Séries de problèmes L'exemple des *Jeux avec l'infini* de Rózsa Péter

Katalin Gosztonyi(*)

Résumé : Je présente ici la notion de « série de problèmes », développée dans le cadre d'un projet de recherche en histoire des sciences, et son application pour l'analyse d'un extrait de *Jeux avec l'infini*, livre de vulgarisation des mathématiques écrit par Rózsa Péter. À l'aide de cette analyse, j'essaie de décrire une démarche pédagogique originale et de la situer dans le contexte d'une tradition d'enseignement spécifique de la culture mathématique hongroise.

Introduction : la tradition hongroise

Quand on parle d'une culture mathématique et d'une tradition d'enseignement des mathématiques hongroises, une des caractéristiques régulièrement mentionnées est le rôle important attribué à la résolution de problèmes. En effet, dans la sélection des élèves doués en mathématiques, et dans leur formation, les différentes compétitions jouent un rôle central depuis la fin du 19e siècle et jusqu'à aujourd'hui ; ainsi la revue KÖMAL [Journal mathématique pour lycéens], en plus d'articles pour les élèves, propose des problèmes à résoudre et publie chaque année la liste des meilleurs « résolvants ». On sait que György Pólya, auteur important de la réflexion sur la résolution des problèmes en mathématiques, est né et a fait ses études en Hongrie.

Toutefois, cette tradition hongroise d'enseignement des mathématiques est très peu étudiée ; il manque des analyses historiques et didactiques. Dans cet article, je présente une recherche(1) qui, en s'appuyant sur la notion de « séries de problèmes », tente de comprendre et de décrire comment les mathématiciens et enseignants hongrois partageant cette tradition pensent l'activité mathématique, ainsi que l'enseignement des mathématiques, à l'aide de la résolution de problèmes, comment ils conçoivent la construction et le développement du savoir mathématique à travers l'enchaînement des problèmes, des questions et des tentatives de réponses.

(*) Université de Szeged (Hongrie) & Laboratoire de Didactique André Revuz (Université Paris-Diderot).

(1) Cette recherche était soutenue par l'Union Européenne et par l'État de Hongrie, cofinancé par le Fonds social européen dans le cadre du projet TÁMOP 4.2.4. A/2-11-1-2012-0001, « Programme de l'Excellence Nationale ».

Le contexte de la recherche

Cette recherche s'inscrit dans un projet intitulé « Séries de problèmes : un genre au croisement des cultures », mené au sein du laboratoire d'excellence HASTEC[(2)]. Dans ce projet, des historiens des sciences, travaillant sur différentes époques et cultures, étudient les textes qu'on appelle « séries de problèmes » : pas seulement parce qu'on peut y identifier un recueil de problèmes ou de questions-réponses, mais aussi parce que leur succession et leur mise en ordre semblent jouer un rôle important dans la construction du texte.

Ma première analyse dans ce contexte de la notion de « série de problèmes » porte sur deux chapitres du livre de vulgarisation *Jeux avec l'infini*. Son auteur, Rózsa Péter (1905-1977), est une mathématicienne reconnue avant tout pour ses recherches sur les fonctions récursives. Elle a aussi vécu une expérience d'enseignante du secondaire avant la deuxième guerre mondiale et a gardé pendant toute sa vie un intérêt pour les questions de l'éducation. Son œuvre la plus connue est sans aucun doute *Jeux avec l'infini*, un livre qu'elle a écrit pendant la guerre et qui était adressé avant tout aux littéraires, aux « non-mathématiciens », pour « offrir à des esprits curieux une vue d'ensemble de notre discipline », pour leur faire sentir « la joie de la découverte »[(3)]. Le livre est devenu très populaire : il est régulièrement réédité en Hongrie et a été traduit dans douze langues (dont le français en 1977).

Il s'agit cependant d'un livre qui est beaucoup plus qu'un simple livre de vulgarisation car il a eu beaucoup d'influence sur les traditions d'enseignement des mathématiques en Hongrie. Par exemple, le premier livre du maître qui accompagne le programme réformateur de Tamás Varga en 1978 se réfère explicitement à *Jeux avec l'infini* vis-à-vis de certaines questions mathématiques et didactiques.

