La construction des fonctions comme articulation de cadres et de registres : « la Nacelle », un exemple en classe de Terminale Scientifique[(*)]

Roselyne Halbert, Jean-Baptiste Lagrange,
Christine Le Bihan, Bernard Le Feuvre,
Marie Catherine Manens, Xavier Meyrier[(**)]

Introduction

Dans le programme de mathématiques de la classe de Terminale Scientifique, il est indiqué que certains thèmes se prêtent à des ouvertures interdisciplinaires :
« *Les commentaires notés ⥪ distinguent des thèmes pouvant se prêter à des ouvertures interdisciplinaires, en concertation avec les professeurs d'autres disciplines scientifiques*. »[(1)]

Le groupe Casyopée a expérimenté l'étude du mouvement physique d'une nacelle auprès d'élèves d'une classe de Terminale Scientifique. Dans un premier temps les élèves ont observé le mouvement (cadre d'un Système Physique), puis avec le logiciel Casyopée[(2)] ils ont réalisé une figure de « géométrie dynamique » (cadre de la géométrie plane et des grandeurs géométriques), puis ils ont modélisé avec l'aide du logiciel (cadre des fonctions comme entité algébrique) et enfin ils ont confronté leurs observations avec l'étude de fonctions.

La situation étudiée illustre comment des passages dans différents cadres (ou jeux de cadres) peuvent aider à créer des significations riches pour les fonctions. Pour Douady (1986) :
«… le mot « cadre » est à prendre au sens usuel qu'il a quand on parle de cadre algébrique, cadre arithmétique, cadre géométrique... Les jeux de cadres sont des changements de cadres provoqués à l'initiative de l'enseignant, à l'occasion de problèmes convenablement choisis, pour faire avancer les phases de recherche et évoluer les conceptions des élèves. »

(*) Contact : bernard.le-feuvre@ac-rennes.fr
(**) Membres du groupe de recherche Casyopée, IREM de Rennes - IFÉ
(1) Programme de l'enseignement spécifique et de spécialité de mathématiques, classe terminale de la série scientifique. B.O n°8 du 13 octobre 2011
(2) Casyopée est un logiciel libre dédiée à l'enseignement des fonctions. Site du logiciel : http://casyopee.eu

Cette expérimentation est décrite et analysée dans la brochure I.R.E.M de Rennes (juin 2013)(3) et a fait l'objet d'une communication aux journées mathématiques de l'IFÉ(4) en juin 2012. Cet article reprend en partie les textes écrits pour cette brochure.

1. Le Système Physique

Texte élève

On considère une roue circulaire, de 1m de rayon, mobile autour de son axe horizontal.
Une corde de 12m de long est enroulée autour de la roue, de telle façon que si l'on tire la corde par son extrémité libre A, la roue se met à tourner.
Le point E est la position la plus éloignée du point A par rapport au point j. Une autre corde de 2m de long est fixée en un point M de la circonférence, elle passe par un guide fixé en P, proche de la roue, à 1m de l'axe et sur la verticale (jo). La nacelle est accrochée à l'extrémité N de cette corde de 2m. Lors du lancement le point A est en j et le point M est en i.
On s'intéresse au mouvement du point N.

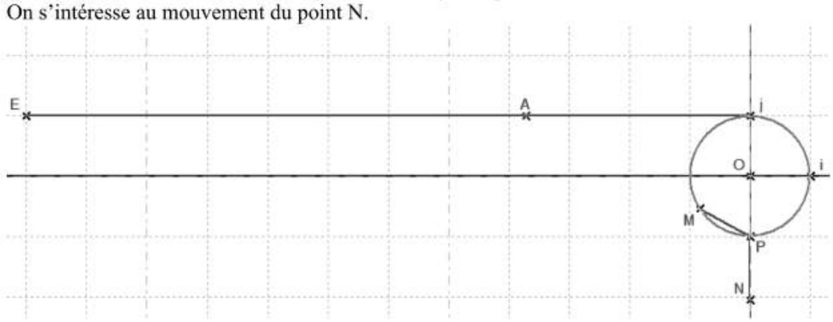


Figure 1. Montage réalisée dans la fenêtre de géométrie dynamique

Remarque : le logiciel Casyopée possède une fenêtre algèbre et une fenêtre de géométrie dynamique qui peuvent interagir entre elles.

