Les problèmes de l'APMEP

Les propositions de problèmes, solutions ou commentaires, sont à envoyer à

Max HOCHART
13, rue des Garennes
63 800 Cournon d'Auvergne
ou
hochartmax@yahoo.fr

Énoncés des nouveaux problèmes

Problème 506–1 (Jean-Louis Trinquand (Clermont-Ferrand))

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $f(1) > 0$ et pour tous $m, n \in \mathbb{N}$,

$$f\left(m^2+n^2\right)=f\left(m\right)^2+f\left(n\right)^2.$$

Trouver f.

Problème 506–2 (Michel Lafond (Dijon))

Montrer que l'on définit une bijection de $\mathbb{N}^3$ dans $\mathbb{N}$ en posant

$$f\left(a,b,c\right)=\frac{1}{6}\left(\left(a+b+c\right)^3+3\left(a+b+c\right)^2+3\left(b+c\right)^2+2a+5b+11c\right).$$

Problème 506–3 (George Gras (Le Bourg d'Oisans))

Soit p un nombre premier tel que $p \equiv -1 \bmod 8$. On considere une solution $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ de l'équation de Pell Fermat :

$$x^2-py^2=1.$$

Montrer que 8 divise x ou y. Dans le second cas (où 8 divise y), montrer que (x, y) est donné par une relation de la forme

$$x+y\sqrt{p}=\pm\left(u+v\sqrt{p}\right)^2$$

avec $u, v \in \mathbb{Z}$.

Problème 506–4 (Fernand Canonico (Clermont-Ferrand))

Calculer la somme suivante :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n!}{1\times3\times5\times\cdots\times\left(2n+1\right)}.$$

Solutions des problèmes antérieurs

Problème 501–1 (Franck Gautier, Pérignat lès Sarliève)

Montrer que le produit de huit entiers consécutifs non nuls ne peut être un carré parfait.

Réponses de Pierre Bernat (St Benoît), Hélène Brion (Clamart), Bernard Collignon (Coursan), Franck Gautier (Pérignat les Sarliève), Gilbert Gribonval, Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques) et Vincent Thill (Migennes)

Les lecteurs ont eu des idées bien différentes. Puisqu'il faut faire un choix, voici deux approches : l'une, due à **Hélène Brion**, n'utilise que de l'arithmétique élémentaire. L'autre est celle de **Franck Gautier**, auteur de la question.

Suivant **Hélène Brion**, on note n_1, n_2, …, n_8 les huit entiers consécutifs et $f(n_1)$ leur produit. Dans un premier temps, on démontre que si $n_1 \leq 9$ alors $f(n_1)$ n'est pas un carré. Parmi les huit entiers consécutifs, il y a quatre nombres impairs, deux nombres s'écrivant 2I où I est impair, un nombre s'ecrivant 4I où I est impair et un multiple de 8. Si $f(n_1)$ est un carré alors ce multiple de 8 doit être un multiple de 16, ce qui ne se produit pas si $n_1 = 1$, …, 8. Quant à $f(9)$, il possède dans sa décomposition en facteurs premiers le facteur 11 à l'exposant 1, ce n'est donc pas un carré.

On suppose désormais que $n_1 \geq 10$ et que $f(n_1)$ est un carré. Pour tout indice i, il existe deux entiers α_i et m_i tels $n_i = \alpha_i m_i^2$, la decomposition de α_i ne comportant que des termes à l'exposant 1. Soit p un éventuel diviseur premier d'un certain n_i, $p \geq 11$. L'entier p est alors premier avec les n_j pour $j \neq$ i car $\left|n_i - n_j\right| < p$. L'entier $f(n_1)$ est un carré, donc l'exposant de p dans $f(n_1)$ et donc dans n_i est pair. Les facteurs premiers de α_i sont ainsi 2, 3, 5 ou 7 et α_i appartient à l'ensemble

$$\{1,2,3,5,6,7,10,14,15,21,30,35,42,70,105,210\}.$$

On a choisi n_1 suffisamment grand pour être sûr que $\alpha_i \neq \alpha_j$ si $i \neq j$. En effet, raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe $i < j$ tels que $n_i = \alpha_i m_i^2$ et $n_j = \alpha_i m_j^2$. Alors

$$n_j - n_i = \alpha_i\left(m_j^2 - m_i^2\right) \geq \alpha_i\left(2m_i + 1\right).$$

Or $n_i \geq 10$ donc $m_i \geq \sqrt{10/\alpha_i}$ et

$$\alpha_i\left(2m_i + 1\right) \geq \sqrt{\alpha_i}\left(2\sqrt{10} + \sqrt{\alpha_i}\right) \geq 2\sqrt{10} + 1 > 7.$$

Ce réesultat est absurde car $n_j - n_i \leq 7$.