Séries de problèmes dans *Jeux avec l'infini*

Dans ce qui suit, je présente l'analyse des chapitres 4 et 5 du livre (« L'apprenti sorcier » et « Variations sur un thème fondamental »). Il s'agit d'un texte continu, quasi littéraire : pour pouvoir effectuer l'analyse d'une « série de problèmes », il faut avant tout identifier des « problèmes » dans le texte. Les différentes étapes du texte constituent en effet des « problèmes » de différents genres : problèmes concrets numériques ou géométriques, mais aussi questions de recherche (Est-ce qu'on pourrait utiliser la méthode de notre solution précédente ou bien le résultat obtenu ? etc.). Ensuite, l'identification d'une part des motivations pour poser chaque « problème », pour arriver à une nouvelle étape, et d'autre part des solutions ou des réponses données à chaque question permet d'étudier le processus d'enchaînement des problèmes et de construire un graphe schématique de ce processus[(4)].

(2) Voir le site du projet : http://problemata.hypotheses.org/38
(3) Péter, 1977, p.9.
(4) Le schéma est consultable sur le site de l'APMEP sous le titre « *Jeux avec l'infini*, le schéma ».

Au chapitre 4, après une introduction partant de la notion de divisibilité qui lie ce chapitre aux chapitres précédents à travers les notions de nombres « amis » et de nombres « parfaits », on arrive rapidement à des questions ouvertes de la théorie des nombres. L'auteure s'y arrête pour faire une remarque :

> De quoi s'agit-il exactement ? L'homme, pour sa propre commodité, a créé la suite des nombres naturels, qui permet de compter les objets et de faire un certain nombre d'opérations. Seulement, bien que l'ayant créée, l'homme n'a pas la maîtrise de cette suite : elle possède désormais ses propres règles, que l'homme n'avait absolument pas prévues. Tel un apprenti sorcier, il contemple les yeux éblouis, les djinns qu'il a libérés. Le mathématicien crée, à partir de rien, un univers nouveau. Mais les régularités mystérieuses et inattendues de cet univers « captivent » l'homme, au sens étymologique du terme, et de créateur il se transforme en chercheur, il s'adonne à la recherche des secrets de sa création devenue indépendante de lui.(5)

Elle continue en illustrant son propos d'un exemple, une situation de classe tirée de sa propre expérience d'enseignante :

> Recherche séduisante qui n'exige pour ainsi dire aucune formation, mais seulement une certaine dose de curiosité. C'est ainsi qu'un jour une de mes élèves de sixième me dit : « Je me suis aperçue, il y a longtemps déjà, qu'en additionnant des nombres qui se suivent, si je m'arrête à un nombre impair, par exemple à 7, j'obtiens un nombre qui est égal au produit de ce nombre et de son milieu ; par exemple, le milieu de 7 est 4 (par « milieu » elle voulait dire, de toute évidence, le chiffre qui se trouve au milieu de la séquence allant de 1 à 7 : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7), et $7 \times 4 = 28$. Quant à la somme des nombres allant de 1 à 7, $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$ fait également 28. Je sais que c'est toujours comme ça, mais je ne sais pas pourquoi. »
> « C'est une progression arithmétique, me dis-je, mais comment l'expliquer au niveau de la sixième ? » Pour commencer, je soumis le problème à la classe : « Suzy a un problème intéressant… »(6).

La suite, durant deux chapitres, présente un processus de recherche long et complexe basé sur ce problème. Ce premier problème est vite résolu par les élèves, et l'auteure-enseignante doit conclure : « Jamais je n'aurais su expliquer la solution aussi bien qu'elle » (elle : Ève, une autre élève de la classe)(7).

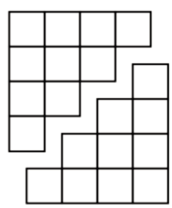
L'auteur rattache à ce premier problème un autre problème, similaire, célèbre pour sa résolution par le jeune Gauss : additionner les nombres de 1 à 100. L'auteur introduit ce problème en disant que Gauss était « parvenu au même résultat », pourtant, sa solution ne semble pas être parfaitement équivalente à la solution d'Ève (car, dans un des cas, il s'agit d'un nombre pair et, dans l'autre, d'un nombre impair

(5) *Ibid*. p. 41.
(6) *Ibid* p. 41.
(7) *Ibid* p. 42.

des nombres à additionner, et cette différence apparaît dans les deux solutions). L'étape suivante consiste donc à essayer de trouver une synthèse des deux procédures ; cette synthèse sera la méthode connue : écrire la série des nombres deux fois, l'une au-dessous de l'autre en sens inverse, puis additionner les nombres par colonne, etc.

