Exercices de ci, de là

Cette rubrique est faite à partir des propositions de collègues. Elle accueille bien volontiers des exercices même « modestes » mais un peu curieux imaginés ou rencontrés par les collègues soit dans des livres, soit dans des situations exploitées dans leurs classes. N'hésitez donc pas à nous envoyer les exercices piochés « de-ci de-là » qui vous ont plu ou vous ont intrigués. Nous les accepterons avec plaisir et en particulier ceux qui pourraient être mis à la portée d'élèves du secondaire.

Les propositions d'exercices ou les solutions sont à envoyer par mél à :

bruno.alaplantive@free.fr

ou par courrier à :

Jean Fromentin
17 rue de la Roussille
79000 NIORT

Pour l'envoi des propositions et des solutions, privilégiez, si possible, le courrier électronique. Si vous le pouvez, joignez à votre fichier initial une copie au format PDF pour contrôler en particulier les formules qui sont souvent perturbées d'un logiciel à l'autre. Vous faciliterez ainsi notre tâche. Merci d'avance.

Exercices

Exercice 507–1 Raphael Sinteff – Nancy

Soient FGH un triangle équilatéral et $\mathcal{H}$ l'hyperbole de foyer F, de directrice (GH), d'excentricité 2.
Construire à la règle et au compas les sommets S, S' et le centre O de l'hyperbole $\mathcal{H}$.
Montrer que les droites (OG) et (OH) sont les asymptotes de l'hyperbole $\mathcal{H}$.

Exercice 507–2 Jean-Pierre Friedelmeyer – Osenbach

Démontrer que la distance du centre de gravité au centre du cercle circonscrit d'un triangle est égale au tiers du rayon de ce cercle si et seulement si le triangle est rectangle.

Exercice 507–3 Le Petit Vert – *« en passant par la Lorraine avec mon Reuleaux… »*

Publication de la régionale APMEP de Lorraine, le Petit Vert soumet au « Gros Vert » le problème du partage d'un triangle de Reuleaux en huit parts de même aire. Voici plus précisément la demande formulée par l'équipe du Petit Vert, une fois choisi un axe de symétrie de la figure :

« … il est très facile de montrer qu'un découpage à partir du centre avec 8 angles de 45° ne donnera pas des parts égales (fig. 1). Nous vous proposons ci-dessous une solution approximative, obtenue par tâtonnements, qui semble donner des parts égales (fig. 2) ; remarquer que J_1, O_1, F_1 *ne sont pas alignés).*

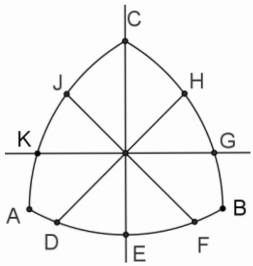


fig. 1

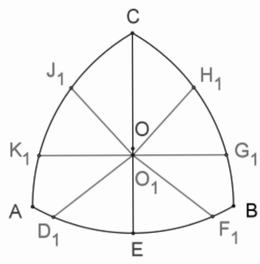


fig. 2

Le problème est le suivant : peut-on déterminer de façon rigoureuse la position des points O_1, J_1 *et* D_1 *de façon que les parts soient égales ? »*

La rubrique reste évidemment preneuse de toute autre solution au partage en huit.

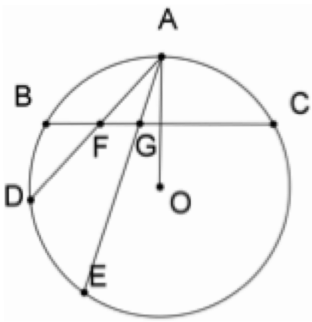
Exercice 507–4 *pour nos élèves*

A. Chacun des chiffres 1, 2, 3, 4 et 5 est utilisé une seule fois pour former un nombre de cinq chiffres. Combien vaut la somme de tous les nombres de cinq chiffres que l'on peut ainsi former ?

B. On dispose de pièces de monnaie, sans pouvoir faire exactement 1 € en les prenant toutes ou en en prenant que quelques-unes. Quel est le montant maximal de ces pièces ? *(on ne dispose pas de pièce d'une valeur supérieure à 1 €)*

Solutions

Exercice 505–1 Jean-Yves Hély – Rennes *issu du Baccalauréat séries scientifiques, Lyon 19.. (?)*



Étant donné sur une circonférence dont le centre est O, un arc BC, du milieu A de cet arc, on mène les deux autres sécantes AFD et AGE.

