Vous avez dit bizarre …
comme c'est bizarre …

Dominique Baroux, Rémy Coste,
Sébastien Dassule-Debertonne

Nous avons regroupé ici trois articles parus respectivement dans la revue de la régionale d'Ile de France, les « Chantiers de pédagogie mathématique » nº 156, nº 157 et nº 158 : les articles de Sébastien Dassule-Debertonne (Un exercice banal), de Dominique Baroux (Comment un exercice peut en cacher un autre) et de Rémy Coste (Vous avez dit bizarre … comme c'est bizarre …) montrant des exemples où la représentation des nombres par un outil électronique (calculatrice, ordinateur, etc.) provoque quelques surprises.

Introduction (Sébastien Dassule-Debertonne)

Dans ma pratique quotidienne, l'un de mes meilleurs alliés est sans aucun doute GeoGebra. Et depuis quelque temps, je cherche une façon simple de créer des courbes passant par des points donnés. J'ai longtemps cherché (courbes de Bézier, arcs de polynômes, …) sans vraiment de succès : ou bien le résultat était laid, ou bien je n'arrivais pas à exporter la figure vers mon deuxième allié LaTeX.

Pendant ces vacances, parmi les cartons qui attendent le déménagement vers une nouvelle région, j'ai pris un peu de temps pour revenir sur ce problème (j'arrive à me passer de machine, mais je n'aime pas qu'elles me résistent !). Tiens, une nouvelle version de GeoGebra. Quelques explorations et, miracle, cette nouvelle version[1] possède la fonctionnalité Polynôme[<Point>,<Point>, …][2] qui trace exactement ce que je veux moyennant l'ajout de quelques points de contrôle. J'obtiens une jolie courbe qui ne posera pas de problème à LaTeX. C'est du moins ce que je crois.

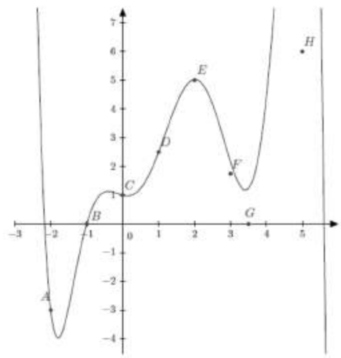
Effectivement, LaTeX refuse de compiler. « *Dimension too large* » ose-t-il me dire ! Bizarre.

Heureusement, on a publié deux articles dans les Chantiers de pédagogie mathématique, bulletin de la Régionale Ile de France, et je comprends tout de suite que la puissance 7 qui apparait dans mon polynôme donne un peu de fil à retordre à LaTeX. J'ai compris que les nombres manipulés par la machine sont trop grands, mais que faire… Je tente de couper ma courbe en deux. Un polynôme pour représenter la partie droite, un autre pour la partie gauche. Coup de chance, le raccordement n'est pas trop ésotérique, et la courbe conserve les caractéristiques générales que j'en attendais.

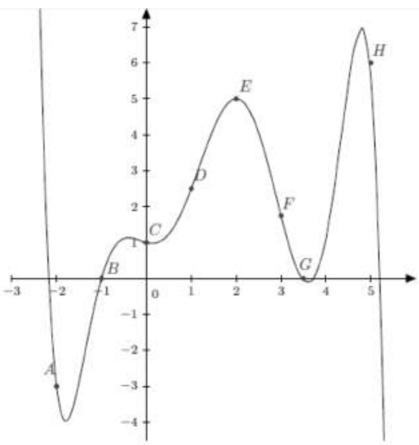
(1) Celle d'avant peut-être aussi, mais je ne l'avais pas trouvée.
(2) Cette commande trace la courbe représentative d'une fonction polynôme passant par les points donnés

Nouvel export… « *Dimension too large* » de nouveau, sur la partie de degré 4. Redécouper n'est pas une solution viable.

