Exercices de ci, de là

Cette rubrique est faite à partir des propositions de collègues. Elle accueille bien volontiers des exercices même « modestes » mais un peu curieux imaginés ou rencontrés par les collègues soit dans des livres, soit dans des situations exploitées dans leurs classes. N'hésitez donc pas à nous envoyer les exercices piochés « de-ci de-là » qui vous ont plu ou vous ont intrigués. Nous les accepterons avec plaisir et en particulier ceux qui pourraient être mis à la portée d'élèves du secondaire.

Les propositions d'exercices ou les solutions sont à envoyer par mél à :

bruno.alaplantive@free.fr

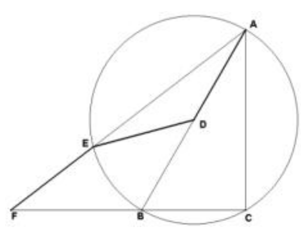
ou par courrier à :

Jean Fromentin
17 rue de la Roussille
79000 NIORT

Pour l'envoi des propositions et des solutions, privilégiez, si possible, le courrier électronique. Si vous le pouvez, joignez à votre fichier initial une copie au format PDF pour contrôler en particulier les formules qui sont souvent perturbées d'un logiciel à l'autre. Vous faciliterez ainsi notre tâche. Merci d'avance.

Exercices

Exercice 506 - 1 Jean-Pierre Friedelmeyer – Osenbach. *Une duplication du cube sur une idée de Claude Comiers*



Le triangle ABC est rectangle en C, d'hypoténuse AB double du côté BC et de milieu D. Une droite issue de A coupe la demi - droite [CB) en F et le cercle de diamètre [AB] en E tels que AD = DE = EF.

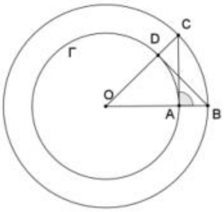
Démontrer que $BF^3 = 2BC^3$.

Exercice 506 - 2 Marie-Nicole Gras – Le Bourg d'Oisans *d'après les Olympiades suédoises 1982*

On considère un quadrilatère convexe ABCD et on suppose qu'il existe à l'intérieur de ce quadrilatère un point P tel que les aires des quatre triangles PAB, PBC, PCD et PDA soient égales.
Caractériser de tels quadrilatères et préciser la position du point P.

Exercice 506 - 3 Georges Lion – Wallis

La figure ci-contre illustre l'idée d'Euclide dans III.17 pour construire la tangente menée de B au cercle Γ.



Généraliser l'idée d'Euclide pour construire les tangentes communes à deux cercles de centres O et O′, de rayons R et R′ tels que OO′ > R + R′ > 2R′, dont les points de contact avec le grand cercle sont d'un même côté de la droite (OO′).

Exercice 506 - 4 *pioché de-ci, de-là*

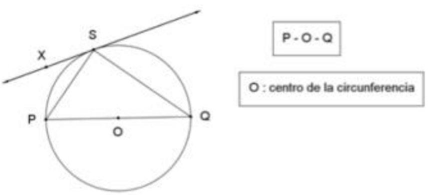
Soient deux entiers naturels n et m tels que $n \geq m^2 \geq 16$. Prouver que $2^n \geq n^m$.

Solutions

Exercice 504-1 español

A. Prueba de Bachillerato – Mayo 2012

Considere la siguiente figura :



De acuerdo con los datos de figura, si XS es tangente a la circunferencia en S y

m∡ QPS=55°, entonces, m∡ PSX es
A) 35° B) 45° C) 55° D) 70°

B. Juan Antonio Trejo Peña, Universidad autonoma de Yucatan

- Los pesos de sandías maduras cultivadas en un huerto están distribuidas normalmente con desviación estándar de 1.2 kg. Obtenga el peso medio de las sandías maduras si solo 3% pesa menos de 7.5 kg.
- Una pistola de radar mide la velocidad de los lanzamientos que hacen los pichers de un equipo de beisbol durante un mes de juego. Estos lanzamientos se distribuyen normalmente con velocidad promedio de 85 millas por hora. Cuál es la desviación estándar si el 30% de los lanzadores tiran velocidades superiores a las 92 mi/hr.

Solutions : Jean-Paul Thabaret (Grenoble), Michèle Malléus (Châtenay-Malabry), Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques),

• Voici les solutions de Jean-Paul Thabaret.

A. Réponse A).

Les angles $\widehat{OPS}$ et $\widehat{OSP}$ sont égaux (angles à la base dans un triangle isocèle).