Démontrer que l'on a

$$FE \times DG = DF \times GE + FG \times DE.$$

Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Raphael Sinteff (Nancy), Marie-Nicole Gras (le Bourg d'Oisans), Jean-Paul Thabaret (Grenoble), Michel Sarrouy (Mende), Raymond Heitz (Piriac), Jean-Yves Hély (Rennes).

• Voici la solution de Marie-Nicole Gras.

Les angles $\widehat{\mathrm{DEB}}$ et $\widehat{\mathrm{DAB}}$ sont égaux car ils interceptent le même arc DB ; les angles $\widehat{\mathrm{ABC}}$ et $\widehat{\mathrm{AEB}}$ sont égaux car ils interceptent les arcs égaux AC et AB.

Or $\widehat{\mathrm{DFG}} = \pi - \widehat{\mathrm{FBA}} - \widehat{\mathrm{FAB}}$ et $\widehat{\mathrm{DEG}} = \widehat{\mathrm{DEB}} + \widehat{\mathrm{BEA}}$;

donc les angles $\widehat{\mathrm{DFG}}$ et $\widehat{\mathrm{DEG}}$ sont supplémentaires et le quadrilatère DEGF admet un cercle circonscrit.
D'après le théorème de Ptolémée, on a FE × DG = DF × GE + FG × DE.

Remarques.
Toutes les solutions proposées sont basées sur l'application du théorème de Ptolémée. Pour montrer la cocyclicité des points D, F, G et E, certains ont utilisé une inversion de pôle A ou ont montré que $\overrightarrow{\mathrm{AF}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{AG}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AE}}$.
Jean-Yves Hély propose une démonstration du théorème de Ptolémée accessible en Seconde avec le prérequis de la formule $\frac{1}{2} bc \sin \widehat{\mathrm{A}}$ pour l'aire d'un triangle.

Exercice 505–2 Jean-Pierre Friedelmeyer – Osenbach

Trouver toutes les paires de fractions $\left\{\frac{p}{q}; \frac{r}{s}\right\}$, avec p, q, r, s entiers naturels non nuls, telles que $\frac{p}{q} \times \frac{r}{s} = \frac{p}{q} + \frac{r}{s}$.

Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Raphael Sinteff (Nancy), Marie-Nicole Gras (le Bourg d'Oisans), Jean-Paul Thabaret (Grenoble), Michel Sarrouy (Mende), Raymond Heitz (Piriac), L. G. Vidiani (Fontaine les Dijon), Jean Gounon (Chardonnay), Alain Parmentelat (Poligny), Damien Chantemilant (Sainte-Maure de Tourraine), Jean-Pierre Friedelmeyer (Osenbach).

• Voici la solution de Damien Chantemilant.

(E) désigne l'égalité $\frac{p}{q} \times \frac{r}{s} = \frac{p}{q} + \frac{r}{s}$.

On note (a, b) le PGCD de a et b et $a \mid b$ l'assertion « a divise b ».
Quitte à simplifier par (p, q) et (r, s) les fractions considérées, on peut supposer que $(p, q) = (r, s) = 1$.

(i) <u>Cherchons une condition nécessaire pour que (E) soit vérifiée.</u>

Si (E) est vérifiée, alors : $\frac{pr}{qs} = \frac{ps + qr}{qs}$. L'égalité des numérateurs donne

$$p(r - s) = qr.$$

Puisque $q \mid p\,(r - s)$ et $(p, q) = 1$, d'après le théorème de Gauss, $q \mid (r - s)$.
Par suite, il existe un entier naturel non nul k tel que

$$r = s + kq \qquad (1).$$

En substituant avec (1),

$$\frac{p}{q}\times\frac{r}{s}=\frac{p}{q}\times\left(1+\frac{kq}{s}\right)=\frac{p}{q}+\frac{kp}{s}.$$

Donc si (E) est vérifiée

$$r = kp. \qquad (2).$$

Par (1) et (2), il vient $s = k(p - q)$, puis :

$$\frac{r}{s}=\frac{kp}{k(p-q)}=\frac{p}{p-q}$$

avec $p > q$ puisque s est un entier naturel non nul.
On vérifie que $(p, p - q) = (p, q) = 1 = (r, s)$.
Par unicité de l'écriture fractionnaire irréductible, une condition nécessaire pour que (E) soit vérifiée est :

$$\begin{cases} r = p \\ s = p - q \\ p > q \end{cases}.$$

Les couples solutions s'écrivent $\left\{\frac{p}{q};\frac{p}{p-q}\right\}$ avec $(p,\ q) = 1$, $p > q$ ou encore $\left\{\frac{a+b}{a};\frac{a+b}{b}\right\}$ avec $(a, b) = 1$.