Une sieste et 10 cartons plus tard, eurêka : mais bien sûr ! La méthode dite de Horner ($P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0 = (((((a_n\, x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \ldots +)x + a_1)x + a_0)$) remonte à la surface après plusieurs années. Voilà comment éviter de manipuler de trop grands nombres. Je modifie l'expression et LaTeX, me dessine une très jolie courbe, bien comme je veux (après avoir compris que, sensible aux coefficients, il fallait une dizaine de décimales pour que le polynôme ne s'éloigne pas trop vite des points de contrôle, comme le montre les figures jointes).



Courbe obtenue avec
$P(x) = ((((((-0,014x + 0,138)\,x - 0,259)\,x - 0,773)\,x + 1,842)\,x + 0,885) - 0,319)\,x + 1.$



Courbe obtenue avec
$P(x) =$
$((((((-0,0141985329x + 0,1379434223)\,x - 0,2588008057)\,x - 0,7730504449)\,x + 1,8421732203)\,x + 0,8851070226)\,x - 0,3191738817)\,x + 1.$

Cette petite anecdote montre bien que les machines ne fonctionnent pas toujours dans leurs calculs comme on voudrait qu'elles le fassent. Et il est important que nos élèves

soient confrontés à ces problèmes, qu'ils en connaissent la cause et qu'ils sachent les analyser.
Les deux articles dont j'ai parlé ci-dessus, ainsi qu'un troisième récemment paru, vous sont ici proposés. Deux d'entre eux relatent des activités menées en classe – volontairement ou involontairement – qui montrent à quelles occasions il est possible d'aborder les représentations des nombres dans les ordinateurs. Le troisième article s'intéresse, quant à lui, à l'analyse de l'exercice d'algorithmique d'un sujet d'examen. La représentation des nombres dans la calculatrice n'a pas été prise en compte, ce qui pourrait s'avérer problématique.

1. Une activité en classe de seconde (Rémy Coste)

La représentation des nombres par un outil électronique (calculatrice, ordinateur, etc.) peut entrainer quelques surprises, qui laissent perplexe si on s'en tient à ce que l'on obtient par un calcul formel. Ces surprises, lorsqu'elles contredisent le calcul formel, sont souvent qualifiées de bug. Dans l'écrasante majorité des cas, il n'en est rien. Le phénomène observé s'explique parfaitement lorsque l'on comprend comment fonctionne la machine. En premier lieu, une calculatrice numérique ou un tableur (calculs en virgule flottante) ne reconnait qu'un nombre fini de nombres, tous décimaux, et l'affichage de la courbe représentative d'une fonction continue sur un intervalle n'est qu'une juxtaposition d'un ensemble fini de points. On ne demande pas à une machine à laver le linge de laver aussi la voiture, on ne peut pas demander non plus à un calculateur numérique de faire du calcul formel. De plus, même les langages de calcul formel qui équipent certains de ces outils (GeoGebra contient maintenant un registre de calcul formel, certaines calculatrices de collège savent gérer un calcul formel simple avec des racines carrées, sans parler des modèles de calculatrices formelles destinées au lycée et au post-bac…), peuvent produire certains résultats « surprenants », même si ce sont de rares exceptions. L'un des problèmes majeurs d'un langage de calcul formel, et aucun d'entre eux n'est sur ce point totalement infaillible, est l'identification d'une expression à 0. Un critère de qualité d'un tel langage est qu'il prévient quand il n'est pas certain de produire un résultat fiable.

Revenons aux outils de calcul en virgule flottante. Les occasions de découvrir des « curiosités » produites par ces outils sont présentes dans tous les registres : évaluations numériques, représentations graphiques, recherches d'extremums, résolutions d'équations, calculs de nombres dérivés, calculs matriciels, calculs des termes d'une suite, etc. Il ne faut pas s'en plaindre : elles sont très souvent des occasions magnifiques de faire faire des mathématiques aux élèves. J'en propose ici un exemple simple avec une activité pour la classe de Seconde (les phases 1 et 2 peuvent même être faites en Troisième). Son objectif est de faire découvrir aux élèves les nombres utilisés par la calculatrice.

Phase 1 : Un chiffre peut en cacher un autre…

- Taper $\sqrt{2}$, entrer. On compte 10 chiffres utilisés pour la réponse affichée.

