

# Propagation d'une rumeur

Gilles Maréchal & Alexandre Pin(\*)

## Lancement de l'année et choix du sujet

Comme les années précédentes Julien MICHEL, enseignant chercheur à la Faculté des Sciences Fondamentales et Appliquées de l'Université de Poitiers, est venu présenter le 11 septembre une liste de sujets possibles pour lancer l'Atelier Mathématique dans le Lycée Saint Joseph de Bressuire, lors d'une réunion ouverte à tous les élèves intéressés par les mathématiques et la rencontre avec un chercheur.

Lors de la réunion de la semaine suivante, après une discussion animée, les élèves ont choisi le sujet de l'année « Propagation d'une rumeur ».

Le sujet était énoncé de la façon suivante par le chercheur : « *Propagation de rumeurs : par des automates finis ou par une vision aléatoire, en fonction des paramètres du modèle, quel front de rumeur voit-on apparaître ? (Propagation d'une rumeur, développement d'un virus, antivirus, contre rumeur, etc.)* ».

Nous avons découvert le problème avec les élèves et avec plaisir, et nous avons été surpris par leurs prises d'initiatives. La rencontre hebdomadaire de recherche par les élèves d'une durée d'une heure trente a permis, à notre sens, une recherche globale intéressante. L'investissement des élèves a permis d'entrevoir la richesse du problème et l'intérêt des pistes ébauchées. Cinq élèves, de seconde et de terminale, ont rapidement constitué un groupe stable avec une pratique réelle et régulière de recherche, les rencontres ayant eu lieu dans une salle équipée de matériel informatique.

Ce projet de l'année 2012-2013 a été conduit en concertation avec les lycées jumelés de l'Image et du Son d'Angoulême (LISA) et du Lycée Pilote Innovant International du Futuroscope (LP2I), dans le cadre d'un Atelier Scientifique et Technique au Lycée Saint Joseph de Bressuire, et en lien avec MATH.en.JEANS.

## Cadrage du sujet

Alors que le problème avait été posé initialement par le chercheur en discret et en deux dimensions, lors d'une nouvelle rencontre le 20 octobre avec les élèves à Bressuire, à l'occasion d'un déplacement pour une conférence sur « *Maths, hasard et art* » en direction d'élèves spécialisés en arts appliqués, Julien MICHEL a incité les élèves à d'abord se restreindre à une seule dimension : ils ont ainsi cherché à modéliser dans une file d'attente la propagation de la rumeur « *Brad Pitt est mort !* ».

## Première modélisation

Dans les encadrés figurent des morceaux de rédaction des élèves. L'ensemble est disponible en ligne sur le site [mathenjeans.fr](http://mathenjeans.fr) :

---

(\*) Lycée Saint Joseph, 79300-Bressuire.  
marechalgi@cc-parthenay.fr

<http://www.mathenjeans.fr/content/propagation-de-rumeurs-lycée-saint-joseph-bressuire-lycée-pilote-innovant-international>

Une *rumeur* est une information qui se transmet de façon non maîtrisée.

Un *propagateur* est un porteur de la rumeur.

Un *contaminé* ou *informé* est une personne qui a connaissance de la rumeur, à son tour elle devient porteuse de la rumeur.

Nous nous sommes situés dans le cadre de la propagation d'une rumeur dans une file d'attente supposée de longueur infinie, c'est-à-dire que nous avons représenté les personnes par des points et la situation par *une droite avec des points régulièrement espacés*.

Nous sommes restés dans le cas où une personne informée devenait de façon certaine propagatrice à son tour.

## 1 – Propagation pépère

Lorsque la propagation se fait uniquement auprès des voisins directs nous parlons de *propagation pépère*, ou naturelle, elle est illustrée par la figure ci-dessous.

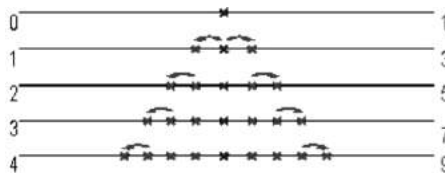


Figure 1 : propagation pépère

Sur la figure 1, l'étape est le nombre indiqué à gauche. Le nombre de contaminés est à droite.

