

Un mauvais énoncé peut en cacher plusieurs bons (quelques recettes de spaghettis)

Marc Roux^(*)

Dans un problème de probabilités, il est impérativement nécessaire de donner les conditions de l'expérience avec la plus grande précision. Des variations de ces conditions, ou des interprétations divergentes d'un énoncé trop vague, peuvent aboutir à des résultats très différents, et à des exercices de niveaux de difficulté très différents. En voici un exemple.

Un jeune collègue tunisien, Ali Benmessaoud⁽¹⁾, m'a transmis cet extrait d'un manuel en usage dans son pays, destiné aux 1ères S ; il s'agit d'une version discrétisée du « problème du spaghetti », popularisé entre autres par l'Irem de Montpellier (voir bibliographie, [2]) : je coupe un spaghetti en trois, quelle est la probabilité de pouvoir former un triangle avec les trois morceaux ?

Exercice 9

On considère une droite munie d'un repère (O, \vec{i}) et le point A d'abscisse 10.

On place au hasard deux points M et N d'abscisses entières, sur le segment $[OA] \setminus \{O, A\}$.

On obtient alors trois segments de longueurs x , y et z .

On se propose de calculer la probabilité de pouvoir construire un triangle dont les côtés mesurent x , y et z .

1. a. Justifier que l'univers des possibles est défini par $E = \{(x, y) \text{ où } x \text{ et } y \text{ sont des entiers compris entre } 0 \text{ et } 10 \text{ tels que } x + y \leq 10\}$.

b. Représenter dans un repère l'ensemble E.

c. Calculer le cardinal de E.

2. a. Montrer que l'évènement étudié correspond à la partie A définie par

$A = \{(x, y) \in E \text{ tels que } x < 5, y < 5 \text{ et } x + y > 5\}$.

b. Représenter la partie A.

c. Quel est le cardinal de A ?

d. Conclure.

(*) marc.roux15@wanadoo.fr

(1) C'est aussi lui qui m'a communiqué l'article de Charles SUQUET (voir bibliographie, [1]).

On peut regretter que cet énoncé scolaire court-circuite le travail de modélisation qui fait l'intérêt de ce « problème du spaghetti ». Cette recherche du « bon modèle » est étudiée par Joëlle Fontana et Maryse Nogues dans [2]. Mais prenons l'énoncé comme il est : permet-il effectivement de traiter la question ?

J'ai aisément compris pourquoi cet énoncé d'apparence anodine posait problème à mon correspondant : à chacune de mes relectures ou presque, j'y ai trouvé une nouvelle ambiguïté, imprécision, matière à des interprétations divergentes, ou même contradiction.

Questions :

1. Que représentent, géométriquement, x , y , z ? En plaçant deux points M et N entre O et A, on détermine non pas 3 mais 5 segments: [OM], [MN], [NA], [ON], [MA] (auxquels s'ajoute [OA]).
2. M et N sont-ils obligatoirement distincts ou peuvent-ils être confondus ?
3. M est-il obligatoirement entre O et N ?
4. Le triangle que l'on veut construire peut-il être aplati ?
5. Est-il normal qu'un point et un événement portent le même nom A ?

L'interprétation d'A. Benmessaoud, comme la mienne en première lecture, et probablement comme celle d'une majorité d'élèves, a été : M et N distincts, dans l'ordre O, M, N, A, $x = OM$, $y = MN$, $z = NA = 10 - (x + y)$; mais nous verrons que ce n'est pas la seule possible. Et surtout, elle est contradictoire avec $x + y = 10$, et la condition de la question 1.a) devrait être $x + y < 10$ (ou $x + y \leq 9$). D'où une première re-rédaction de cet exercice :

Première ébauche :

On considère une droite munie d'un repère (O, \vec{i}) et, sur cette droite, le point A d'abscisse 10. On place au hasard deux points distincts M et N d'abscisses entières sur le segment ouvert]OA[, M étant entre O et N. On pose $OM = X$, $MN = Y$, $NA = Z$.

On se propose de calculer la probabilité de pouvoir construire un triangle dont les côtés ont pour mesures X, Y, Z.