Le dernier chiffre affiché (le 9^{e} chiffre après la virgule) est 2.

• Taper $2\sqrt{2}$, entrer. Le dernier chiffre est 5.
Bizarre … $2 \times 2 = 4$…et pas 5 !

```
√(2)
          1.414213562
2*√(2)
          2.828427125
```

Manifestement, la calculatrice ne nous montre pas tout. Pour connaître les chiffres cachés :

• Taper $\sqrt{2}$, entrer. Puis taper l'instruction : partDéc(Rép) × 10, entrer (syntaxe TI82). L'affichage dévoile le 10^{e} chiffre après la virgule.
Expliquer aux élèves ce que fait cette instruction est une très bonne occasion d'introduire la notion de variable dans un algorithme.

```
√(2)
          1.414213562
partDéc(Rep)*10
          4.142135624
          1.421356237
          4.213562373
          2.135623731
```

• Appuyer alors plusieurs fois sur entrer pour répéter l’opération et dévoiler les chiffres qui suivent, jusqu'à ce que…
On peut alors expliquer la bizarrerie lors de l'affichage de $2\sqrt{2}$, mais aussi le nombre de chiffres connus par la calculatrice, et donc ceux utilisés pour faire les calculs et les arrondis. Pour la calculatrice, $\sqrt{2}$ est un nombre décimal s'écrivant avec 14 chiffres, et égal à 1,4142135623731.

```
           1.35623731
            3.5623731
             5.623731
              6.23731
               2.3731
                3.731
                 7.31
```

Phase 2 : Une erreur … grossière !

Soit $a = 500\ (10^{15} + 1 - 10^{15})$. Calculer a sans calculatrice, puis avec.
Bizarre …

Recommencer avec $b = 500\ (10^{12} + 1 - 10^{12})$. Ça va mieux !

```
500(10^15+1-10^1
5)
                0
500(10^12+1-10^1
2)
              500
```

En écrivant à la main les nombres obtenus à chaque étape du calcul (une seule opération à la fois), et en faisant de même à la calculatrice, pour a puis pour b, on a :

Pour a :
1000000000000000
1000000000000001
1
500

```
10^15+1
             1ᴇ15
Rep-10^15
                0
500*Rep
                0
```

Pour b :
1000000000000
1000000000001
1
500

```
10^12+1
             1ᴇ12
Rep-10^12
                1
500*Rep
              500
```

On comprend alors pourquoi a est mal évalué, et b l'est correctement. La calculatrice ne peut pas écrire les nombres entiers qui ont plus de 14 chiffres.

Mais ce n'est pas fini : En principe, l'évaluation de 500 $(10^{13} + 1 - 10^{13})$ devrait être correcte puisque 10^{13} s'écrit avec 14 chiffres, ce dont dispose la calculatrice. Et pourtant…

```
500(10^13+1-10^1
3)
               0
```

Manifestement, la calculatrice utilise le 14^{e} chiffre pour arrondir le 13^{e}, mais refuse de l'utiliser dans les calculs.

Qu'en est-il avec un tableur ?

Phase 1 : Dans les cellules A1 et A2, on a tapé, la même formule : =racine(2). Mais dans A2, on a modifié le format de la cellule et demandé d'ajouter des décimales. On voit donc que ce tableur affiche 11 chiffres par défaut, mais en connait 14, pas plus que la calculatrice …

C1 =500*(10^B1+1-10^B1)

	A	B	C
1	1,4142135624	12	500
2	1,4142135623731000	13	500
3		14	500
4		15	0

Phase 2 : Les colonnes B et C permettent de voir que ce tableur produit lui aussi un résultat faux lorsque l'exposant est 15, mais correct avec un exposant égal à 14. Il a donc moins de scrupules que la calculatrice pour utiliser le 14^{e} chiffre dans les calculs.

Phase 3 : Un algorithme mystère

Je reproduis ci-dessous un document élève, qui était une partie d'un devoir à la maison dans une classe de seconde.