2. Les différents cadres et le cycle de la modélisation

a) Le cadre du Système Physique

Le texte élève n'étant pas distribué, le montage est présenté aux élèves comme la maquette d'une attraction foraine. Un élève fait tourner la roue et le professeur demande aux élèves les sensations ressenties par les personnes installées dans la nacelle ; il ne donne pas son avis lors de la discussion. Le texte est ensuite distribué et le premier travail demandé aux élèves est de rédiger les sensations perçues par les personnes situées dans la nacelle. Durant la séance ils peuvent à tout moment venir faire tourner la roue ; plusieurs élèves utiliseront le montage physique pour mieux comprendre la construction du point N (en géométrie dynamique) ou pour étudier le phénomène physique au point bas et au point haut.

(3) *Les fonctions : Comprendre la notion et résoudre des problèmes de la 3ème à la Terminale. L'apport d'un logiciel dédié*. I.R.E.M de RENNES – Université de RENNES.
(4) IFÉ : Institut Français de l'Éducation (ex INRP). http://ife.ens-lyon.fr/ife
Minh, T. K. (2012). *Représentations dynamiques des fonctions: quelles mises en œuvre au lycée, quelles ressources pour les enseignants ?*

Il nous est apparu important que les élèves s'expriment oralement sur les sensations perçues avant que l'énoncé ne leur soit distribué. Cette discussion collective facilite l'appropriation du problème, justifie une étude approfondie (les interprétations données montrent que les réponses ne sont pas triviales) et va inciter les élèves, au cours ou à la fin de la séance, à revenir au système physique (voir le cycle de modélisation fonctionnelle cité plus bas).

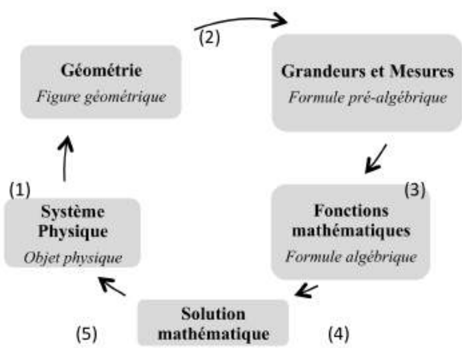
b) Le cadre de la géométrie plane et des grandeurs géométriques

Les élèves réalisent dans la fenêtre de géométrie dynamique du logiciel Casyopée une figure traduisant le montage. Ils peuvent créer des calculs géométriques, animer le point d'une vitesse constante, choisir des variables pré-algébriques puis modéliser en utilisant les possibilités du logiciel.

c) Le cadre des fonctions comme entité algébrique

Dans la fenêtre algèbre du logiciel la fonction créée peut être étudiée et représentée graphiquement. Les outils de calcul formel sont disponibles. L'étude de la fonction doit amener les élèves à analyser le mouvement de la nacelle.

d) Le cycle de modélisation fonctionnelle



1. Modéliser le système par une figure géométrique dynamique
2. Créer des calculs géométriques, choisir une variable et créer une formule pré-algébrique exprimant la relation de dépendance
3. Représenter algébriquement la formule pré-algébrique
4. Preuve algébrique
5. Interprétation

Ce cycle permet de considérer des étapes dans un processus de construction d'un modèle mathématique pour étudier un *Système Physique*.
Le *Système Physique* est le contexte réel étudié. Le passage du *Système Physique* à la *Géométrie* est caractérisé par la construction d'une figure dynamique. C'est une première étape de modélisation.