Les α_{i} sont donc huit entiers différents pris parmi

$$\{1,2,3,5,6,7,10,14,15,21,30,35,42,70,105,210\}.$$

Quatre d'entre eux au plus sont à prendre dans l'ensemble $\{1,2,3,6\}$ donc quatre d'entre eux au moins sont à prendre dans l'ensemble

$$\{5,7,10,14,15,21,30,35,42,70,105,210\}$$

qui ne contient que des multiples de 5 et de 7. Or parmi les huit nombres consécutifs on a au plus deux multiples de 5 et au plus deux multiples de 7. Nécessairement, la liste des α_i est donc constituée des quatre nombres 1, 2, 3, 6, puis de deux multiples de 5 parmi 5, 10, 15, 30 et enfin de deux multiples de 7 parmi 7, 14, 21, 42. Parmi les huit entiers consécutifs, on rencontre au plus trois multiples de 3, et parmi les α_i, les multiples de 3 sont en nombre pair car l'exposant de 3 dans $f(n_1)$ doit être pair. Il n'y a donc que deux multiples de 3 dans la liste des α_i qui sont nécessairement 3 et 6. Les autres multiples de 3 sont donc à éliminer. L'ensemble des α_i est donc

$$\{1,2,3,5,6,7,10,14\}.$$

Pour des questions de distance entre deux multiples, on sait que n_1 et n_8 doivent être les multiples de 7 et n_2 et n_7 les multiples de 5. Donc n_1 ou n_8 s'écrit $7m^2$ et est voisin d'un multiple de 5. Or m^2 est congru à 0, 1, ou 4 modulo 5 et $7m^2$ est congru à 0, 2 ou 3 modulo 5, ce qui ne lui permet pas d'être voisin d'un multiple de 5. Ces deux affirmations sont contradictoires, donc $f(n_1)$ ne peut pas être un carré parfait.

Voici maintenant la solution proposée par **Franck Gautier**. Posons

$$\mathrm{P}=(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4).$$

Pour $n=4, 5, 6$ on vérifie facilement que P n'est pas un carré parfait (en remarquant par exemple que la valuation de 7 dans P est égale à 1). Pour $n \geq 7$, on va intercaler (strictement) P entre deux carrés parfaits consécutifs. En développant convenablement P, on obtient

$$\mathrm{P}=\left(n^2-3n\right)\left(n^2-3n+2\right)\left(n^2+5n+4\right)\left(n^2+5n+6\right)$$

puis en factorisant

$$\mathrm{P}=\left(\left(n^2-3n+1\right)^2-1\right)\left(\left(n^2+5n+5\right)^2-1\right).$$

De l'identité

$$\left(a^2-1\right)\left(b^2-1\right)=(ab-1)^2-(a-b)^2,$$

résulte l'inégalité :

$$\mathrm{P}<\left[\left(n^2-3n+1\right)\left(n^2+5n+5\right)-1\right]^2.$$

Il s'agit maintenant de montrer que pour $n \geq 7$,

$$\mathrm{P}>\left[\left(n^2-3n+1\right)\left(n^2+5n+5\right)-2\right]^2.$$

En posant

$$a = n^2 - 3n + 1 \text{ et } b = n^2 + 5n + 5,$$

on doit donc établir

$$\left(a^2 - 1\right)\left(b^2 - 1\right) > \left(ab - 2\right)^2,$$

soit

$$2ab - \left(a - b\right)^2 - 3 > 0,$$

c'est-a-dire

$$2\left(n^2 - 3n + 1\right)\left(n^2 + 5n + 5\right) - \left(8n + 4\right)^2 - 3 > 0,$$

soit encore

$$2n^4 + 4n^3 - 82n^2 - 84n > 9,$$

soit enfin

$$2n\left[n\left(n^2 - 41\right) + 2\left(n^2 - 21\right)\right] > 9.$$

Or cette dernière inégalité est évidente si $n > 7$.