Document élève :

Voici un algorithme :

Entrée Demander a et b
Traitement a prend la valeur $a + b$
b prend la valeur $a - b$
a prend la valeur $a - b$
Sortie Afficher a et b

1°/ Exécuter cet algorithme « à la main » en faisant apparaître les valeurs successives de a et b dans le tableau ci-dessous.

Entrée	
a	b

Traitement	
a	*b*
Sortie	
a	*b*

Recommencer en choisissant d'autres valeurs initiales de *a* et *b*. Que fait cet algorithme ?

2°/ Programmer cet algorithme sur la calculatrice, et tester le bon fonctionnement du programme en variant le choix de *a* et *b* (nombres entiers ou non, de même signe ou non, grand ou petit, …).

3°/ Tester l'algorithme à la main, puis avec la calculatrice, avec

$$a = 100\ 000\ 000\ 000\ 000 \text{ et } b = 1$$

Que constate-t-on ? Comment expliquer cette erreur ?

4°/ Écrire un autre algorithme qui produit la même chose, mais dont le programme sur la calculatrice fonctionne correctement avec les valeurs de la 3^{e} question.

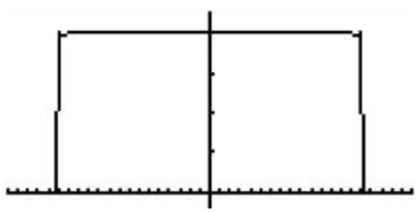
2. Quand un exercice banal vous emmène plus loin que prévu (Sébastien Dassule-Debertonne)

Après le cours sur l'exponentielle, je donne à mes élèves ce petit exercice du livre, avec l'idée de les faire travailler sur les règles de calcul de cette nouvelle fonction.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = \left(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}\right)^2 - \left(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}\right)^2$.

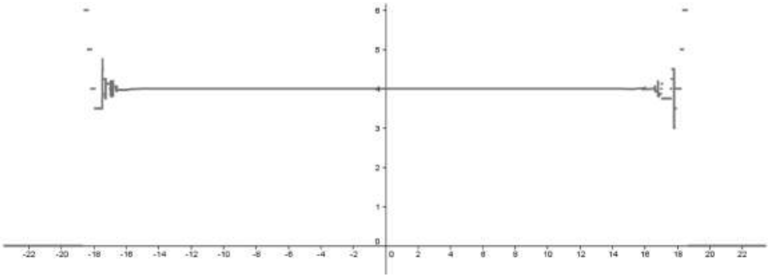
1. *À l'aide de votre calculatrice, observer la courbe représentative de la fonction f et émettre une conjecture sur la fonction.*
2. *Démontrer cette conjecture.*

Je n'ai pas prévu un temps de correction très long pour cet exercice préparé à la maison, j'ai une bonne classe et des élèves à l'aise en calcul. Il nous prendra pourtant une quarantaine de minutes.



J'aborde tranquillement l'exercice quand le meilleur élève de la classe (qui s'appelle Matt !) m'interpelle :« Monsieur, je n'ai pas su quoi dire à propos de la courbe à cause de ça ! ». Et toute la classe d'acquiescer : « Moi aussi, ma calculatrice elle fait un truc bizarre ! ». Je comprends tout de suite que nous allons devoir y passer plus de temps que prévu, bien que je n'aie pas l'intention de revenir longuement sur les performances de la calculatrice : nous avons déjà abordé la question.

L'ordinateur est prêt et GeoGebra déjà lancé en prévision d'un autre exercice. J'y entre la fonction, espérant survoler le problème des représentations informatiques des nombres, mais l'habituel sauveur GeoGebra se montre, lui aussi, récalcitrant et refuse de m'aider à tenir la séance dans les délais que je me suis fixés. Je renforce malgré moi chez les élèves l'idée qu'on est en présence d'une fonction très bizarre et qu'il va être bien compliqué d'en dire quoi que ce soit.



Impossible dès lors de ne pas soulever la question de la représentation des nombres dans une machine. Je n'y reviens pas ici. Tous semblent avoir compris pourquoi les nombres très grands ou très petits peuvent poser problème. Je pense avoir gagné quand surgit encore une question très intéressante : « Comment fait-on pour savoir si on est en présence d'un cas normal embêtant ou bien si on est en face de quelque chose dû aux problèmes de calcul ? ». Il est bien ce Matt.