Puisque $k(a + b) = ka + kb$, les couples sont encore solutions lorsque a et b ne sont pas premiers entre eux.

(ii) Vérifions que de tels couples sont solutions de (E).

D'une part,

$$\frac{a+b}{a}\times\frac{a+b}{b}=\frac{(a+b)^2}{ab}\ ;$$

d'autre part

$$\frac{a+b}{a}+\frac{a+b}{b}=\frac{b(a+b)+a(a+b)}{ab}=\frac{(a+b)^2}{ab}.$$

Donc (E) est vérifiée.
Finalement, les solutions de (E) sont de la forme :

$$\left\{\frac{a+b}{a};\frac{a+b}{b}\right\}$$

où a et b sont deux entiers naturels non nuls.

Remarque.
Jean-Pierre Friedelmeyer précise que sa proposition d'exercice vient de Léonard de

Pise dit Fibonacci (13e siècle) :

Que l'on partage le nombre a en deux parties b et g. Si la division de a par b donne e et celle de a par g donne d, j'affirme que le produit de d par e est égal à la somme de d et e[(1)].

Autrement dit : Si $a = b + g$, alors $\dfrac{b+g}{b} \times \dfrac{b+g}{g} = \dfrac{b+g}{b} + \dfrac{b+g}{g}$.

Voici, sous cet éclairage, la solution que propose Jean-Pierre Friedelmeyer.

Posons $\dfrac{p}{q} = u$ et $\dfrac{r}{s} = v$; $u + v = uv$; alors u et v sont solutions de l'équation $x^2 - ax + a = 0$, dont le discriminant $\Delta = a^2 - 4a$ doit être le carré d'un rationnel, soit $a^2 - 4a = k^2$ ou $\left(\dfrac{a-2}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{k}{2}\right)^2 + 1$; équation dont les solutions sont connues en fonction de deux entiers naturels non nuls, m et n ($m > n$) : $\dfrac{a-2}{2} = \dfrac{m^2+n^2}{2mn}$; $\dfrac{k}{2} = \dfrac{m^2-n^2}{2mn}$..

Les solutions u et v sont donc $u = \dfrac{a+k}{2} = \dfrac{m+n}{m}$ et $v = \dfrac{a-k}{2} = \dfrac{m+n}{n}$ et l'on retrouve la formule de Fibonacci.

Exercice 505–3 Raymond Heitz – Piriac

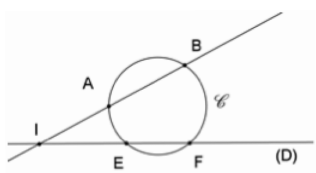
On donne dans le plan une droite (D) et deux points A et B situés hors de (D) du même côté de (D). Construire un cercle passant par A et B et découpant sur (D) un segment de longueur donnée.

Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Marie-Nicole Gras (le Bourg d'Oisans), Raymond Heitz (Piriac).

• Voici la solution de Pierre Renfer.

1) Une équation du second degré

On choisit une orientation sur la droite (D).
Pour un cercle (C) solution, on note E et F les points d'intersection de (D) et (C) tels que la mesure algébrique $\overline{\mathrm{EF}}$ soit égale à la longueur d donnée.
Soit I le point d'intersection des droites (D) et (AB).
Soit p la puissance du point I par rapport au cercle (C).
Cette puissance est positive puisque A et B sont situés du même côté de (D). Alors :



$$\overline{\mathrm{IE}} \cdot \overline{\mathrm{IF}} = \mathrm{IA} \cdot \mathrm{IB} = p \text{ et } \overline{\mathrm{IF}} - \overline{\mathrm{IE}} = d\,.$$

(1) *Scritti di Leonardo Pisano*, Vol. I, p. 455, Éd. Boncompagni, Rome, 1857-1862.