Ainsi à l'étape 0 une seule personne est informée (croix centrale), à l'étape 1 le propagateur va informer ses deux voisins (croix extérieures) portant ainsi à 3 le nombre d'informés. À l'étape 2 on obtient 2 personnes informées en plus. Ainsi à l'étape  $n$  nous avons donc  $2n + 1$  personnes informées.

On obtient ainsi un « *cône de propagation* ».

En fonction des étapes dépendantes du temps, nous nous sommes intéressés au nombre de contaminés ainsi qu'à la vitesse de propagation de la rumeur, obtenue en divisant le nombre de contaminés par le nombre d'étapes.

Cette modélisation pépère nous étant apparue assez loin de la réalité, nous l'avons améliorée en faisant déplacer le propagateur initial.

## Démarche d'expérimentation

Après une phase de décompte à la main sur papier, il s'est avéré indispensable de concrétiser physiquement la propagation : un travail sur le sol a été une étape importante pour vérifier la pertinence des règles de propagation, pour « voir » la propagation et pour dénombrer le nombre de « contaminés ».

La première modélisation a vite été considérée comme trop simpliste. Il a alors été envisagé que le propagateur initial pouvait se déplacer pour aller porter la rumeur

plus loin. Un tableau de résultats a ainsi été fait et des premières conjectures ont été formulées. Très vite un certain nombre de ces observations ont été repérées comme de simples règles de propagation. Par contre l'une d'elle a été confirmée comme une conjecture intéressante.

Devant la nécessité de prendre en compte l'étape mais aussi la longueur du saut de propagation nous avons aidé les élèves à fixer des notations de façon à faciliter et homogénéiser les écritures.

## 2 – Propagation avec sauts et de sens imposé

### 2.1 – Présentation du modèle

La figure 2 illustre ce qui se passe dans la nouvelle situation.

Rien ne change pour les étapes 0 et 1, mais entre les étapes 1 et 2 le propagateur se déplace, par exemple de 6 unités vers la droite sur cette figure.

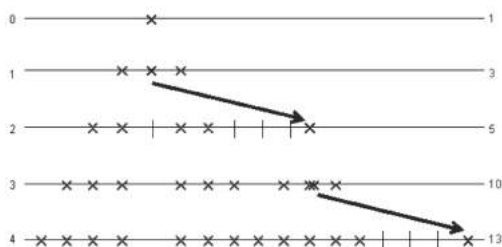


Figure 2 : Propagation avec un saut  $k = 6$

On remarque qu'à l'étape 3 le propagateur a de nouveau diffusé la rumeur, commençant un nouveau cône de propagation.

En effet, il contamine ses deux voisins plus celui qu'il vient de côtoyer, cela n'empêchant pas pour autant les voisins extrêmes de la rumeur initiale de continuer à propager celle-ci. En tout nous avons donc cinq nouveaux informés, ce qui porte le nombre de contaminés à 10.

À l'étape 4, le propagateur se déplace de nouveau de six unités dans le même sens, mais il ne contamine pas ses nouveaux voisins à cette étape.

Dans ce modèle on remarque que le contaminateur initial fait deux choses : d'abord il contamine, puis il se déplace.

On peut également constater qu'il n'y a que trois nouveaux contaminés, seuls les voisins extrêmes recevant la rumeur ainsi qu'une personne à l'intersection des deux cônes de propagation.

On observe donc une certaine régularité : nous avons 5 contaminés supplémentaires aux étapes impaires alors que nous n'en avons que 3 aux étapes paires, pour un saut de longueur 6.

En faisant d'autres essais nous avons trouvé des formules pour comptabiliser le nombre de contaminés selon la longueur du saut et le numéro de l'étape.

