figure 1, l'affirmation ci-dessus se traduit par l'égalité $h^2 = \frac{1}{2}ab$ qui, jointe à l'égalité déjà vue $b^2 = h^2 + \frac{1}{4}a^2$, doit permettre de calculer les trois quantités a, b, h en fonction de l'une d'elles.

Il vient $4b^2 = 2ab + a^2$, équation du second degré en $\frac{a}{b}$, qui se résout gentiment. Mais on a plus simple et surtout plus à la portée d'une classe de troisième : on ajoute b^2 aux deux membres :

$5b^2 = (a+b)^2$, d'où $b\sqrt{5} = a + b$ et donc $a = \left(\sqrt{5} - 1\right)b$ ou, si l'on préfère, $b = \frac{\sqrt{5}+1}{4}a$.

C'est à ce moment qu'il faut sauter de joie, car $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ est la moitié du *nombre d'or*

(3) Marius Cleyet –Michau, *Le nombre d'or* (collection « Que sais-je? »). page 115.

ϕ. Si on pose comme précédemment $a = 2c$, on a $b = \phi c$; de $h^2 = \frac{1}{2}ab$ on tire $h = c\sqrt{\phi}$.

Notons qu'alors, dans le triangle rectangle OSH, les côtés OH, OS, SH sont proportionnels à 1, $\sqrt{\phi}$, ϕ, donc forment une suite géométrique. Inversement, il est facile de voir que si un triangle rectangle a cette propriété, le rapport de l'hypoténuse au plus petit côté est égal à ϕ.

Si l'on prend $c = 115$ m, ce qui est à quelques décimètres près la valeur réelle, la « pyramide théorique » correspondrait alors à $b \cong 186$ et $h \cong 146$, ce qui recoupe admirablement les mesures effectives … ou plutôt ce que l'on pense avoir été ces mesures avant l'écrêtement (réel) et l'affaissement (supposé) qui auraient ramené la hauteur à 139 m. La question perfide est évidemment celle-ci : l'estimation à 146 m de la hauteur initiale a-t-elle été faite en toute innocence ?

Vers π

Encore plus curieux ! Si on considère non pas $\frac{h}{c}$ mais $\frac{c}{h}$, on trouve $\frac{1}{\sqrt{\phi}}$, soit 0,78615…, ce qui n'a rien de spectaculaire, sauf si l'on songe qu'en le multipliant par 4 on trouve 3,1446…, approximation de π presque aussi bonne que les $\frac{22}{7}$ d'Archimède (qui font 3,1428…).

De là à considérer que les architectes égyptiens de l'an −2500 avaient des notions de mathématiques qui valaient bien celles de leurs confrères de l'an 2013, il y a évidemment un pas … que d'aucuns ont franchi allègrement.

Alors ?

Pour conclure, citons Philon de Byzance qui, vers l'an 300, écrivait dans *Les sept merveilles du monde* :

« Par de telles œuvres, les hommes montent jusqu'aux dieux, ou ce sont les dieux qui descendent jusqu'aux hommes. »