Exercices de ci, de là

Cette rubrique est faite à partir des propositions de collègues. Elle accueille bien volontiers des exercices même « modestes » mais un peu curieux imaginés ou rencontrés par les collègues soit dans des livres, soit dans des situations exploitées dans leurs classes. N'hésitez donc pas à nous envoyer les exercices piochés « de-ci de-là » qui vous ont plu ou vous ont intrigués. Nous les accepterons avec plaisir et en particulier ceux qui pourraient être mis à la portée d'élèves du secondaire.

Les propositions d'exercices ou les solutions sont à envoyer par mél à :

bruno.alaplantive@free.fr

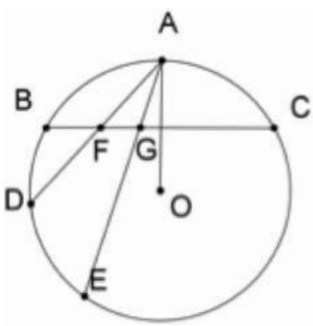
ou par courrier à :

Jean Fromentin
17 rue de la Roussille
79000 NIORT

Pour l'envoi des propositions et des solutions, privilégiez, si possible, le courrier électronique. Si vous le pouvez, joignez à votre fichier initial une copie au format PDF pour contrôler en particulier les formules qui sont souvent perturbées d'un logiciel à l'autre. Vous faciliterez ainsi notre tâche. Merci d'avance.

Exercices

Exercice 505 - 1 Jean-Yves Hély – Rennes *issu du Baccalauréat séries scientifiques, Lyon 19.. (?)*



Étant donné sur une circonférence dont le centre est O, un arc BC, du milieu A de cet arc, on mène les deux autres sécantes AFD et AGE.

Démontrer que l'on a

$$\mathrm{FE} \times \mathrm{DG} = \mathrm{DF} \times \mathrm{GE} + \mathrm{FG} \times \mathrm{DE}.$$

Exercice 505 - 2 Jean-Pierre Friedelmeyer – Strasbourg

Trouver toutes les paires de fractions $\left\{\frac{p}{q};\frac{r}{s}\right\}$, avec p, q, r, s entiers naturels non nuls,

telles que $\frac{p}{q}\times\frac{r}{s}=\frac{p}{q}+\frac{r}{s}$.

Exercice 505 - 3 Raymond Heitz – Piriac

On donne dans le plan une droite (D) et deux points A et B situés hors de (D) du même côté de (D). Construire un cercle passant par A et B et découpant sur (D) un segment de longueur donnée.

Exercice 505 - 4 Noel Ard – Pise

La suite (v_n) est définie pour tout entier naturel non nul par

$$v_n = u_n \times 10^{-n-1}$$

où u_n désigne le n-ième terme de la suite de Fibonacci.

Prouver que la somme des termes de (v_n) est égale à $\dfrac{1}{89}$.

n	
1	0,01
2	0,001
3	0,0002
4	0,00003
5	0,000005
6	0,0000008
7	0,00000013
8	0,000000021
	0,01123595…

Solutions

Exercice 503-1 Daniel Reisz-Auxerre

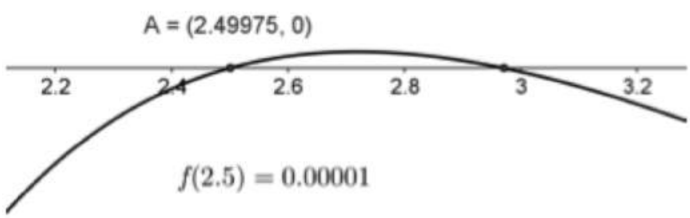
$2^{\left[(5/2)^{2/5}\right]}$ n'est certes pas égal à e, mais … il s'en faut de moins d'un cent millième comme le montre le logiciel Maxima :

```
(%i1) bfloat(exp(1)-(2^((5/2)^(2/5))));
(%o1) -9.16653390170552b-6
```

Est-ce là pur hasard ou y a-t-il une explication ?.