1.a) Justifier que l'univers des possibles est

$$E = \{(x, y), x \in \mathbb{N}^*, y \in \mathbb{N}^*, x + y < 10\}.$$

b) Représenter dans un repère l'ensemble E.

c) Déterminer le cardinal de E.

2.a) Montrer que l'événement étudié correspond à la partie T définie par :

$$T = \{(x, y), x < 5, y < 5, x + y > 5\}.$$

b) Représenter la partie T.

c) Quel est le cardinal de T ?

d) Conclure.

Ainsi rédigé, l'exercice se résout sans difficulté, et on arrive à $\text{Card}(E) = 36$, $\text{Card}(T) = 6$, $p(T) = 1/6$. Et je suppose que c'est ce qu'attendait l'auteur.

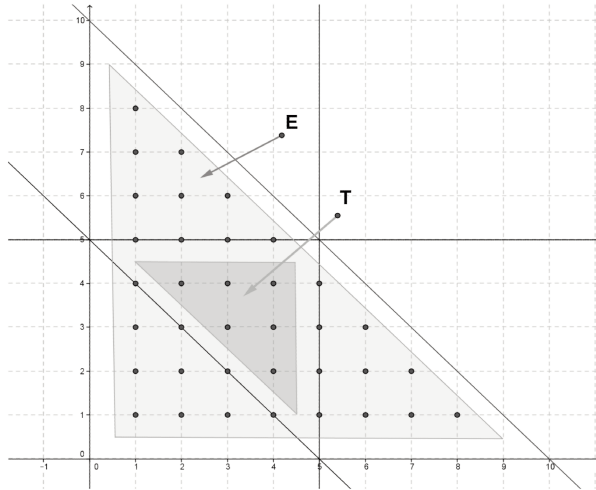


Fig.1 :

MAIS ce faisant, on a cédé à la tentation d'une hypothèse implicite : celle de l'équiprobabilité des couples (x,y) possibles. Or elle est vraie ou fausse selon les conditions de l'expérience, qui devront être précisées dans l'énoncé : vraie si on tire le couple (x,y) dans une urne contenant 36 jetons correspondant aux 36 possibilités ; d'où la

Variante 1 :

On considère une droite munie d'un repère (O, \vec{i}) et, sur cette droite, le point A d'abscisse 10. On place deux points distincts M et N d'abscisses entières sur le segment ouvert $]OA[$, M étant entre O et N. On pose $OM = X$, $MN = Y$, $NA = Z$. Le couple (X,Y) est tiré au hasard, avec équiprobabilité, parmi tous les couples possibles.

On se propose de calculer la probabilité de pouvoir construire un triangle dont les côtés ont pour mesures X, Y, Z.

1.a) Justifier que l'univers des possibles est

$$E = \{(x,y), x \in \mathbb{N}^*, y \in \mathbb{N}^*, x + y < 10\}.$$

(suite inchangée, solution inchangée).

Par contre l'hypothèse d'équiprobabilité est fausse si on procède comme suit :

- on place M au hasard entre O et A, en laissant au moins une place libre entre M et A : 8 possibilités équiprobables ; l'abscisse de M est x, entier compris au sens large entre 1 et 8 ;

- puis on place N au hasard entre M et A : $9 - x$ possibilités ; $y = MN$ prend une valeur entière comprise au sens large entre 1 et $9 - x$.

Dans ce dernier cas, soit (a,b) une valeur possible du couple (X,Y) ; pour tout a , $0 < a < 10$, $p(X = a) = 1/8$; mais la probabilité conditionnelle $P_{X=a}(Y = b)$ dépend de a :

$$P_{X=a}(Y = b) = \frac{1}{9-a};$$

d'où :

$$p(a,b) = p(X = a \cap Y = b) = \frac{1}{8(9-a)}.$$

Je ne vois pas alors, pour calculer la probabilité de T, de moyen plus simple qu'additionner les probabilités des six événements élémentaires qui le composent :

$$\begin{aligned} p(T) &= p(2,4) + p(3,3) + p(3,4) + p(4,2) + p(4,3) + p(4,4) \\ &= \frac{1}{8 \times 7} + 2 \times \left(\frac{1}{8 \times 6} \right) + 3 \times \left(\frac{1}{8 \times 5} \right) = \frac{71}{840}. \end{aligned}$$

À remarquer que cette probabilité a pour valeur approchée 0,13, donc différente de $1/6 \approx 0,17$ trouvé avec l'énoncé précédent.