Il avait choisi de conjecturer que la fonction était constante égale à 0 pour x très grand, positif ou négatif. En décortiquant le problème, on montre qu'alors cela revient à dire que $e^x = -e^x$ ou $e^{-x} = -e^{-x}$ pour ces mêmes nombres et que cela est impossible. Première preuve que la représentation est faussée par la machine.

« Oui, mais on ne peut pas le savoir avant ? ». Vraiment, il est bien ce jeune.

Je demande alors si cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$. « Ben non, y'a des trous m'sieur ! ».

Je commence à trouver ce débat très intéressant, surtout qu'un élève rétorque « On ne peut pas se fier à la courbe, ça vaut jamais 0 ! ».

L'étude de dérivabilité et sa traduction graphique sont rapidement comprises et, pour certains, j'ai même l'impression que ça a fait enfin sens de s'intéresser à ce type de question.

Ils sont enfin tous d'accord : la courbe sur leur calculatrice dégénère à partir d'un moment, et on ne peut s'y fier que sur un intervalle relativement restreint, $[-15\,;15]$ faisant l'unanimité. « Donc, ça devrait être comme ça partout ! » Et la conjecture est posée, $f(x) = 4$ pour tout réel x. La démonstration prend trois minutes[3] et achève de

(3) Le calcul est particulièrement simple, mais je crains qu'il ne soit de plus en plus ambitieux d'attendre des élèves qu'ils voient la différence de deux carrés, et qu'en plus les facteurs obtenus se simplifient, sans aucun calcul posé. D'ailleurs, pour le calcul, aucun élève n'a cherché à factoriser. Simplifier une expression étant trop souvent synonyme, pour eux, de développer. Cet exercice vous conduira donc, avec une probabilité assez grande, à mener ce genre de discussion.

convaincre les récalcitrants.

Ce petit exercice technique nous a permis, grâce à sa formulation, d'aborder différents types de questions. Celles touchant à la compréhension des matériels utilisés ne sont pas négligeables car elles affinent le regard critique que les élèves peuvent avoir sur ceux-ci. Elles ont aussi conforté la notion de conjecture et la réflexion sur ce qui, en amont, nous permettra de valider ou d'invalider certains résultats. Bien qu'imprévu, ce débat aura certainement construit chez les élèves des pistes de réflexion sur la façon d'aborder certains problèmes à l'aide des outils numériques.

J'aime bien ressortir de cours après une séance comme celle-là ! C'était beaucoup plus intéressant que le banal « Prouver que $\left(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}\right)^{2}-\left(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}\right)^{2}=4$ ».

3. Comment un exercice peut en cacher un autre (Dominique Baroux)

Mardi 26 février 2013, c'est le soir, veille de la troisième journée du stage IREM Paris 7 sur l'algorithmique. Je jette un coup d'œil sur mon exposé sur les exercices d'algorithmique présents dans les épreuves du baccalauréat S 2012. L'analyse des sujets Métropole et Asie et Pondichéry est au point, mais celle qui concerne le sujet Centres étrangers ne me satisfait pas. Voici l'énoncé :

On considère la suite (I_n) définie pour n entier naturel non nul par :

$$\mathrm{I}_n=\int_0^1 x^n\,\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

1. (a) Soit g la fonction définie par $g(x)=x\,\mathrm{e}^{x^2}$.

   Démontrer que la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{G}(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction g.
   (b) En déduire la valeur de I_1.
   (c) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que, pour tout entier n, supérieur ou égal à 1, on a :

$$\mathrm{I}_{n+2}=\frac{1}{2}\mathrm{e}-\frac{n+1}{2}\mathrm{I}_n.$$

(d) Calculer I_3 et I_5.

2. On considère l'algorithme suivant :

Initialisation	Affecter à n la valeur 1 Affecter à u la valeur $\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}$

	Tant que $n < 21$ Affecter à u la valeur $\frac{1}{2}e - \frac{n+1}{2}u$ Affecter à n la valeur $n + 2$
Sortie	Afficher u

Quel terme de la suite (I_n) obtient-on en sortie de cet algorithme ?