Solutions : Jean-Yves Hély (Rennes), Daniel Reisz (Auxerre)

• Voici la solution de Jean-Yves Hély.
Je joins juste ce que l'on obtient comme courbe pour l'étude de la fonction f définie, pour tout $x > 0$, par $f(x) = 2^{\left(x^{\left(\frac{1}{x}\right)}\right)} - \mathrm{e}$.
Le maximum est atteint pour $x = \mathrm{e}$.
La courbe, obtenue à l'aide du logiciel Geogebra, montre que la fonction f s'annule pour deux valeurs de x : l'une effectivement est très proche de 2,5 alors que l'autre est assez proche de 3.



Remarque. L'équation $2^{\left(x^{\left(\frac{1}{x}\right)}\right)} = \mathrm{e}$ n'admet pas de solution d'ordre algébrique. C'est ce qui motive l'étude de la fonction f.

Exercice 503-2 *proposé par l'équipeMayhem de la revue canadienne Crux Mathematicarum*

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal, on considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des points de coordonnées (x ; y) qui vérifient

$$x^2 + y^2 - 22x - 4y + 100 = 0.$$

Soit P un point de $\mathcal{E}$ pour lequel le rapport $\frac{y}{x}$ est le plus grand.

Montrer l'unicité de P et déterminer sa distance à l'origine.

Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Jean Gounon (Chardonnay), Michèle Malléus (Châtenay-Malabry), Raymond Heitz (Piriac), Georges Lion (Wallis), Jean-Yves Hély (Rennes).

Voici la solution de Michèle Malléus.

L'ensemble $\mathcal{E}$ des points de coordonnées (x;y) qui vérifient

$$x^2 + y^2 - 22x - 4y + 100 = 0. \qquad (1)$$

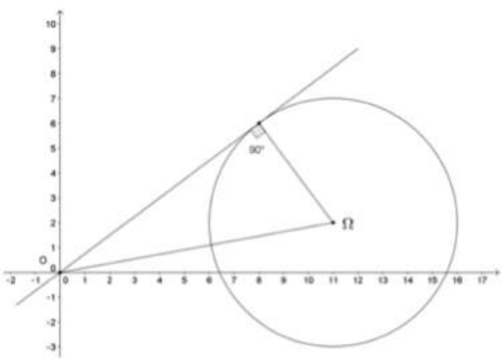
est l'ensemble des points du cercle d'équation

$$(x-11)^2 + (y-2)^2 = 25.$$

Ce cercle a pour centre Ω (11 ; 2) et pour rayon 5.

Solution géométrique :

Quand on coupe le cercle par une droite issue de O, on obtient deux points ; $\frac{y}{x}$ atteint sa plus grande valeur quand la droite est tangente au cercle et il y alors un seul point P qui est le point de contact de ce cercle avec la tangente issue de O dans le demi-plan $x \geq 0$.



Le triangle OPΩ est rectangle en P et on cherche à calculer OP :

$$OP^2 = O\Omega^2 - \Omega P^2 = 125 - 25 = 100.$$

La distance de P à l'origine est 10.

Remarque. Michèle Malléus et Jean Gounon proposent également une solution analytique.

Exercice 503-3 Jean Théocliste – Valence *à proposer à nos élèves*

A.

```
(%i1) A=2*(cos(x)^6+sin(x)^6)-3*(cos(x)^4+sin(x)^4);
(%o1) A=2(sin(x)^6+cos(x)^6)-3(sin(x)^4+cos(x)^4)
(%i2) trigsimp(%);
(%o2) A=-1
```

Prouver de deux façons le résultat ci-dessus, obtenu à l'aide d'un logiciel de calcul formel, dans lequel x désigne un réel quelconque :

1) En considérant la fonction $f : x \mapsto 2\left((\cos x)^6 + (\sin x)^6\right) - 3\left((\cos x)^4 + (\sin x)^4\right)$ définie pour tout réel x.

2) Par un autre moyen.

B. Divergence de la série harmonique

Montrer que pour tout entier naturel n ($n \geq 2$), on a

$$\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} > \frac{3}{n}.$$

Une preuve de la divergence de la série harmonique commence par

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots$$
$$= 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}\right) + \dots$$

etc. Terminer la démonstration.

Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Georges Lion (Wallis), Jean-Yves Hély (Rennes), Daniel Vacaru (Roumanie).