Dans une quatrième étape, on généralise le problème original : on constate que « cette règle ne permet pas seulement de calculer des sommes de nombres successifs, mais aussi celle de nombres « équidistants », quel que soit le premier terme »(8). On arrive donc à traiter, de façon générale, les progressions arithmétiques.

À partir de ce point, on abandonne l'exemple concret de la classe. Mais la recherche ne s'arrête pas ici : l'auteure constate que la méthode utilisée, ce même type de raisonnement, peut être retrouvée dans d'autres domaines des mathématiques, et elle en donne un exemple géométrique : le calcul des aires. Elle traite brièvement le problème du calcul de l'aire d'un rectangle, puis elle pose la question du calcul de l'aire d'un triangle rectangle. La solution apparait comme similaire à la solution de l'addition des séries des nombres : il faut poser deux triangles isométriques l'un au-dessus de l'autre, comme on a écrit deux fois la série des nombres l'une au-dessus de l'autre. Pour bien établir l'analogie entre le raisonnement arithmétique et le raisonnement géométrique, elle présente une démarche d'Euclide utilisant des « triangles en escalier » qui permettent de faire le lien entre les deux domaines : nombres et géométrie, discret et continu.



« C'est donc la même idée que nous avons exprimée, d'abord, dans le langage de l'arithmétique, ensuite, dans celui de la géométrie. D'autres variations sont possibles » conclut Rózsa PÉTER à la fin du chapitre. Et, dans le chapitre suivant, elle continue avec d'autres variations.

La question de départ de ce nouveau chapitre est la possibilité d'utiliser le résultat du problème original (« Dans quelles circonstances avons-nous besoin d'additionner les nombres d'une telle séquence ? »(9)) Pour donner un exemple, l'auteure propose un problème « en apparence assez éloigné de cette préoccupation » : le problème du nombre des diagonales d'un polygone (mais, même si les questions sont générales, elle va toujours montrer les raisonnements sur un exemple concret, dans ce cas sur un octogone). « Pour nous faciliter la tâche »(10), elle propose tout de suite de

(8) *Ibid*. p. 43.
(9) *Ibid*. p. 48.
(10) *Ibid*. p. 49.

modifier un peu l'énoncé : « étant donné les huit sommets d'un octogone, de combien de façons peut-on les relier ? »[11].

Deux solutions différentes à ce problème apparaissent : selon la première, un premier sommet peut être relié à 7 autres, un deuxième aux 6 sommets restants, etc. On aura la somme 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 segments. Selon la deuxième, on multiplie le nombre de segments partant de chaque sommet (7) par le nombre des sommets (8), et on divise par 2, car chaque segment est compté pour ses deux sommets. « Ces deux méthodes doivent aboutir au même résultat, dit ici l'auteur, donc 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 est égal à la moitié de 8 × 7. On retrouve donc le raisonnement de Suzy. »[12]. Comme les deux raisonnements différents et les deux solutions du problème de l'octogone doivent donner le même résultat, on y trouve une nouvelle solution à notre problème de départ !

Rózsa Péter présente encore plusieurs variations sur le même thème, concernant par exemple « huit billets de couleurs différentes contenus dans un sac, ou huit enfants que nous voulons mettre en rangs par deux »[13]. Enfin on essaie de décontextualiser, d'exprimer tous ces différents problèmes de façon uniforme, en langage mathématique. C'est l'un des rares moments du livre où l'auteure introduit un langage formel des mathématiques, et exprime l'égalité

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{(1+n)n}{2}.$$

Il est intéressant de citer ici le paragraphe qui clôt cette partie du texte :

> « Les mathématiques ne sont qu'un langage, un langage très particulier qui opère uniquement avec les symboles. La formule ci-dessus en est un exemple ; elle ne signifie rien de précis en elle-même, et chacun peut s'en servir pour exprimer son expérience individuelle. Pour les uns, elle exprimera le nombre des diagonales d'un polygone de n côtés, pour les autres, le nombre de façons de mettre n élèves « en rangs par deux ». La formule exprime avant tout notre satisfaction de voir toute cette diversité ramenée à une unité. »[14]