3. (a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $I_n \geq 0$.
   (b) Monter que la suite (I_n) est décroissante.
   (c) En déduire que la suite (I_n) est convergente. On note l sa limite.

4. Dans cette question *toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation*.
Déterminer la valeur de l.

L'algorithme semble parachuté dans cet exercice. Pour lui donner du sens on pourrait introduire une variante dans la question 2 et demander aux élèves de modifier l'algorithme pour qu'il retourne tous les termes de rang impair jusqu'à I_{21}. Après l'avoir implémenté (par exemple sur Algobox), les élèves pourraient conjecturer que la suite est décroissante et converge vers zéro. Voilà un bel exercice ! Si un élève, poussé par le démon de la curiosité, a l'idée d'explorer jusqu'à 45, voici ce qui apparaîtra sur l'écran de son ordinateur (les nombres entiers indiquent le rang du terme et les nombres décimaux immédiatement au-dessous le terme correspondant) :

```
3
0.5
5
0.35914091
7
0.28171817
9
0.23226823
11
0.19779977
13
0.17234227
15
0.15274582
17
0.13718077
19
0.12451395
21
0.1140014
23
0.10512557
```

```
25
0.097634087
27
0.089897778
29
0.10057203
31
-0.14943949
33
3.7501728
35
-62.393797
37
1124.4475
39
-21363.143
41
427264.22
43
-8972547.3
45
1.9739604e+8
```

Visiblement ça déraille à partir de l'indice 29. Dans le groupe IREM, des arguments faisant intervenir des connaissances sur le codage des nombres ont été avancés pour expliquer ce phénomène. Je ne maîtrise pas bien l'informatique et aborder ce sujet en stage me gêne. Le doute s'installe : vais-je évoquer le sujet Centres étrangers ? Le plus simple et le plus sage serait de s'abstenir. D'un autre côté, il me paraît intéressant d'exhiber cet exemple en formation ; il va enrichir notre propos sur la nécessaire distinction à établir entre algorithmique et programmation.

Reprenons. La machine calcule les termes de rang impair. Après une petite transformation d'écriture, le problème se ramène à l'étude de la suite (K_n) suivante :

$\mathrm{K}_0 = 0{,}5\mathrm{e} - 0{,}5$ et $\mathrm{K}_{n+1} = 0{,}5\mathrm{e} - (n+1)\,\mathrm{K}_n$ (obtenue en posant $\mathrm{K}_n = \mathrm{I}_{2n+1}$).

D'une part cette suite converge vers 0 (comme suite extraite d'une suite qui tend vers 0) et d'autre part, lorsqu'on implémente un algorithme qui calcule ses termes, ce qui apparaît ne se comporte pas comme une suite qui tend vers 0. Ces deux faits se contredisent.

Un angle d'attaque s'offre : les calculs ne sont pas effectués avec le nombre e mais avec une valeur approchée de e. Je tire ce fil. En fait, ce ne sont pas les termes de la suite (K_n) qui sont calculés mais les termes de la suite (J_n) suivante :

$\mathrm{J}_0 = 0{,}5a - 0{,}5$ et $\mathrm{J}_{n+1} = 0{,}5a - (n+1)\,\mathrm{J}_n$ où a est un réel proche de e.

Je fais des essais sur tableur (on peut mettre plus de décimales qu'avec Algobox) avec les nombres 2 et 2.7 et exp(1). Aucune des suites ne se comporte comme une suite qui converge vers 0. Je regarde alors de plus près les résultats et je prends conscience d'une régularité dans les comportements : à partir d'un certain rang, toutes les suites prennent alternativement des valeurs positives et négatives et de valeur absolue de plus en plus grande.

Il faut étudier le comportement à l'infini de ces suites, et pour cela je me mets à chercher une expression du terme général. Rien ne vient.