La *Géométrie* est le domaine où s'effectuent les explorations :

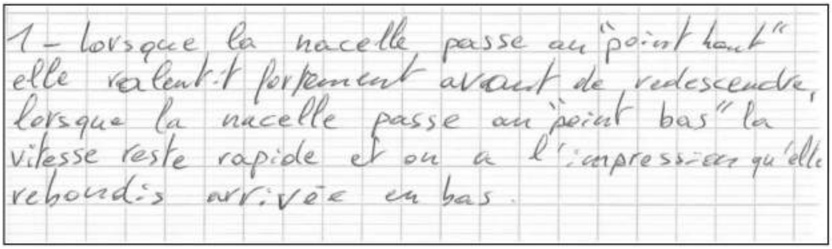
- l'élève peut étudier l'action du déplacement du point A sur celui de la nacelle (seuls les éléments du montage utiles pour la compréhension sont gardés) ;
- il se construit une image mentale de cette action (ce qui lui permettra de ne pas revenir de façon systématique au *Système Physique*).

Les élèves peuvent déplacer des objets, observer la transformation du système à l'aide des TICE, et concevoir dans un domaine mathématique les relations de dépendance entre objets du *Système Physique*.

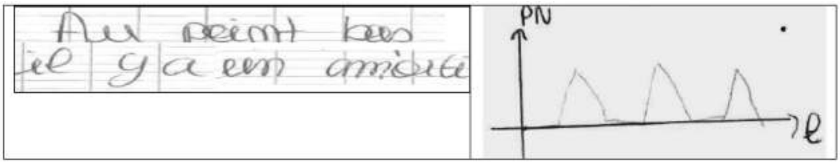
Le domaine des *Grandeurs et mesures* est celui où les élèves peuvent utiliser les TICE pour quantifier des explorations et des observations et préciser des conjectures. La construction d'une formule exprimant la relation de dépendance entre grandeurs est une seconde étape de modélisation qui conduit à une fonction algébrique.
Le domaine des *Fonctions mathématiques* est celui où s'opèrent les transformations algébriques et les preuves. Finalement, le retour dans le *Système Physique* a pour objectif d'interpréter et de vérifier l'adéquation du modèle mathématique.

3. Le jeu de cadres et les médiations du professeur

Dans un premier temps les élèves ont observé le mouvement et dans leurs comptes rendus leurs premières impressions montrent que les notions de mouvement, vitesse, et accélération ne sont pas stabilisées :


1 – lorsque la nacelle passe au "point haut" elle ralentit fortement avant de redescendre, lorsque la nacelle passe au "point bas" la vitesse reste rapide et on a l'impression qu'elle rebondis arrivée en bas.

Beaucoup d'élèves pensent qu'au point bas il existe un amorti et l'expriment graphiquement :



Le professeur doit tenir compte de ces « premières impressions » pour intervenir de façon circonstanciée lorsqu'ils effectuent l'étude avec le logiciel.