Donc $\widehat{OSP} = 55°$. Comme l'angle $\widehat{OSX}$ est un angle droit,

$$\widehat{PSX} = 90° - \widehat{OSP} = 90° - 55° = 35°.$$

B. • Il s'agit de trouver la moyenne m d'une variable aléatoire X suivant une loi normale d'écart-type 1,2 sachant que 3% des observations sont inférieures ou égales à 7,5.

Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = \dfrac{X - m}{1,2}$. La loi de Y est la loi normale centrée réduite.

La probabilité de l'événement (X ≤ 7,5) est égale à la probabilité de l'événement $\left(Y \leq \dfrac{7,5 - m}{1,2}\right)$ donc la probabilité de l'événement $\left(Y \leq \dfrac{7,5 - m}{1,2}\right)$ est 0,03.

Une table de la loi normale centrée réduite indique que la probabilité de l'événement (Y ≤ 1,88) est peu différente de 0,97 ; donc la probabilité de l'événement (Y ≤ -1,88) est peu différente de 0,03.

On peut donc considérer que $\dfrac{7,5 - m}{1,2} \approx -1,88$ et donc que $m \approx 7,5 + 1,2 \times 1,88$.

La moyenne m cherchée est donc $m \approx 9,76$.

• Il s'agit de trouver l'écart-type σ d'une variable aléatoire X suivant une loi normale de moyenne 85 sachant que 30% des observations sont supérieures ou égales à 92.

Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = \dfrac{X - 85}{\sigma}$. La loi de Y est la loi normale centrée réduite.

La probabilité de l'événement (X ≥ 92) est égale à la probabilité de l'événement $\left(Y \geq \dfrac{7}{\sigma}\right)$; donc la probabilité de l'événement $\left(Y \geq \dfrac{7}{\sigma}\right)$ est 0,3.

Une table de la loi normale centrée réduite indique que la probabilité de l'événement (Y ≤ 0,525) est peu différente de 0,7 donc la probabilité de l'événement (Y ≥ 0,525) est peu différente de 0,3.

On peut donc considérer que $\dfrac{7}{\sigma} \approx 0,525$. L'écart-type cherché σ est donc ≈13,33.

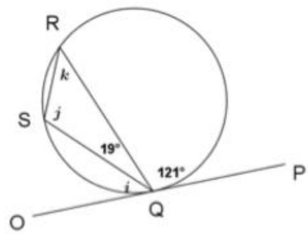
Remarque.

Contrairement à Jean-Paul Thabaret, je ne dispose pas des « tables de la loi ». J'utilise la répartition inverse fournie par ma calculatrice et j'obtiens
pour le premier calcul : −1.880793608 → 7.5 − 1.2 × ans → 9.75695233 ;
pour le second : 0.5244005127 → 7/ans → 13.34857581.

Exercice 504-2 english

Everything Maths, Grade 12 Mathematics, Siyavula, Republic of South Africa

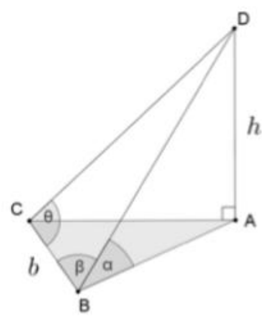
A. Find the values of the unknown letters



B. D is the top of a tower of height h. Its base is at A. The triangle ABC lies on the ground (a horizontal plane).

If we have that BC = b, $D\hat{B}A = \alpha$, $D\hat{B}C = \beta$ and $D\hat{C}B = \theta$, show that

$$h = \frac{b \sin\alpha \sin\theta}{\sin(\beta + \theta)}.$$



Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Jean-Paul Thabaret (Grenoble), Jean Gounon (Chardonnay), Michel Sarrouy (Mende), Daniel Văcaru (Pitești, Roumanie).

- Voici les solutions de Jean Gounon.

A. On a successivement, en degrés :

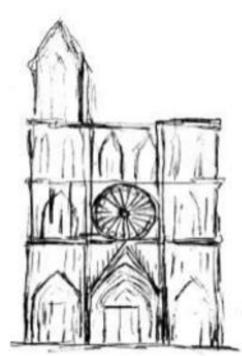
$i = 180 - 121 - 19 = 40$; $k = i$ donc $k = 40$; $j = 180 - 19 - k = 121$.

B. On a $\dfrac{BD}{\sin\theta} = \dfrac{BC}{\sin(\pi - \beta - \theta)} = \dfrac{b}{\sin(\beta + \theta)}$ donc $BD = \dfrac{b \sin\theta}{\sin(\beta + \theta)}$

or h = BD sin α donc $h = \dfrac{b \sin\theta \sin\alpha}{\sin(\beta + \theta)}$.

Exercice 504-3 deutsch

Mathematik – Musteraufgaben für Jahrgang 10 (Gymnasium)



Über dem Hauptportal des Straßburger Münsters befindet sich eine gotische Fensterrosette mit dem Durchmesser von 14 m. Ihr unterer Rand ist 28 m über dem Boden.