Conclusion

Le texte de Rózsa Péter paraît simple, transparent ; il est facile à lire. En même temps, l'analyse en termes de « série de problèmes » contribue à rendre explicite une structure complexe et sophistiquée derrière ces deux courts chapitres étudiés. On voit effectivement une démarche pédagogique basée sur des problèmes : mais il ne s'agit pas de problèmes isolés qu'on abandonne après la solution, bien au contraire ; ce sont des *questions de recherche* autour des problèmes et de leurs solutions, des essais de réinvestissement des méthodes utilisés ou des résultats, la comparaison des

(12) *Ibid*. p. 51.
(13) *Ibid*. p. 51.
(14) *Ibid*. p 53.

différentes solutions d'un même problème, la dialectique établie entre différents domaines mathématiques à l'aide de l'analogie, qui font avancer les lecteurs/élèves, guidés par l'auteur/enseignant, dans le processus de construction et de développement des connaissances mathématiques.

Il est intéressant de comparer ce texte à des questions proposées par PÓLYA au début de *Comment poser et résoudre un problème*. Par exemple : « Voici un problème qui se rattache au vôtre et que vous avez déjà résolu. Pourriez-vous vous en servir ? Pourriez-vous vous servir de son résultat ? Pourriez-vous vous servir de sa méthode ? » ou « Pourriez-vous imaginer un problème qui s'y rattache et qui soit plus accessible ? Un problème plus général ? Un problème plus particulier ? Un problème analogue ? »(15). On voit que ce sont des questions très similaires qui guident la démarche de Rózsa PÉTER.

Le professeur n'apparaît pas, dans cette démarche pédagogique, comme l'autorité indiscutable, l'unique source d'informations, mais comme un guide expérimenté dans un processus de recherche, dans une activité conjointe des élèves et de l'enseignant. L'utilisation du langage formel des mathématiques dans le texte de Rózsa PÉTER mérite également l'attention. Les démonstrations, les raisonnements ne sont pas présentés sous forme abstraite et généralisée, mais toujours sur des exemples concrets. Toutefois, ces exemples sont toujours génériques, les raisonnements permettent de comprendre des idées, des théorèmes généraux. Le langage formel n'intervient qu'à la fin du processus : il aide à libérer de leur contexte et à unifier divers problèmes et solutions analogues.

Quelques continuations possibles de la série de Rózsa PÉTER

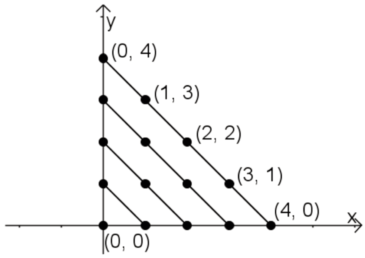
Pour finir, je présente quelques problèmes utilisés dans l'enseignement des mathématiques en Hongrie, et qui peuvent être vus, d'un point de vue ou d'un autre, comme des continuations possibles de la série de problèmes de Rózsa PÉTER (16). J'explique leurs solutions en détails, en soulignant les liens avec les problèmes présentés dans Jeux avec l'infini.

1. *Combien de points de la grille d'un repère cartésien sont couverts par un triangle que définissent les axes et la droite $y = -x + n$ (où n est un nombre naturel) ?*

Étudions d'abord les hypoténuses de ces triangles ! L'hypoténuse définie par exemple par la droite $y = -x + 4$ couvre 5 points : les points (4,0), (3,1), (2,2), (1,3) et (0,4). En général, l'hypoténuse définie par la droite $y = -x + n$ couvre $n + 1$ points. Les points de grille couverts par un triangle en question sont tous couverts par une de ces droites : le triangle avec l'hypoténuse $y = -x + n$ couvre donc $1 + 2 + 3 + \ldots + (n + 1)$ points. On y retrouve le problème de Suzy et sa solution.

(15) PÓLYA, 1965.

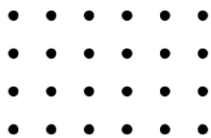
(16) Je remercie, pour la proposition de ces problèmes, mon directeur de thèse, Dr. József KOSZTOLANYI, et ma mère, Anna DEAK.



2. *a) Huit amis s'envoient l'un à l'autre des cartes postales, chacun envoyant une carte à chaque ami. Combien de cartes postales sont envoyées ?*
   b) Huit amis se rencontrent et se serrent la main. Combien cela fait-il de poignées de mains ?