En posant $x = \overline{\mathrm{IE}}$ et $y = \overline{\mathrm{IF}}$, on résout le système $\begin{cases} x \cdot y = p \\ y - x = d \end{cases}$.

Le nombre x est racine de l'équation du second degré $x^2 + dx - p = 0$.
Comme p est strictement positif, cette équation possède deux solutions.
L'une des solutions x est positive et l'autre x' négative.
Pour le système, on obtient les deux couples solutions suivants :

$$\begin{cases} x = \dfrac{-d + \sqrt{d^2 + 4p}}{2} \\ y = \dfrac{d + \sqrt{d^2 + 4p}}{2} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x' = \dfrac{-d - \sqrt{d^2 + 4p}}{2} = -y \\ y' = \dfrac{d - \sqrt{d^2 + 4p}}{2} = -x \end{cases}.$$

Il existe donc deux cercles solutions.

2) Construction de $\sqrt{p}$

Le nombre $\sqrt{p}$ est la moyenne géométrique des nombres IA et IB. Sa construction est classique.
On construit le symétrique A′ de A par rapport à I.
On trace le cercle (Γ) de diamètre [A′B].
On mène par I la perpendiculaire à (A′B) qui coupe le cercle (Γ) en un point G.
La longueur IG est alors égale à p.

3) Construction de la solution positive de l'équation du second degré

On trace un cercle (Γ′) de diamètre d.
Sur une tangente en un point U de (Γ′), on marque un point V tel que UV = $\sqrt{p}$.
Le diamètre de (Γ′) passant par V coupe (Γ′) en deux points K et L, K étant le point le plus proche de U.
La puissance de V par rapport au cercle (Γ′) vaut : p =VK·VL = VK·(VK + d).
La longueur VK est la solution positive de l'équation $x^2 + dx - p = 0$.

Remarque.
Raymond Heitz utilise pour sa part des faisceaux de cercles. Il précise également le cas où (AB) est parallèle à (D) et qui renvoie un trapèze isocèle ABFE qu'il est aisé de construire.

Exercice 505–4 Noel Ard – Pise

La suite (v_n) est définie pour tout entier naturel non nul par

$$v_n = u_n \times 10^{-n-1}$$

où u_n désigne le n-ième terme de la suite de Fibonacci.

Prouver que la somme des termes de (v_n) est égale à $\dfrac{1}{89}$

n	
1	0,01
2	0,001
3	0,0002
4	0,00003
5	0,000005
6	0,0000008
7	0,00000013
8	0,000000021
	0,01123595…

Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Raphael Sinteff (Nancy), Marie-Nicole Gras (le Bourg d'Oisans), Jean-Paul Thabaret (Grenoble), Michel Sarrouy (Mende), Raymond Heitz (Piriac), L. G. Vidiani (Fontaine les Dijon), Jean Gounon (Chardonnay), Alain Parmentelat (Poligny), Fabrice Laurent (Bayon).

• Voici la solution de Fabrice Laurent.

Avec les notations de l'énoncé, les termes de la suite de Fibonacci sont définis explicitement en fonction de n par :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^n - \Phi'^n\right)$$

avec $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\Phi' = -\dfrac{1}{\Phi} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Pour la suite $\left(v_n\right)$ définie par $v_n = u_n \times 10^{-n-1}$, on a donc :

$$v_n = \frac{1}{10\sqrt{5}}\left(\left(\frac{\Phi}{10}\right)^n - \left(\frac{\Phi'}{10}\right)^n\right).$$

Les termes $\dfrac{\Phi}{10}$ et $\dfrac{\Phi'}{10}$ étant compris entre -1 et 1, on peut calculer la somme des termes de $\left(v_n\right)$ en utilisant $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ (avec $|q|<1$) Alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n = \frac{1}{10\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\dfrac{\Phi}{10}} - \frac{1}{1-\dfrac{\Phi'}{10}}\right)$$

et après simplification de cette expression, on trouve assez facilement

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n = \frac{1}{89}.$$

Remarque.

- Une preuve utilisant des matrices est proposée sur

http://www.geom.uiuc.edu/~rminer/1over89/1over89proof.html.

- En guise de prolongement, L.G Vidiani transmet l'exercice suivant proposé par Roger Cuculière.

Soit une série de terme général u_n telle que $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. On suppose que

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = 1.$$

Calculer u_n.