La figure dynamique construite dans la fenêtre de géométrie dynamique constitue, comme nous l'avons dit, un premier modèle du système. Les dépendances mécaniques se traduisent par des relations géométriques. Le point M doit se déplacer sur un cercle de façon que la distance qu'il parcourt soit égale à la longueur sur laquelle le point A a été tiré ; le point N doit être construit de façon que la somme des distances MP et PN soit constante. Cette modélisation, en réduisant l'objet étudié à ses aspects essentiels, et en mettant en évidence ces aspects, donne une nouvelle compréhension de la relation de dépendance. Elle permet aussi de préciser les éléments en dépendance : l'ordonnée du point N apparaît comme l'altitude de la nacelle qu'il s'agit d'étudier. La modélisation ne faisant plus intervenir le temps, mais des relations entre grandeurs géométriques, la variable dont elle dépend doit être une distance rendant compte de la position du point A. Ainsi ce cadre met en jeu plusieurs registres. Les registres de la géométrie (figures, langage géométrique) permettent l'expression des dépendances par le biais d'un programme de construction et la géométrie dynamique permet de prolonger l'expérience sensible de la dépendance. Un autre registre intervient, celui des grandeurs géométriques. Il sert dans la construction à satisfaire la contrainte sur les distances MP et PN : si le choix est par exemple de construire le point N à l'aide d'un cercle centré en P, le rayon devra être exprimé comme différence de la longueur de la corde et la longueur MP. L'expression quantifiée de la dépendance met en jeu aussi des distances. La nécessité de recourir à des calculs sur ces distances donne un caractère pré-algébrique au registre des grandeurs géométriques. Les élèves sont formés depuis le collège à articuler les registres géométriques. En revanche, le registre pré-algébrique des grandeurs a pu intervenir dans certains travaux, mais n'a pas fait l'objet d'une étude systématique. Par exemple, l'usage de ce registre pour une construction comme celle du point N s'est révélée difficile pour beaucoup d'élèves en Terminale, la contrainte $MP + PN = 2$ ne se traduisant pas directement par une construction géométrique. Lors de la construction de la figure le professeur est amené à faire réfléchir les élèves sur les dépendances entre les objets géométriques.

La modélisation fonctionnelle intervient après avoir défini des grandeurs géométriques. Les élèves créent avec le logiciel des calculs géométriques (longueurs, abscisses, ordonnées, …). Ils choisissent ensuite une dépendance fonctionnelle entre des grandeurs pré-algébriques puis le logiciel indique si celle-ci définit une fonction. Le professeur peut intervenir pour aider des élèves à choisir une variable (plusieurs choix possibles), certains élèves ayant des difficultés à distinguer la *variabilité* des grandeurs avec la dépendance fonctionnelle entre grandeurs.
La formule de la fonction et son domaine apparaissent dans la fenêtre algèbre du logiciel(5). Les élèves peuvent utiliser les outils de calcul formel disponibles (calcul de la fonction dérivée), représenter graphiquement la fonction et celle de sa dérivée

(5) Il faut noter ici deux choix dans la conception de Casyopée :
(1) Casyopée calcule automatiquement une formule pour la fonction, une fois que les deux grandeurs en dépendance fonctionnelle ont été sélectionnées ;
(2) Casyopée associe un domaine à la fonction (ici [0 ;12] si l'on choisit la variable JA).
Le choix (1) permet aux élèves de faire dans un temps raisonnable et de façon relativement autonome les étapes les plus importantes du cycle de modélisation. Le choix (2) est cohérent avec la modélisation et simplifie l'étude de la fonction qui n'a qu'un nombre fini de points de non-dérivabilité. Ces choix sont expliqués plus en détail dans la brochure.

(**Figure 2**). Même s’ils ont étudié, dans le cas d’un mouvement rectiligne, dont l’équation horaire est connue, le lien entre la vitesse instantanée et le nombre dérivé, ils ne prêtent pas attention à l’allure de la courbe de la fonction dérivée f' correspondant aux points bas (segments verticaux). Le rôle du professeur est alors de les questionner sur ces « aberrations graphiques » et à partir de leurs interprétations les aider à la compréhension mathématique de ces points singuliers (la fonction n’est pas dérivable en ces points).