## 2.2 – Résultats expérimentaux

En se plaçant donc dans l'hypothèse où la propagation se fait de façon père et où le porteur initial effectue des déplacements de longueur imposée, appelés *sauts*, toujours dans la même direction, on note :

- $k$  la longueur du *saut*, on notera : *saut*  $k$  ;
- $n$  le rang de l'étape, on notera : *étape*  $n$  ;
- $F_n^k$  le nombre de personnes informées à l'étape  $n$  avec un saut  $k$ .

La figure 3 donne les résultats obtenus expérimentalement.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
2	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
3	7	7	7	8	9	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
4	9	9	9	10	11	12	13	14	14	14	14	14	14	14	14	14
5	11	11	11	13	15	17	18	19	20	21	21	21	21	21	21	21
6	13	13	13	15	17	19	21	23	24	25	26	27	27	27	27	27
7	15	15	15	18	21	24	26	28	30	32	33	34	35	36	36	36
8	17	17	17	20	23	26	29	32	34	36	38	41	41	42	43	44
9	19	19	19	23	27	31	34	37	40	43	45	47	49	51	52	53
10	21	21	21	25	29	33	37	41	44	47	50	54	55	57	59	61

Figure 3 : Tableau des résultats obtenus

Par exemple : si le propagateur effectue un saut de longueur 6, alors, après la 9<sup>e</sup> étape, il y aura 34 personnes informées. Autrement dit : si  $k = 6$  et  $n = 9$ , alors  $F_n^k = 34$ .

## 2.3 – Analyse des résultats

À partir de ces résultats, nous avons essayé de repérer et de déterminer des formules donnant  $F_n^k$ , en fonction de  $k$  et de  $n$ .

Les premiers résultats pour un saut  $k$  allant de 0 à 3 sont imposés par des contraintes concrètes.

Pour  $k > 3$  les résultats  $F_n^k$  ont une certaine irrégularité, jusqu'à un certain rang de début d'une propagation régulière dépendant de la parité de  $k$ , puisqu'il y a ou non un point commun à l'intersection de 2 cônes de propagation.

### 2.3.1 – Cas où $k$ est impair

#### 2.3.1.1 – Rang de début de régularité

Pour les autres valeurs de  $k$  nous avons d'abord cherché à déterminer un rang  $n'$  à partir duquel une régularité apparaît dans l'évolution du nombre  $F_n^k$  (augmentation régulière mais en alternance de pair en pair ou d'impair en impair).

Suite à une observation du tableau précédent on est amené à repérer les cases colorées. Les résultats sont regroupés en dessous :

$k$	5	7	9	11	13	15	17
	$2*2+1$	$2*3+1$	$2*4+1$	$2*5+1$	$2*6+1$	$2*7+1$	$2*8+1$
$\frac{k}{2}$	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5
$E\left(\frac{k}{2}\right)$	2	3	4	5	6	7	8
$n'$	1	2	3	4	5	6	7

Figure 4 : Valeurs de début pour  $k$  impair

En nous appuyant sur ces observations, nous proposons que cette valeur est, lorsque  $k$  est un entier impair supérieur ou égal à 5 :  $n' = E\left(\frac{k}{2}\right) - 1$ . Ces observations ont été confirmées par les résultats des simulations obtenues à l'aide du programme. Ce résultat est donc notre conjecture de départ.

Le rang de début  $n'$  de régularité dans la propagation à saut  $k$  est :

Pour  $k$  impair et  $k > 3$ ,

$$n' = E\left(\frac{k}{2}\right) - 1 \quad (C_1)$$

Par la suite, on s'intéresse à la valeur de  $F_{n'}^k$  nombre que nous noterons  $a_k$ .

### 2.3.1.2 - Valeurs de début de régularité

Après avoir noté ces différentes valeurs, nous avons cherché à les décomposer en produit de deux facteurs.