On a donc la

Variante 2 :

On considère une droite munie d'un repère (O, \vec{i}) et, sur cette droite, le point A d'abscisse 10. On place un point M sur le segment ouvert]OA[d'abscisse entière inférieure ou égale à 8, puis un point N d'abscisse entière, entre M et A. On pose $OM = X$, $MN = Y$, $NA = Z$.

On se propose de calculer la probabilité de pouvoir construire un triangle dont les côtés ont pour mesures X, Y, Z.

1.a) Justifier que l'univers des possibles est

$$E = \{(x,y), x \in \mathbb{N}^*, y \in \mathbb{N}^*, x + y < 10\}.$$

b) Représenter dans un repère l'ensemble E.

2. Soit (a,b) un élément de E.

a) On place M comme indiqué ; quelle est la probabilité pour que X prenne la valeur a ?

b) On place N comme indiqué ; exprimer en fonction de a la probabilité conditionnelle $P_{X=a}(Y = b)$.

c) En déduire $P_{X=a}(X = a \cap Y = b)$ (que l'on pourra noter $p(a,b)$)

3a) Montrer que l'événement « on peut construire un triangle de côtés X, Y, Z » correspond à la partie T définie par :

$$T = \{(x,y) \in E, x < 5, y < 5, x + y > 5\}$$

b) Représenter la partie T.

c) Calculer en utilisant 2.c) la probabilité de T.

Mais ce n'est pas fini ! On peut envisager le tirage d'une façon encore différente : on place M au hasard (probabilité $1/9$ pour chaque place possible), puis on place N au hasard dans n'importe laquelle des 8 places possibles ; ici les événements élémentaires sont équiprobables, de probabilité $1/72$; mais la définition de X et Y est plus compliquée : $X = \min(OM, ON)$, $Y = MN$, $Z = \min(MA, NA) = 10 - (X + Y)$. Cependant il est facile, par échange de O et A, de se ramener à la variante 1.

Ou encore, on place M au hasard, puis on tire au hasard (équiprobabilité) le côté de M où sera placé N (on casse le spaghetti en deux, puis on tire au hasard le morceau qui sera coupé en deux) ; ou encore, on place M au hasard, puis on tire le côté de M où sera placé N avec pour chaque côté une probabilité proportionnelle au nombre de points d'abscisse entière qu'il contient (choix du morceau coupé en deux avec proportionnalité à sa longueur) ; etc. On peut varier presque à l'infini la façon de procéder ; à chaque façon correspond un exercice différent. Je n'explorerai pas l'immensité de ces pistes, me bornant aux deux définies plus haut.

Notons que chacun de ces énoncés peut s'adapter au cas où l'on accepte les triangles aplatis : la différence est qu'alors on doit ajouter à T les cas où x , y ou z est nul, (2 sommets confondus) et ceux où x ou y ou z vaut 5, la somme des deux autres côtés étant 5 (3 sommets alignés) :

Variante 3 :

On considère une droite munie d'un repère (O, \vec{i}) et, sur cette droite, le point A d'abscisse 10. On place deux points M et N, distincts ou confondus, d'abscisses entières sur le segment ouvert $]OA[$, M étant entre O et N. On pose $OM = X$, $MN = Y$, $NA = Z$. Le couple (X, Y) est tiré au hasard, avec équiprobabilité, parmi tous les couples possibles.

On se propose de calculer la probabilité de pouvoir construire un triangle dont les côtés ont pour mesures X, Y, Z.

1.a) Justifier que l'univers des possibles est

$$E = \{(x, y), x \in \mathbb{N}^*, y \in \mathbb{N}^*, x + y \leq 10\}.$$

b) Représenter dans un repère l'ensemble E.

c) Déterminer le cardinal de E.

2.a) Montrer que l'événement étudié correspond à la partie T définie par :

$$T = \{(x, y) \in E, x \leq 5, y \leq 5, x + y \geq 5\}.$$

b) Représenter la partie T.

c) Quel est le cardinal de T ?

d) Conclure.