Je calcule alors les premiers termes en fonction de a, ce qui donne (on prend a différent de 0) :

$\mathrm{J}_0 = 0{,}5a - 0{,}5$
$\mathrm{J}_1 = 0{,}5a$
$\mathrm{J}_2 = 0{,}5a - 1$
$\mathrm{J}_3 = -a + 3$
$\mathrm{J}_4 = 4{,}5a - 12$
$\mathrm{J}_5 = -22a + 60$
$\mathrm{J}_6 = 132{,}5a - 360$
$\mathrm{J}_7 = -927a + 2520$
$\mathrm{J}_8 = 7416{,}5a - 20160$
……..
$\mathrm{J}_k = (-1)^k\,(\alpha_k a - \beta_k)$ pour $k \geq 2$ où (α_k) et (β_k) sont deux suites positives à termes non nuls.

Je cherche alors une expression de α_k et β_k en fonction de k. Je tripatouille les égalités un certain temps, aucun résultat.

Il se fait tard et je décide de laisser tomber. Quid des Centres étrangers pour demain ?

Plutôt que de calculer α_k et β_k séparément, je me demande alors s'il n'y a pas un lien à établir entre eux. À première vue leur quotient est plus grand que 2,5. Tiens, tiens… Je prends ma calculette et j'effectue 20160/7416,5. Résultat : 2,718263332. Je recommence pour 2520/927 et la calculatrice donne 2,718446602. Je tiens le bon bout.
Finalement :

$\mathrm{J}_k = (-1)^k \alpha_k \left(a - \dfrac{\beta_k}{\alpha_k} \right)$ pour $k \geq 2$ où (α_k) et (β_k) sont deux suites positives à termes non nuls.

Après expérimentation, on peut faire deux conjectures : $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k = +\infty$ et $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\beta_k}{\alpha_k} = \mathrm{e}$.

Donc, si a est différent de e alors la suite $(|\mathrm{J}_k|)$ tend vers $+\infty$.

Si a est égal à e on sait d'après l'étude faite dans l'exercice que la suite (J_k) converge vers zéro.
Ce qu'on observe sur Algobox et tableur est donc conforme au comportement de la suite que l'on entre, car ces logiciels ne peuvent utiliser la valeur exacte de e. Sur ce, je vais me coucher. Mes conclusions s'appuient sur deux conjectures, mais mes arguments seront convaincants.

Voilà un beau problème de recherche à présenter dans nos classes, d'autant plus qu'on peut lui trouver des prolongements : que se passe-t-il lorsqu'on remplace 0,5 par un réel m quelconque ? Existe-t-il quelque chose d'analogue lorsqu'on remplace le nombre e dans l'intégrale par un réel α strictement positif quelconque ?

L'introduction de l'algorithmique dans les programmes réactualise des questions qui ont déjà fait l'objet d'une abondante littérature au moment de l'introduction des calculatrices. Et cet exercice précisément, c'est de l'histoire ancienne. En effet j'ai retrouvé, grâce à Fabrice VANDEBROUCK, directeur de l'IREM de Paris 7 qui ne jette rien, un article de l'APMEP datant de juin 1983, qui traite entre autre des effets cumulés des erreurs lorsqu'on calcule sur une T.I.58 les termes de la suite $u_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$ (il s'agit du numéro 339 et l'article s'intitule « les réels et la calculatrice : une récurrence rebelle au calcul »). Cet article est lui-même cité dans un texte de Christian VASSARD et Didier TROTOUX (encore merci Fabrice) paru lui aussi dans un bulletin de l'APMEP en 1998 (n°415) sous le titre « Erreurs d'arrondis et calculatrices ». Ils étudient la suite définie par : $u_0 = \mathrm{e} - 1$ et $u_{n+1} = (n + 1)\, u_n - 1$ pout tout entier n et analysent les erreurs d'arrondis suivant l'outil de calcul utilisé.
Pour finir je vous dévoile la forme du terme général de la suite (J_n) :

$\mathrm{J}_n = (-1)^n n! \left(\mathrm{J}_0 + 0{,}5a \sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!} \right)$ pour tout entier n supérieur ou égal à 1

À vos stylos !