$k$	5	7	9	11	13	15	17
$n'$	1	2	3	4	5	6	7
$a_k$	3	5	10	14	21	27	36
	$3 \times 1$	$5 \times 1$	$5 \times 2$	$7 \times 2$	$7 \times 3$	$9 \times 3$	$9 \times 4$

Figure 5 : Décomposition de  $a_k$  en produit

La recherche d'une formule donnant  $a_k$  se fait en deux temps.

$a_k$	3	5	10	14	21	27	36
	$3 \times 1$	$5 \times 1$	$5 \times 2$	$7 \times 2$	$7 \times 3$	$9 \times 3$	$9 \times 4$
$k$	5	7	9	11	13	15	17
$\frac{k}{4}$	1,25	1,75	2,25	2,75	3,25	3,75	4,25
$E\left(\frac{k}{4}\right)$	1	1	2	2	3	3	4

Figure 6 : Formule pour le second facteur

Nous avons alors remarqué que le second facteur valait  $E\left(\frac{k}{4}\right)$  dès que  $k > 3$ ,

$k$	5	7	9	11	13	15	17
$n'$	1	2	3	4	5	6	7
Premier facteur	3	5	5	7	7	9	9
$k - n'$	4	5	6	7	8	9	10
$k - n'$ si $n'$ pair							
$k - n' - 1$ si $n'$ impair	3		5		7		9

Figure 7 : Formule pour le premier facteur

Le premier facteur du produit s'écrit  $\begin{cases} k - n' & \text{si } n' \text{ pair} \\ k - n' - 1 & \text{si } n' \text{ impair} \end{cases}$ .

En repartant du tableau initial de données, on a trouvé que le premier facteur peut encore s'écrire  $k - 2E\left(\frac{k}{4}\right) ..$

<b>k</b>	5	7	9	11	13	15	17
$E\left(\frac{k}{4}\right)$	1	1	2	2	3	3	4
$2E\left(\frac{k}{4}\right)$	2	2	4	4	6	6	8
<b>Premier facteur</b>	<u>3</u>	<u>5</u>	<u>5</u>	<u>7</u>	<u>7</u>	<u>9</u>	<u>9</u>

Figure 8 : Nouvelle formule du premier facteur

Par conséquent, notre seconde conjecture a été que la valeur  $a_k$  est :

Pour  $k$  impair et  $k > 3$

$$a_k = \left[ k - 2E\left(\frac{k}{4}\right) \right] \times E\left(\frac{k}{4}\right) \quad (C_2)$$

### 2.3.1.3 - $F_n^k$ selon $k$ et la parité de $n$

Une fois obtenus le rang de début  $n'$  et la valeur de début de régularité  $a_k$ ,  $F_n^k$  s'obtient en ajoutant à  $F_{n-1}^k$  une constante donnée, différente selon que  $n$  est pair ou impair.

On distingue alors deux écritures de  $F_n^k$  à partir de la valeur  $a_k$  de début de régularité. Après une série de tests sur des sauts  $k$  de différentes valeurs, il a été remarqué pour chaque saut  $k$  une régularité et une identité de l'augmentation de la valeur  $F_n^k$  d'étape paire en étape paire et d'étape impaire en étape impaire (flèches en dessous).

<b>n</b>	$F_n^9$
0	1
1	3
2	5
3	10
4	14
5	21
6	25
7	32
8	36
9	43
10	47

	$n \text{ pair } (n=2p)$	$n \text{ impair } (n=2p+1)$
<b>valeur de début</b>	14	10
<b>augmentation</b>	+11	+11
<b>p</b>	$\geq 2$	$\geq 1$

Figure 9 : Obtention de  $F_n^9$

Par exemple  $F_n^9$  s'obtient par une augmentation de 11 personnes, toutes les deux étapes. Cela s'explique par le fait que le saut  $k$  s'effectue lors des étapes paires (les étapes impaires étant celles du déplacement du propagateur). Cette augmentation se décompose ainsi : seulement 4 personnes de plus sont informées en  $n$  pair (il s'agit de la propagation initiale lancée à l'étape 0 et non perturbée par les sauts). En revanche, lors des étapes impaires, 7 personnes de plus sont informées car la propagation initiale se poursuit et le propagateur en déplacement informe 3 autres personnes. Ainsi :

$$\begin{aligned} \text{si } n = 2p \quad \text{alors } F_n^9 &= 14 + (p-2) \times 11 \\ \text{si } n = 2p+1 \quad \text{alors } F_n^9 &= 14 + (p-1) \times 11 \end{aligned}$$