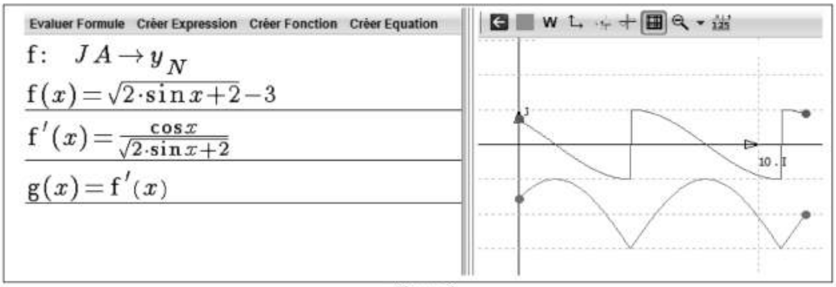


Figure 2

Lors des expérimentations nous avons constaté que les élèves ont ignoré l’avertissement affiché par Maxima (noyau du calcul formel du logiciel) sur la non existence possible de la dérivée en certaines valeurs et n’ont pas réagi aux segments verticaux apparus sur la représentation graphique de la fonction dérivée (sur les calculatrices de tels segments peuvent aussi exister). Cependant, ils savent plus ou moins que ces segments peuvent être associés à des « valeurs interdites ». Dans un premier temps le professeur propose de calculer ces valeurs singulières, les élèves les déterminent soit en tournant la roue (maquette mise à leur disposition) soit en analysant le mouvement dans la fenêtre de géométrie dynamique. Ils ne cherchent pas des valeurs approchées mais des valeurs exactes exprimées en fonction de π ou de fraction de tour. Dans un deuxième temps le professeur propose de définir une fonction de même expression algébrique que la dérivée mais dont le domaine de définition ne contient plus les valeurs « interdites » déterminées par les élèves. Le logiciel n’affiche plus d’avertissement et les segments verticaux n’apparaissent plus (**Figure 3**). Dans un troisième temps le professeur attire l’attention des élèves sur l’expression algébrique. Ces derniers réinvestissent leurs connaissances et font le lien entre l’expression algébrique de la dérivée et les conditions concernant la dérivabilité de « $\sqrt{u}$ » étudiée en cours. Un des points forts des TICE, exploité par le logiciel est donc de permettre à l’élève de faire le lien entre la lecture d’une expression algébrique et ses connaissances mathématiques, après que le professeur les aient mis sur la piste de l’existence de valeurs singulières qui demandent une étude approfondie (difficile pour les élèves de Terminale Scientifique).