• **A.** Voici la solution de Pierre Renfer.

1) Calculons la dérivée de f :

$$f'(x) = 12\sin(x)\cos(x)\left(\sin(x)^4 - \cos(x)^4 + \cos(x)^2 - \sin(x)^2\right) = 0$$

car

$$\sin(x)^4 - \cos(x)^4 = \left(\sin(x)^2 + \cos(x)^2\right)\left(\sin(x)^2 - \cos(x)^2\right) = \sin(x)^2 - \cos(x)^2.$$

On en déduit que la fonction f est constante et cette constante est $f(0) = -1$.

2) Autre méthode

$$\cos(x)^6+\sin(x)^6=\left(\cos(x)^2+\sin(x)^2\right)\left(\cos(x)^4-\cos(x)^2\sin(x)^2+\sin(x)^4\right)$$
$$=\cos(x)^4-\cos(x)^2\sin(x)^2+\sin(x)^4.$$

Donc

$$f(x)=-\left(\cos(x)^4+\cos(x)^2\sin(x)^2+\sin(x)^4\right)=-\left(\cos(x)^2+\sin(x)^2\right)^2=-1.$$

• **B.** Voici la solution de Jean-Yves Hély.

Étant acquis que pour tout entier naturel n ($n \geq 2$), on a

$$\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}>\frac{3}{n}.$$

$$\begin{aligned}
S_n &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\ldots\\
&= 1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}\right)+\ldots\\
&> 1+\frac{3}{3}+\frac{3}{6}+\frac{3}{9}+\ldots\\
&= 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots
\end{aligned}$$

Supposons que S_n ait une limite finie s quand n tend vers l'infini.

On aurait alors $s \geq 1 + s$, ce qui est absurde.
Le raisonnement par l'absurde nous montre que la série harmonique n'a pas de limite finie quand n tend vers l'infini.

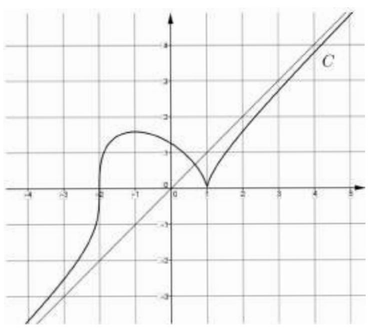
Nota. Ainsi que le mentionne Jean-Yves Hély, cette démonstration de la divergence de la série harmonique est due au prêtre italien Pietro Mengoli vers 1650.

Exercice 503-4 Paul Aubert – Paris

Sur la figure ci-contre, C est la courbe représentative d'une fonction définie par une seule et même formule sur tout l'ensemble $\mathbb{R}$.

On peut tenir pour exacts les renseignements que l'on peut lire sur le graphique.

Trouver l'expression de la fonction.



Solutions : Georges Lion (Wallis), Georges Guenim (Roufiac), Michèle Malléus (Châtenay-Malabry), Raymond Heitz (Piriac), Jean-Yves Hély (Rennes).

• Voici in extenso (!) la solution de Raymond Heitz.

La courbe est une cubique avec rebroussement.
Elle correspond à la fonction

$$f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)} = \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}.$$

(Cf ce bon vieux « Aubert et Papelier. Exercices d'algèbre, etc. », p.101).
Homonymie avec l'auteur de la question.

Remarques. Effectivement, l'homonymie est forte !!! L'exemplaire du manuel édité chez Vuibert, *à l'usage des élèves de Mathématiques Supérieures, de première année de Mathématiques Spéciales et des étudiants de Mathématiques Générales*, que je détiens, est daté de 1948.
Je chipoterais bien en faisant remarquer que la courbe est en page 102, mais ce serait être mauvais joueur …

Georges Guenim, lui, me fait part de la présence du même exercice dans le Lebossé Hémery (Terminales C, D et T Programme 1966).

Pour Louis-Marie Bonneval, relecteur et correcteur des coquilles de la rubrique, cette figure évoque, après rotation de 3/8 de tour dans le sens indirect, les courbes voluptueuses chères à Pierre Gallais : http://www.institutdemathologie.fr/