Problème 501–3

Soit p un nombre premier. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note a_n le nombre d'éléments d'ordre p du groupe symétrique S_n. Calculer la série entière

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{n!} x^n.$$

Réponse de Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques) et Lazard George Vidiani (Fontaine Les Dijon)

Pierre Renfer s'intéresse plus à la suite $1 + a_n$ (puisqu'il considère qu'il vaut mieux ajouter l'identité parmi les éléments du groupe symétrique vérifiant $a^p = \text{id}$). Hormis ce détail, sa solution est sensiblement celle exposée ci-dessous.

La série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{n!} x^n$ a un rayon de convergence au moins égal à 1 puisque l'on a facilement l'encadrement

$$0 \leq a_n \leq n!.$$

De plus, si $n < p$ alors $a_n = 0$.

On cherche maintenant une relation entre a_{n+1} et les a_k pour $k \leq n$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\sigma \in S_{n+1}$ d'ordre p.

Si $\sigma(n + 1) = n + 1$, alors on peut voir σ comme un element de S_n d'ordre p, et il y a a_n choix pour σ.

Sinon, $n + 1$ appartient a un cycle de longueur p (puisque p est premier) qui apparaît dans la décomposition de σ en cycles à supports disjoints. Pour compléter l'orbite de

$n+1$, il faut choisir $p-1$ éléments parmi n, soit $\binom{n}{p-1}$ choix, et les ordonner de $(p-1)!$ façons. Ensuite, il faut compléter σ par une permutation de $n+1-p$ éléments, d'ordre 1 ou p, ce qui donne $1+a_{n+1-p}$ choix.
Ainsi,

$$a_{n+1}=a_n+(p-1)\binom{n}{p-1}\left(1+a_{n+1-p}\right).$$

En posant $b_n=\dfrac{a_n}{n!}$ et en divisant la relation précédente par $n!$, on obtient

$$(n+1)b_{n+1}=b_n+b_{n+1-p}+\frac{1}{(n+1-p)!}.$$

On multiplie par x^n pour $|x|<1$ pour le moment, et l'on somme :

$$\sum_{n=p-1}^{\infty}(n+1)b_{n+1}x^n=\sum_{n=p-1}^{\infty}b_nx^n+\sum_{n=p-1}^{\infty}b_{n+1-p}x^n\sum_{n=p-1}^{\infty}\frac{1}{(n+1-p)!}x^n,$$

soit encore, en notant f la série donnée dans l'énoncé,

$$f'(x)=f(x)+x^{p-1}f(x)+x^{p-1}\,\mathrm{e}^x.$$

On résout donc l'équation différentielle

$$f'(x)=\left(1+x^{p-1}\right)f(x)+x^{p-1}\,\mathrm{e}^x.$$

Les solutions de l'équation homogène

$$f'(x)=\left(1+x^{p-1}\right)f(x)$$

sont de la forme

$$f(x)=\lambda\exp\left(x+\frac{x^p}{p}\right)\qquad(\lambda\in\mathbb{R}).$$

Par la méthode de la variation de la constante, on cherche les solutions de l'équation complète sous la forme

$$f(x)=\lambda(x)\exp\left(x+\frac{x^p}{p}\right)$$

avec

$$\lambda'(x)=x^{p-1}\exp\left(-\frac{x^p}{p}\right),$$

donc

$$\lambda(x)=-\exp\left(-\frac{x^p}{p}\right)+\mathrm{A}.$$

Ainsi, les solutions sont

$$f(x) = \mathrm{A}\exp\left(x + \frac{x^p}{p}\right) - \mathrm{e}^x .$$

Comme $f(0) = b_0 = a_0 = 0$, on a finalement $\mathrm{A} = 1$ et

$$f(x) = \exp\left(x + \frac{x^p}{p}\right) - \mathrm{e}^x .$$

Lazard George Vidiani donne une quantité impressionnante de références pour ce problème. Signalons simplement le livre de **Louis Comtet**, « Analyse combinatoire », paru en 1970 aux Presses Universitaires de France où l'on trouve dans le second tome un chapitre sur les permutations. On consultera en particulier les pages 99-100, exercice 9.