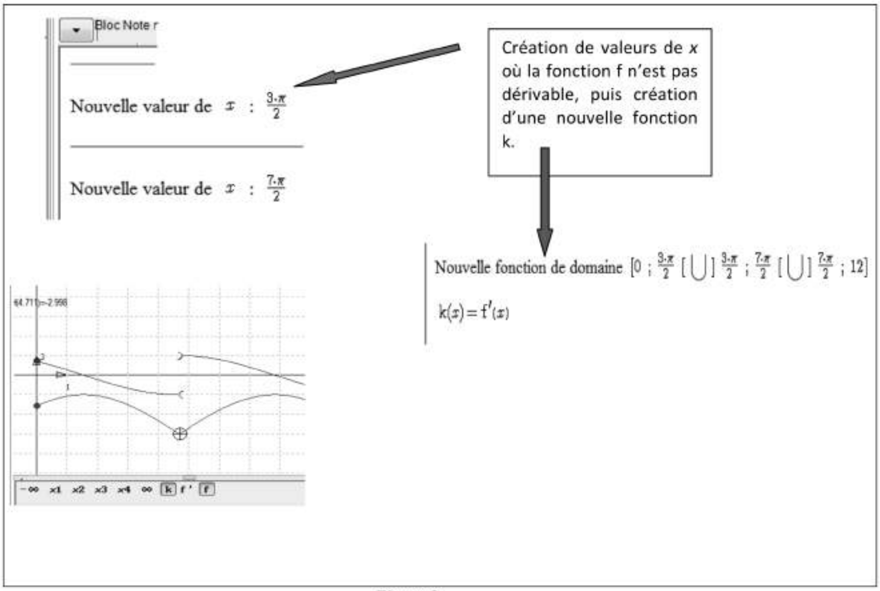


Figure 3

4. L'apport du logiciel

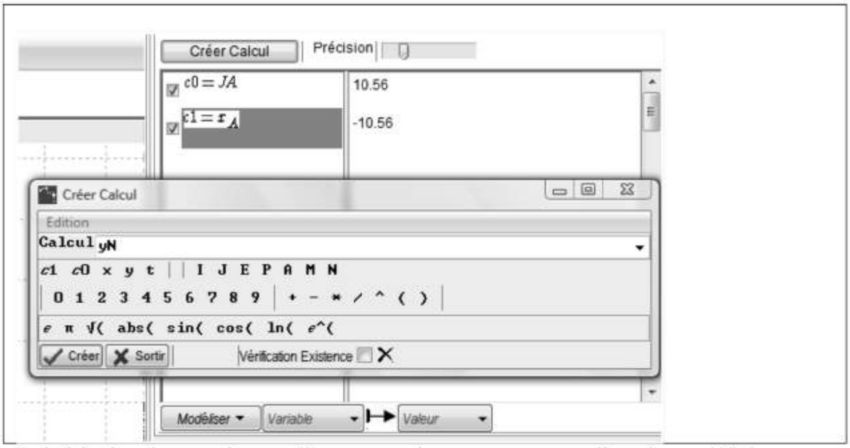
Les boutons de la fenêtre de géométrie dynamique sont ceux rencontrés dans les logiciels de géométrie dynamique standards comme GeoGebra.
L'utilisation des outils de calcul formel ne nécessite pas un apprentissage syntaxique (aucun langage de commande) et le logiciel respecte les conventions d'écriture conformes aux règles et usages dans le secondaire. L'utilisation des outils de calcul formel libère les élèves de calculs techniques qui pourront néanmoins être travaillés lors d'une synthèse en classe entière (voir **note 6**).

Une des particularités du logiciel est qu'il permet une interaction entre un environnement de géométrie dynamique et un environnement algébrique :

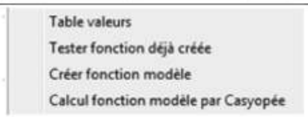
Comme l'analyse Maria Alessandra Mariotti(6) : « … *si on regarde la conception de Casyopée dans sa structure générale, il est constitué de deux environnements qui peuvent “ communiquer ” et “ interagir ” entre eux: un environnement algébrique basé sur un système de calcul formel et un environnement de géométrie dynamique. Les interactions possibles entre les deux environnements sont prises en charge par un troisième environnement : l'onglet* ***Calculs géométriques****. Il faut une analyse plus fine pour comprendre la complexité et la richesse de la conception de cet environnement d'interaction. Je vais utiliser un élément de mon cadre théorique, la théorie de la médiation sémiotique (Mariotti, 2012), pour mener à bien cette analyse : la notion de potentiel sémiotique* … ».

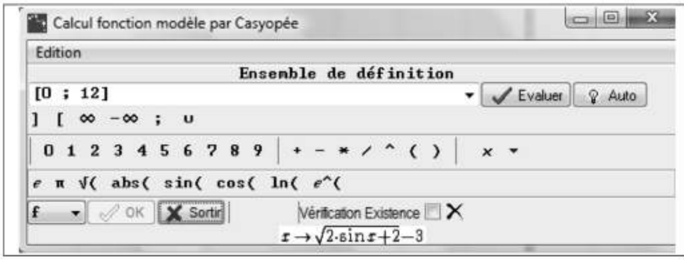
(6) Post face de la brochure I.R.E.M de Rennes (juin 2013) « *Les fonctions : Comprendre la notion…* »

Après avoir créé la figure du montage dans la fenêtre de géométrie dynamique (voir **Figure 1**), l'élève peut utiliser la commande « Créer Calcul » dans cette même fenêtre et obtenir une liste de grandeurs géométriques notées c_0, c_1 etc.



Il choisit alors les grandeurs qu'il veut associer et notamment celle qui sera définie comme étant la variable. Il peut laisser le logiciel valider son choix de fonction.