Dans le cas a), comme chaque ami envoie une carte à chaque autre personne, 8 × 7 cartes sont envoyées. Dans le cas b) par contre, la solution est 8 × 7 / 2, car, si deux personnes se serrent la main, il s'agit d'une seule poignée de mains. Ces deux petits problèmes, qui peuvent servir comme introduction du traitement des problèmes combinatoires, illustrent bien que les solutions dépendent du contexte : même si dans le cas des problèmes combinatoires il faut souvent diviser un produit par deux ou par un autre nombre (comme on le voit dans l'exemple de Rózsa PÉTER), il ne s'agit pas d'une règle générale.

3. *Combien de rectangles à côtés horizontaux et verticaux sont sur la figure ?*



Dans ce type de problèmes, une méthode évidente de résolution est de bien catégoriser et énumérer les solutions (ici, par exemple, catégoriser les rectangles selon leur grandeur et les dénombrer ligne par ligne). Mais, quand il s'agit de figures plus grandes (comme dans l'exemple ci-dessus), cette énumération peut devenir assez compliquée et difficile – dans ces cas, il est intéressant de chercher une autre solution, purement combinatoire. L'astuce ici est d'observer qu'un rectangle peut être défini par une de ses diagonales, donc par deux points. Pour le premier point, 6 × 4 = 24 choix sont possibles ; pour le deuxième, on dénombre les points non situés sur l'horizontale ou la verticale du premier : il y en a 5 × 3 = 15. De cette façon, on aurait 24 × 15 choix possibles, mais, comme chaque diagonale est comptée pour ses deux sommets, et chaque rectangle pour ses deux diagonales, il faut diviser ce produit par 2 × 2. On trouve donc 24 × 15 / 4 = 90 rectangles.

4. *En utilisant les chiffres de 1 à 9, combien de nombres de 5 chiffres peuvent être construits qui contiennent au moins une fois le chiffre* 9 ?

Un départ typique, mais trompeur, de la résolution de ce problème est de fixer le chiffre 9 à une position, et faire varier les chiffres aux autres positions. En ce cas, soit on ne compte pas les nombres contenant plusieurs chiffres 9, soit on les compte plusieurs fois (et le nombre des répétitions varie en fonction du nombre des chiffres 9). La solution devient donc assez compliquée. Il est beaucoup plus simple de modifier un peu la tâche (comme dans le cas des diagonales de l'octogone, l'exemple de Rózsa PÉTER) et de calculer plutôt la quantité des nombres sans chiffre 9 : il y en a 8^5 (car 8 différents chiffres peuvent être choisis pour les 5 positions). Comme au total 9^5 nombres de 5 chiffres peuvent être construits avec les chiffres de 1 à 9, on trouve qu'il y a $9^5 - 8^5$ tels nombres contenant au moins une fois le chiffre 9. Il s'agit d'une astuce typique des problèmes combinatoires : calculer le nombre des cas ne convenant pas et le soustraire de l'ensemble des cas est parfois plus facile que calculer directement le nombre des cas convenables.

Les problèmes présentés ci-dessus peuvent être vus comme des continuations différentes possibles de la série de Rózsa PÉTER : certains de ces problèmes utilisent un résultat présenté dans l'extrait de *Jeux avec l'infini*, d'autres des méthodes de résolution ou des astuces plus générales (comme l'idée de modifier une tâche pour simplifier la solution). Ils ressemblent aussi à l'exemple de Rózsa PÉTER dans l'articulation des différents domaines mathématiques. Ces quelques exemples me semblent illustrer non seulement les riches potentiels qui se cachent sous les problèmes présentés dans l'extrait de *Jeux avec l'infini* mais aussi ceux de la démarche pédagogique qu'une analyse en termes de « séries de problèmes » pouvait dévoiler.

Références

- PÉTER, Rózsa (1977), *Jeux avec l'infini*, Éditions du Seuil (original publié en 1944 sous le titre *Játék a végtelennel*. Budapest, Dante Könyvkiadó).
- PÓLYA, George (1965), *Comment poser et résoudre un problème*, Dunod (original publié en 1945 sous le titre *How to solve it*. Princeton, Princeton University Press).
- Le carnet scientifique du projet « Séries de problèmes » :
  http://problemata.hypotheses.org/