Il en est de même pour les autres sauts  $k \geq 5$ :

$k$	$F_{2p}^k$
5	$F_{2p}^5 = 5 + (p-1) \times 7$ pour $p \geq 1$
7	$F_{2p}^7 = 5 + (p-1) \times 9$ pour $p \geq 1$
9	$F_{2p}^9 = 14 + (p-2) \times 11$ pour $p \geq 2$
11	$F_{2p}^{11} = 14 + (p-2) \times 13$ pour $p \geq 2$
13	$F_{2p}^{13} = 27 + (p-3) \times 15$ pour $p \geq 3$
15	$F_{2p}^{15} = 27 + (p-3) \times 17$ pour $p \geq 3$

$k$	$F_{2p+1}^k$
5	$F_{2p+1}^5 = 3 + (p-0) \times 7$ pour $p \geq 0$
7	$F_{2p+1}^7 = 10 + (p-1) \times 9$ pour $p \geq 1$
9	$F_{2p+1}^9 = 10 + (p-1) \times 11$ pour $p \geq 1$
11	$F_{2p+1}^{11} = 21 + (p-2) \times 13$ pour $p \geq 2$
13	$F_{2p+1}^{13} = 21 + (p-2) \times 15$ pour $p \geq 2$
15	$F_{2p+1}^{15} = 36 + (p-3) \times 17$ pour $p \geq 3$

Figure 10 : Formules  $F_n^k$  pour  $k \geq 5$

Ainsi, peut-on émettre les conjectures suivantes :

Valeurs de  $F_n^k$  lorsque  $k$  est impair et  $k > 3$  (C<sub>3</sub>)

$k$	$F_{2p}^k$
$4l+1$	$F_{2p}^k = a_k + 2E\left(\frac{k}{4}\right) + \left[p - E\left(\frac{k}{4}\right)\right](k+2)$
$4l+3$	$F_{2p}^k = a_k + \left[p - E\left(\frac{k}{4}\right)\right](k+2)$

$k$	$F_{2p+1}^k$
$4l+1$	$F_{2p+1}^k = a_k + \left[ p - E\left(\frac{k}{4}\right) + 1 \right] (k+2)$
$4l+3$	$F_{2p+1}^k = a_k + k - 2E\left(\frac{k}{4}\right) + \left[ p - E\left(\frac{k}{4}\right) \right] (k+2)$

### Vérification

De même en 2.3.2 les élèves ont rédigé ce qui concerne le cas où  $k$  est impair. La question s'est alors posée de savoir s'il était possible de reconstituer les tableaux de valeurs obtenus expérimentalement en 2.2.

#### 2.3.3.1 – Synthèse générale des conjectures

On considère le mode de propagation où le porteur initial de la rumeur se déplace d'un saut de valeur  $k$ . Le nombre de personnes informées de la rumeur est déterminé par  $k$  et l'étape  $n$ , donnant ainsi un nombre  $F_n^k$  de personnes informées.

Pour les valeurs des sauts compris entre 0 et 3, le nombre de personnes informées est établi par des contraintes concrètes en raison de l'irrégularité et l'hétérogénéité des valeurs.