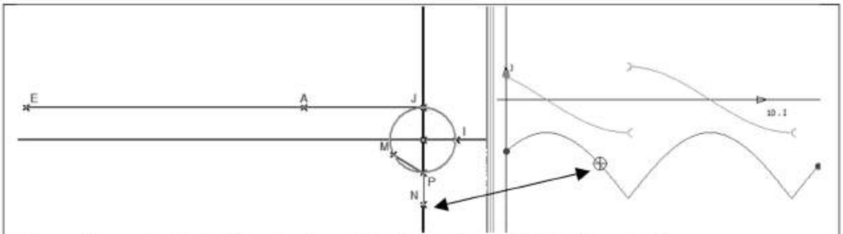
	**Choix par l'élève de la variable et de la dépendance fonctionnelle**
	**En général les élèves demandent au logiciel de créer la fonction avec la commande « Calcul fonction modèle par Casyopée ».**



Fonction créée par Casyopée. Elle sera affichée dans la fenêtre algèbre (voir **Figure 2).**

Dans la fenêtre algèbre (voir **Figure 2**) l'élève peut représenter graphiquement la fonction et l'étudier.

L'interaction possible entre les fenêtres d'algèbre et de géométrie dynamique permet de revenir à l'étude du Système Physique et de mieux analyser le « rebond » qu'ils avaient conjecturé.



Interaction entre la fenêtre de géométrie dynamique et la fenêtre algèbre.
Le déplacement du curseur sur la courbe entraîne un déplacement du point sur la figure et réciproquement.

5. Place de l’activité dans le cours de Terminale Scientifique

a) Raffermir la notion de fonction

Les élèves se sont construits depuis la seconde des représentations de la notion de fonctions autour de situation-types modélisées par des fonctions partout dérivables. Il s'agit bien ici de raffermir la notion de fonctions en les mettant face à une situation nouvelle qui bouscule leurs représentations antérieures et qui les amène à approcher la notion de non dérivabilité en un point.

b) Traiter une situation complexe

Ce choix volontaire de faire traiter par les élèves une situation complexe en mêlant plusieurs registres de représentation est propice à la construction de nouvelles connaissances. Les possibilités du logiciel concernant la modélisation fonctionnelle, le calcul formel disponible, sans qu’ils aient à apprendre un langage de commande, permettent de soulager les élèves de tâches calculatoires qui s'avèrent, dans la situation décrite, complexes.

c) Ne pas négliger le calcul instrumenté

Le logiciel permet de modéliser et affiche une expression algébrique de la fonction modèle. Cependant, lors de la synthèse en classe entière, le calcul en papier/crayon pour obtenir cette expression fait partie du travail demandé aux élèves pour mettre en évidence les différentes étapes du calcul pour établir l’expression algébrique de la fonction modèle. Celles-ci sont justifiées et expliquées ; c’est l’occasion pour le professeur de revenir sur des résultats vus en cours. Ces calculs prennent du sens chez les élèves qui veulent savoir : « comment le logiciel a-t-il pu obtenir cette expression ?». L’étude locale de la dérivée, pour les valeurs où elle n’est pas définie, reste un point fort de l’étude.
Nous ne négligeons pas le calcul en papier/crayon mais nous privilégions dans un premier temps l’organisation de démarches, l’exploration géométrique, numérique, graphique, algébrique avec l’aide du calcul formel. Il nous paraît important que, même si des élèves ont des difficultés à effectuer des calculs algébriques, que le logiciel puisse les aider à progresser efficacement dans leur recherche et la construction de leur preuve.

d) La place du calcul formel

Si les outils de calcul formel aident les élèves dans leur recherche et leur démarche de preuve il ne nous apparaît pas nécessaire de démontrer tous les résultats affichés par le calcul formel.Nous devons faire confiance aux résultats donnés par celui-ci. Se pose-t-on la question de la validité d'un graphique à chaque fois que l'on utilise la calculatrice graphique ? (cela ne veut pas dire qu'il ne faille pas se la poser de temps à autre). Qu'en pensent les mathématiciens qui utilisent le calcul formel dans leur activité de recherche ? Se pose-t-on la question de « démontrer » aussi à la main tous les calculs numériques faits à la calculatrice ? (ne faut-il pas mieux faire travailler le calcul mental et l'ordre de grandeur du résultat ?).