On trouvera $\text{Card}(E) = 66$, $\text{Card}(T) = 21$, $p(T) = 7/22 \approx 0,318$

Et de même :

Variante 4 :

On considère une droite munie d'un repère (O, \vec{i}) et, sur cette droite, le point A d'abscisse 10. On place un point M d'abscisse entière sur le segment $[OA]$, puis un point N d'abscisse entière sur le segment $[MA]$. On pose $OM = X$, $MN = Y$, $NA = Z$.

On se propose de calculer la probabilité de pouvoir construire un triangle, éventuellement aplati, dont les côtés ont pour mesures X, Y, Z .

1.a) Justifier que l'univers des possibles est

$$E = \{(x, y), x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}, x + y \leq 10\}.$$

b) Représenter dans un repère l'ensemble E.

2. Soit (a, b) un élément de E.

a) On place M comme indiqué ; quelle est la probabilité pour que X prenne la valeur a ?

b) On place N comme indiqué ; exprimer en fonction de a la probabilité conditionnelle $P_{X=a}(Y = b)$.

c) En déduire $P_{X=a}(X = a \cap Y = b)$ (que l'on pourra noter $p(a, b)$)

3a) Montrer que l'événement « on peut construire un triangle de côtés X, Y, Z » correspond à la partie T définie par :

$$T = \{(x, y) \in E, x \leq 5, y \leq 5, x + y \geq 5\}$$

b) Représenter la partie T

c) Calculer en utilisant 2.c) la probabilité de T.

On trouvera $p(T) = 6\,557/25\,410 \approx 0,26$.

Si l'on a la chance d'avoir des élèves motivés, on pourra poser chacun de ces 4 énoncés sous forme ouverte, en remplaçant la phrase « On se propose de calculer ... » par : « Calculer la probabilité de pouvoir construire un triangle dont les côtés ont pour mesures x, y, z » et en supprimant toutes les questions suivantes.

On peut encore envisager une généralisation avec globalisation et prolongements : l'abscisse de A n'est plus forcément 10, mais un naturel n quelconque, $n \geq 3$. Si on fait tendre n vers l'infini, ceci revient à prendre pour unité la longueur du spaghetti divisée par n ; cette unité tendant vers 0, on s'approchera du « problème du spaghetti continu ». Mais alors le problème dépasse largement les compétences attendues d'un lycéen, et concerne plutôt les CPGE ou l'université :

Variante 5 (Généralisation) :

On considère une droite munie d'un repère (O, \vec{i}) et, sur cette droite, le point A d'abscisse n , n entier, $n \geq 3$. On place sur le segment ouvert $]OA[$ deux points distincts M et N d'abscisses entières, M étant entre O et N. On pose $OM = x$, $MN = y$, $NA = z$.

Dans chacun des cas précisés ci-dessous :

- a) Calculer en fonction de n la probabilité p_n de pouvoir construire un triangle (non aplati) dont les côtés ont pour mesures x, y, z .
 b) Etudier la suite (p_n) : sens de variation, convergence. On pourra étudier séparément (p_{2n}) et (p_{2n+1}) , et s'aider d'une expérimentation avec un logiciel pour émettre des conjectures.

Premier cas : le couple (x,y) est tiré au hasard, avec équiprobabilité, parmi tous les couples possibles.

Deuxième cas : On place au hasard un point M sur le segment ouvert $]OA[$, d'abscisse entière inférieure ou égale à $n - 2$, puis un point N, d'abscisse entière, entre M et A.

Voir solution détaillée en annexe, sur *le site de l'APMEP*. On y trouvera en particulier la preuve que, dans le deuxième cas, (p_n) converge vers $\ln(2) - 1/2$.