- Le rang de début  $n'$  de régularité dans la propagation à saut  $k$  est :

$$n' = E\left(\frac{k}{2}\right) - 1.$$

#### Pour la propagation à saut $k$ impair, $k > 3$

- La valeur de début de régularité, noté  $a_k$ , s'écrit :  $a_k = \left[ k - 2E\left(\frac{k}{4}\right) \right] \times E\left(\frac{k}{4}\right)$ .
- La valeur du nombre de personnes informées  $F_n^k$  selon le saut  $k$  et l'étape  $n$  s'écrit :

si  $k = 4l + 1$ , pour  $l \geq 0$ ,

$$\text{si } n = 2p, \text{ alors } F_{2p}^k = a_k + 2 \times E\left(\frac{k}{4}\right) + \left[ p - E\left(\frac{k}{4}\right) \right] \times (k+2) ;$$

$$\text{si } n = 2p + 1, \text{ alors } F_{2p+1}^k = a_k + \left[ p - E\left(\frac{k}{4}\right) + 1 \right] \times (k+2) ;$$

si  $k = 4l + 3$ , pour  $l \geq 1$ ,

$$\text{si } n = 2p, \text{ alors } F_{2p}^k = a_k + \left[ p - E\left(\frac{k}{4}\right) \right] \times (k+2) ;$$

$$\text{si } n = 2p + 1, \text{ alors } F_{2p+1}^k = a_k + k - 2 \times E\left(\frac{k}{4}\right) + \left[ p - E\left(\frac{k}{4}\right) \right] \times (k+2).$$



**Pour la propagation à saut  $k$  pair,  $k > 3$**

- La valeur  $a_k$  de début de régularité se note :
- $F_n^k$  déterminé selon le saut  $k$  et l'étape  $n$  a pour valeurs :

si  $k = 4l$ , pour  $l \geq 1$ ,

si  $n = 2p$ , alors  $F_{2p}^k = a_k + 2 \times E\left(\frac{k}{4}\right) + \left[p - E\left(\frac{k}{4}\right) + 1\right] \times (k + 2)$  ;

si  $n = 2p + 1$ , alors  $F_{2p+1}^k = a_k + \left[p - E\left(\frac{k}{4}\right) + 1\right] \times (k + 2)$  ;

si  $k = 4l + 2$ , pour  $l \geq 1$ ,

si  $n = 2p$ , alors  $F_{2p}^k = a_k + \left[p - E\left(\frac{k}{4}\right)\right] \times (k + 2)$  ;

si  $n = 2p + 1$ , alors  $F_{2p+1}^k = a_k + k + 1 - 2 \times E\left(\frac{k}{4}\right) + \left[p - E\left(\frac{k}{4}\right)\right] \times (k + 2)$ .

**2.3.3.2 – Reconstruction du tableau**

Pour des contraintes édictées précédemment en section 2.3, on imposera les valeurs pour les sauts  $k$  compris entre 0 et 3 après les avoir déterminés selon deux procédés. Pour  $k$  compris entre 0 et 2, il faut appliquer les formules de propagation père ; pour  $k = 3$ , on remarque alternativement une augmentation de 2 et de 3 : il est alors établi que

pour  $p \geq 1$ ,  $F_{2p}^3 = 5 + 5 \times (p - 1)$ , et pour  $p \geq 0$ ,  $F_{2p+1}^3 = 3 + 5 \times p$ .

n	k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	1	1	1	1							
1	3	3	3	3	3							
2	5	5	5	5	5							
3	7	7	7	7	8							
4	9	9	9	10								
5	11	11	11	13								
6	13	13	13	15								
7	15	15	15	18								
8	17	17	17	20								
9	19	19	19	23								
10	21	21	21	25								
11	23	23	23	28								
12	25	25	25	30								
13	27	27	27	33								
14	29	29	29	35								
15	31	31	31	38								
16	33	33	33	40								

Figure 16 : Remplissage des premières colonnes

Pour continuer à remplir le tableau il est nécessaire d'imposer aussi les valeurs précédant  $a_k$  ainsi que  $a_k$ .

On constate que tous les débuts de propagation sont semblables jusqu'à la première rencontre de deux cônes de propagation qui se situe au niveau  $n'$ , d'où pour  $k' \geq k$ ,  $F_{n'}^{k'} = F_n^k$  pour toute valeur de  $n'$ .