Die Touristin Jana steht 60 m von dem Hauptportal entfernt und hält ihre Kamera in Augenhöhe von 1,50 m. Der « Sehwinkel » ist der Winkel zwischen oberem

Rosettenrand, Auge des Beobachters und unterem Rosettenrand. Berechne den Sehwinkel, unter dem Jana die Fensterrosette sieht.

En supplément je vous propose de calculer la distance à laquelle Jana doit se placer pour avoir le plus grand angle de vue (*pour nos élèves, l'inspecteur de fonction de Geogebra serait indispensable*).

Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Jean-Paul Thabaret (Grenoble), Michel Sarrouy (Mende).

• Voici la solution de Pierre Renfer.
L'énoncé suppose implicitement que Jana est dans le plan vertical $\mathcal{P}$ perpendiculaire à la rosace en son centre, et que l'angle de vue est dans ce plan.

– Calcul de l'angle

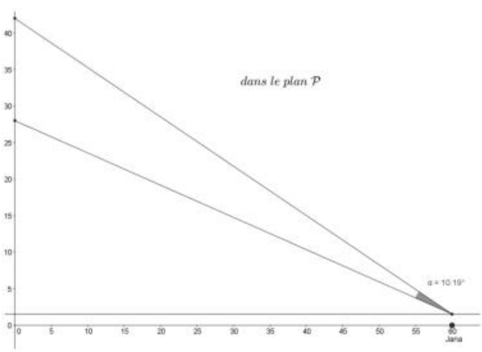
Soit α l'angle sous lequel la rosace est vue par Jana.
Soit β l'angle entre l'horizontale passant par l'œil de Jana et la droite joignant l'œil au bord supérieur de la rosace.
Soit γ l'angle entre l'horizontale passant par l'œil de Jana et la droite joignant l'œil au bord inférieur de la rosace.

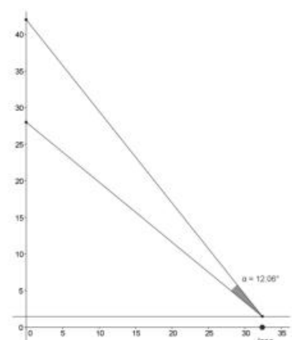
$$\tan(\beta) = \frac{40{,}5}{60} = \frac{27}{40};\ \tan(\gamma) = \frac{26{,}5}{60} = \frac{53}{120};$$

$$\tan(\alpha) = \tan(\beta - \gamma) = \frac{\tan(\beta) - \tan(\gamma)}{1 + \tan(\beta)\tan(\gamma)} = \frac{1120}{6231};$$

$$\alpha = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1120}{6231}\right).$$

En degrés, la mesure de α vaut approximativement 10° 11′.





– Angle maximal

Dans le plan $\mathcal{P}$, l'ensemble des points depuis lesquels on voit la rosace sous un même angle est un arc de cercle passant par le bord inférieur A et le bord supérieur B de la rosace (« arc capable »).

Soit D la droite horizontale à 1,5 m du sol.
Si l'arc capable coupe D en deux points M et N, l'angle ne sera pas maximal, car alors la rosace est vue sous un angle plus grand depuis un point situé entre M et N.
L'arc correspondant au maximum est donc tangent à D.
Le cercle C tangent en T à D a pour rayon R = 33,5 (distance du centre de la rosace à D).
Le segment AB est vu depuis le centre de C sous un angle θ tel que :

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)=\frac{7}{33,5}=\frac{14}{67}.$$

La distance d entre la cathédrale et le point de contact T est égale à :

$$d=R\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)=33,5\cdot\sqrt{1-\frac{14^2}{67^2}}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{4293}\approx 32,76.$$

L'angle maximal pour Jana est :

$$\frac{\theta}{2}=\text{Arcsin}\left(\frac{14}{67}\right)\approx 12°4'.$$

Nota.
En degrés décimaux, les réponses respectives à 10^{-2} près sont 10,19 et 12,06.

Remarques.
Pierre Renfer signale avoir été *particulièrement ému par l'exercice en allemand*, pour avoir *fait toute sa carrière au lycée Fustel de Coulanges, à côté de la magnifique cathédrale de Strasbourg dont la rosace est si lumineuse*.
Sa solution pour l'angle maximal l'est tout autant !!! Foin de Geogebra ou de fonction hors programme, un argument de pure géométrie suffit à retourner la valeur exacte de la distance à laquelle il faut se placer. Voilà comment l'on résout avec des connaissance de collège, un problème que je pensais n'être même pas destiné aux élèves de lycée…
Jean-Paul Thabaret et Michel Sarrouy ont tous deux étudié une fonction en Arc tangente.
La solution de Michel Sarrouy – partie 1 en allemand, partie 2 en français – en outre prolongée d'une étude de section conique, est disponible sur le site de l'association ; ainsi qu'un fichier Geogebra montrant tout de même l'utilisation pressentie.