e) La modélisation fonctionnelle : un processus pour comprendre la notion de fonction

Si la situation présentée dans cet article est complexe, les élèves qui l'ont expérimenté ont l'habitude de traiter des problèmes dits « ouverts » en utilisant les possibilités du logiciel mais aussi celles de la calculatrice graphique (les deux outils se complètent). Les exercices proposés dans les manuels sont trop souvent guidés (peu de réflexion sur le choix des variables et une suite de questions qui ne laissent que peu de place à des démarches d'investigation). Il est pourtant indiqué dans le Bulletin Officiel[7] « *… le programme vise le développement des compétences suivantes :*

- *mettre en œuvre une recherche de façon autonome ;*
- *mener des raisonnements ;*
- *avoir un esprit critique vis-à-vis des résultats obtenus ;*
- *communiquer à l'écrit et à l'oral.* »

Contrairement aux idées reçues, les temps de recherche consacrés aux problèmes « ouverts » ne sont pas des moments « perdus », les élèves sont actifs et apprennent des mathématiques. Nous proposons dans notre brochure d'autres situations de recherche laissant une large place aux démarches d'investigations.

6. Conclusion

Cette étude d'un Système Physique est riche car elle permet aux élèves de travailler dans différents cadres et registres à travers un cycle de modélisation fonctionnelle. Il faut cependant remarquer que l'interprétation physique (ici changement brutal de direction) est une question difficile qui peut être abordée en collaboration avec les professeurs de sciences physiques. Ceux-ci seront sensibles aux conditions de l'expérience : impossibilité de réaliser physiquement ce qui apparaît dans la modélisation (il existe un décalage pour pouvoir faire passer la corde dans le guide). Une modélisation est une interprétation qui ne traduit pas toujours de façon complète la réalité physique.

(7) Bulletin Officiel spécial n°8 du 13 octobre 2011.

7. Bibliographie

Minh, T. K. (2011). *Apprentissage des fonctions au lycée avec un environnement logiciel : situations d'apprentissage et genèse instrumental des élèves*. Thèse de didactique des mathématiques, Université Paris-Diderot.

Minh, T. K. (2012b). Une approche expérimentale des fonctions avec le logiciel Casyopée. *Petit x*, 88, 49-74.

Douady Régine. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet, *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 7, no. 2.

Mariotti, M. A. (2012) ICT as opportunities for teaching-learning in a mathematics classroom: The semiotic potential of artefacts. In Tai-Yih Tso (ed.) *Proceedings of the 36th International Conference of the Psychology of Mathematics Education Group*, Taipei Tawain. Vol.1 p. 25-39.

Le Feuvre,B., Meyrier X., Vincent, P., Lagrange, J.B. (2006). Un logiciel utilisant le calcul formel pour le lycée. *Bulletin de l'APMEP*. N° 466, p. 714-760, 736.

Halbert, R., Lagrange, J.-B., Le-Bihan, C., Le Feuvre, B., Manens, M-C., Meyrier, X., Minh, T. K. (2012). *Représentations dynamiques des fonctions: quelles mises en oeuvre au lycée, quelles ressources pour les enseignants ?* In Aldon, G; Alvarez, A; Calpe, A; Matheron, Y; Novotna, J; Soury-Lavergne, S; Trgalova, J. (Eds). *Représentations dynamiques des mathématiques: quels outils pour faire, pour apprendre et pour enseigner les mathématiques ?* Actes des Journées Mathématiques de l'IFE, pp. 73-77, École Normale Supérieure de Lyon.

Halbert Roselyne, Lagrange Jean Baptiste, Le Bihan Christine, Le Feuvre Bernard, Manens Marie Catherine, Meyrier Xavier (2013). *Les fonctions : Comprendre la notion et résoudre des problèmes de la 3ème à la Terminale*. *L'apport d'un logiciel dédié*. I.R.E.M de RENNES – Université de RENNES.