Ainsi, avec les formules des valeurs  $a_k$  en  $k$  pair ou impair et selon la valeur de l'étape de début  $n'$ , on obtient le tableau suivant. On fera une recopie horizontale à partir des premières cellules déterminées par les formules (cases colorées en foncé).

n	k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
2	5	5	5	5			5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
3	7	7	7	7	8				10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
4	9	9	9	10							14	14	14	14	14	14	14	14
5	11	11	11	13									21	21	21	21	21	21
6	13	13	13	15												27	27	27
7	15	15	15	18														
8	17	17	17	20														

Figure 17 : Remplissage des débuts de colonnes

Enfin, l'ultime étape de construction exige l'insertion des formules de  $F_n^k$  selon la parité ou l'imparité des sauts  $k$  et des étapes  $n$  en effectuant un glissé vertical alternatif selon les formules.

n	k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
2	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
3	7	7	7	8	9	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
4	9	9	9	10	11	12	13	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14
5	11	11	11	13	15	17	18	19	20	21	21	21	21	21	21	21	21	21
6	13	13	13	15	17	19	21	23	24	25	26	27	27	27	27	27	27	27
7	15	15	15	18	21	24	26	28	30	32	33	34	35	36	36	36	36	36
8	17	17	17	20	23	26	29	32	34	36	38	41	41	42	43	44	44	44
9	19	19	19	23	27	31	34	37	40	43	45	47	49	51	52	53	53	53
10	21	21	21	25	29	33	37	41	44	47	50	54	55	57	59	61	61	61
11	23	23	23	28	33	38	42	46	50	54	57	60	63	67	68	70	70	70
12	25	25	25	30	35	40	45	50	54	58	62	67	69	73	73	78	78	78
13	27	27	27	33	39	45	50	55	60	65	69	73	77	82	82	87	87	87
14	29	29	29	35	41	47	53	59	64	69	74	80	83	88	89	95	95	95
15	31	31	31	38	45	52	58	64	70	76	81	86	91	97	98	104	104	104
16	33	33	33	40	47	54	61	68	74	80	86	93	97	103	105	112	112	112

Figure 18 : Remplissage du reste du tableau

Après vérification, les résultats de l'exploitation des conjectures sont cohérents avec le comptage manuel effectué et le programme informatique : nous obtenons un tableau à l'identique du tableau initial.

**2.4 – Variantes (conjecture sur les relations entre les  $a_k$ )**

En observant le tableau initial et en le prolongeant avec les résultats précédents, en particulier les cases en foncé, on est amené à faire des observations nouvelles.

$n \backslash k$	$\emptyset$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\emptyset$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
2	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
3	7	7	7	8	9	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
4	9	9	9	10	11	12	13	14	14	14	14	14	14	14	14	14
5	11	11	11	13	15	17	18	19	20	21	21	21	21	21	21	21
6	13	13	13	15	17	19	21	23	24	25	26	27	27	27	27	27
7	15	15	15	18	21	24	26	28	30	32	33	34	35	36	36	36
8	17	17	17	20	23	26	29	32	34	36	38	41	41	42	43	44
9	19	19	19	23	27	31	34	37	40	43	45	47	49	51	52	53

Figure 19 : Observations de résultats particuliers

### Proposition et démonstration de conjectures

Les observations sur les  $a_k$  (valeurs de début de régularité) ont permis de poser des conjectures, de les vérifier en refaisant des relevés expérimentaux, et de démontrer le théorème suivant (sous réserve d'avoir démontré les formules pour  $a_k$ )

$n$ pair	$n$ impair
pour $n \geq 2, F_n^{2n+2} = F_{n-1}^{2n} + n$	pour $n \geq 3, F_n^{2n+2} = F_{n-1}^{2n} + n + 2$

### Modélisation avec l'aléatoire

Le premier séminaire au LISA à Angoulême le 20 décembre 2012 a permis au chercheur de voir l'état des travaux. Il a rapidement ouvert le problème en disant « et si vous mettiez un peu de hasard... ». Les deux autres groupes du LISA et du LP2I ont proposé d'autres volets de ce problème (en envisageant un développement dans le plan) et ont présenté d'autres sujets sur lesquels ils avaient planché.