Exercice 504-4 français

Exercice du défi ouvert canadien de mathématiques 2012

Si n est un entier positif, on dit que le n-uplet $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ où chaque x_i est un entier positif est un *super-carré* si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(1) $x_1 > x_2 > x_3 > \dots > x_n$.

(2) La somme $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2$ est un carré parfait pour chaque k entier de 1 à n.

Par exemple, (12, 9, 8) est *super-carré* car 12 > 9 > 8, et chacune des sommes 12^2, $12^2 + 9^2$, et $12^2 + 9^2 + 8^2$ est un carré parfait.

(a) Déterminer toutes les valeurs de t telles que $(32, t, 9)$ soit un *super-carré*.

(b) Trouver un 4-uplet *super-carré* (x_1, x_2, x_3, x_4) avec $x_1 < 200$.

(c) Déterminer s'il existe un 2012-uplet *super-carré*.

Solutions : Marie-Nicole Gras (Le Bourg d'Oisans), Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Raymond Heitz (Piriac), Michel Lafond (Dijon).

• Voici la solution de Michel Lafond.

(a) On cherche t pour que $(32, t, 9)$ soit un super-carré.
Il faut $32^2 + t^2 = u^2$ c'est-à-dire $(u - t)(u + t) = 1024$ et t compris entre 9 et 32.
On peut supposer t et u positifs.
$(u - t)$ et $(u + t)$ sont de même parité, donc les possibilités sont :

$u-t$	$u+t$	t
2	512	255
4	256	126
8	128	60
16	64	24

Seule $t = 24$ convient, et on vérifie que (32, 24, 9) est bien un super-carré.

(b) (132, 99, 88, 84) est un super-carré car
$132^2 + 99^2 = 165^2$
$132^2 + 99^2 + 88^2 = 187^2$
$132^2 + 99^2 + 88^2 + 84^2 = 205^2$.

Deux programmes simples donnent les super-carrés :
(144, 108, 96, 85, 60) et (924, 693, 616, 588, 492, 156) incitant à donner une réponse positive au (c).

(c) Il y a des super-carrés de toute taille, et pour démontrer cela, il suffit de démontrer qu'on peut toujours passer d'un super-carré de taille n à un super-carré de taille $n + 1$:
Supposons qu'on ait obtenu un super-carré $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ où $n \geq 2$.
On a donc

$$\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2\right) + x_n^2 = a^2 + x_n^2 = b^2. \qquad (1)$$

Il est clair que

$$a \geq 4, x_n \geq 3, b \geq 5 \qquad (2)$$

car (3, 4, 5) est le plus petit triplet pythagoricien non trivial possible.

Pour tout entier C, $(Cx_1, Cx_2, Cx_3, \ldots, Cx_n)$ est un super-carré de taille n [évident].
Prenons $C = 2(b - 1)$ et $x_{n+1} = 2b - 1$.

On a

$$(\mathrm{C}b)^2 + x_{n+1}^2 = 4b^2(b-1)^2 + (2b-1)^2 = \left(2b^2 - 2b + 1\right)^2 \tag{3}$$

On a donc d'une part par hypothèse :

Pour tout entier k de 1 à n, $(\mathrm{C}x_1)^2 + (\mathrm{C}x_2)^2 + \cdots + (\mathrm{C}x_k)^2$ est un carré parfait.

Et d'autre part d'après (1) et (3) :

$$(\mathrm{C}x_1)^2 + (\mathrm{C}x_2)^2 + \cdots + (\mathrm{C}x_n)^2 + x_{n+1}^2 = (\mathrm{C}b)^2 + x_{n+1}^2 = \left(2b^2 - 2b + 1\right)^2$$

carré parfait.
De plus C $x_n \geq 3$ C = 6 b – 6 ≥ 2 b – 1 = x_{n+1} car $x_n \geq 3$ et $b \geq 5$.
(Cx_1, Cx_2, Cx_3, … , Cx_n, x_{n+1}) est donc un super-carré de taille n + 1. CQFD.

Exemple, à partir de (4, 3) super-carré de taille 2, on a $4^2 + 3^2 = 5^2$ donc $b = 5$.
On prend C = 2 (b – 1) = 8 et $x_3 = 2b - 1 = 9$.
On obtient le super-carré de taille 3 : (4C, 3C, x_3) = (32, 24, 9) vu dans (a).
Ce dernier super-carré engendre par la même procédé le super-carré (2560, 1920, 720, 81) etc.