À partir de là il a été envisagé une propagation avec des sauts aléatoires en terme de direction (gauche / droite), d'où de nouveaux tableaux de résultats et une simulation à l'aide d'un programme informatique, fait par un élève, très utile et performant. Une représentation avec des arbres pondérés a été utilisée et il a fallu convenir de notations pour les probabilités.

On trouvera ce travail sur le site de l'APMEP [www.apmep.asso.fr](http://www.apmep.asso.fr), en complément à cet article.

### Critère de comparaison des modélisations

Lors du second séminaire au Laboratoire de Mathématiques du Futuroscope le 14 mars 2013, trois modélisations ont été proposées : la propagation père, la propagation précédente avec en plus des sauts réguliers du propagateur initial, puis une variante avec des sauts réguliers mais de direction aléatoire.

Les tableaux de résultats proposés ne permettaient pas clairement de comparer ces trois modélisations : Julien MICHEL a alors émis l'idée de calculer les vitesses de propagation et ainsi de pouvoir faire des comparaisons lorsque la propagation se poursuit dans le temps.

Le groupe du LP2I a proposé une quatrième modélisation dans le plan sous forme de la propagation d'un virus : dans une foule dense, le porteur du virus le disperse dans une direction aléatoire à la personne en face, qui, en plus, propage à son tour le virus de la même façon...

La quantification des probabilités des « instants record » reste à approfondir, en particulier leur majoration, mais l'idée de leur rareté a été clairement mise en évidence. Les élèves ont ainsi bien perçu que malgré les sauts aléatoires la vitesse de propagation n'était pas modifiée, la rumeur continuant à se propager inexorablement, de façon pépère...

### Soutenances

La Congrès national « *À vos maths, prêts... partez !* » à Toulouse des 5-6-7 avril a permis une présentation en amphi en commun avec le LP2I, à l'aide d'un diaporama. Ils ont aussi pu y découvrir les travaux et affiches d'autres groupes, et écouter les trois conférences faites par de vrais mathématiciens...

Leur participation au Forum Régional *Faites de la Science* le 10 avril à Niort a créé un grand intérêt, même si leur présentation a manqué de concrétisation par des données plus réelles de développement de rumeurs.

Par ailleurs, pour la première fois, dans le cadre des Cafés Philo à Bressuire, une présentation du projet dans le cadre du thème « *les maths et la réalité* » a été faite par les élèves le 27 mai, à l'aide du poster, en collaboration avec le professeur de philosophie de l'un des participants. Les élèves ont dans le cours du débat fait preuve d'une réflexion très remarquée et ont argumenté avec conviction les différentes modélisations ; ils ont ensuite ouvert à d'autres modélisations possibles (deux dimensions, en continu, avec contre rumeur, etc.). Cette action, plutôt du type Club Jeunes CNRS, a donné une ouverture citoyenne à leur recherche scientifique.

### Jumelage

Les élèves ont manqué de temps pour comparer les vitesses de propagation entre les trois modélisations. De même, bien que cela ait fait partie du plan de travail, il n'a pas été possible de vérifier en situation réelle les diverses modélisations.

De même, bien que les algorithmes créés en donnent la possibilité, l'étude d'une propagation au hasard avec des pas aléatoires n'a pas été étudiée.

Par delà le fait de travailler sur un même sujet et de se rencontrer lors du colloque à Angoulême, Poitiers et Toulouse, le jumelage s'est concrétisé par une présentation en commun en amphi : la nécessaire recherche d'harmonisation du vocabulaire et l'organisation concrète de la présentation en 15 minutes ont permis aux élèves de faire une présentation agréable très remarquée.

Ce projet a permis aux élèves de partir une nouvelle fois dans une véritable aventure, de faire des mathématiques dont des probabilités et de découvrir des mathématiques bien vivantes.