On peut aussi traiter le problème directement dans le cadre des variables aléatoires continues :

Variante 6 : modèle continu

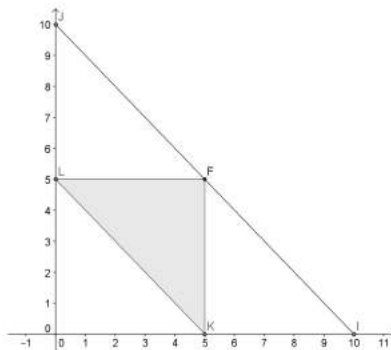
On considère une droite munie d'un repère (O, \vec{i}) et, sur cette droite, le point A d'abscisse l **réelle** strictement positive. On place sur le segment ouvert $]OA[$ deux points distincts M et N d'abscisses **réelles**, M étant entre O et N . On pose $OM = X, MN = Y, NA = Z$.

Dans chacun des cas précisés ci-dessous, calculer la probabilité de pouvoir construire un triangle dont les côtés ont pour mesures X, Y, Z .

Premier cas : le couple (X, Y) est tiré au hasard, avec équiprobabilité, parmi tous les couples possibles.

Deuxième cas : X suit la loi uniforme sur $[0, l]$, puis Y suit la loi uniforme sur $[0, l - x]$.

L'univers est l'ensemble des couples (x,y) de réels positifs tels que $x + y < l$. Il est représenté ci-dessous par l'intérieur du triangle OIJ.



Pour que x, y, z puissent être les longueurs des côtés d'un triangle, il faut et suffit que

$$\begin{cases} x + y \geq z \\ y + z \geq x \\ z + x \geq y \end{cases}, \text{ soit } \begin{cases} x + y \geq \frac{l}{2} \\ x \leq \frac{l}{2} \\ y \leq \frac{l}{2} \end{cases}.$$

L'ensemble des couples (x, y) correspondants est représenté par l'intérieur du triangle KFL.

Premier cas : les couples (X, Y) sont équiprobables.

$$P(T) = \frac{\text{aire}(\text{KFL})}{\text{aire}(\text{OIJ})} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Deuxième cas : X suit la loi uniforme sur $[0, l]$, puis Y suit la loi uniforme sur $[0, l - x]$.

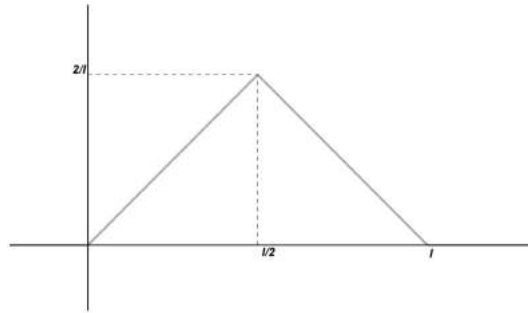
$$\begin{aligned} P(T) &= \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{1}{l} \int_{\frac{l}{2}-x}^{\frac{l}{2}} \frac{1}{l-x} dy dx \\ &= \frac{1}{l} \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{x}{l-x} dx = \frac{1}{l} \int_0^{\frac{l}{2}} \left(-1 + \frac{l}{l-x} \right) dx = \ln(2) - \frac{1}{2} \approx 0,19 \end{aligned}$$

Une autre généralisation consiste à contester l'équiprobabilité, ou probabilité uniforme dans le cas continu ; en effet il me semble, expérimentalement, que le spaghetti se brise très rarement tout près d'une extrémité ; par exemple la probabilité d'obtenir un morceau de moins d'un millimètre me semble très faible ! On pourrait, considérant qu'on a plus de chances de couper vers le milieu qu'aux bords, imaginer une densité de probabilité centrée au milieu. On pourrait envisager une loi normale, bien que les ensembles de valeurs de X et de Y soient bornés ; préférons, pour simplifier les calculs, une loi « en triangle » :

Variante 7 : Modèle continu, où X suit la loi en triangle sur $[0, l]$, puis Y la loi en triangle sur $[0, l - x]$.

La loi « en triangle » sur $[0, l]$ a pour densité la fonction f représentée ci-dessous,

$$\text{définie par } f(x) = \frac{2}{l} - \frac{4}{l^2} \left| x - \frac{l}{2} \right| \text{ si } x \in [0, l], f(x) = 0 \text{ sinon.}$$



$$P(T) = \int_0^{\frac{l}{2}} \left[\frac{2}{l} + \frac{4}{l^2} \left(x - \frac{l}{2} \right) \right] \int_{\frac{l}{2}-x}^{\frac{l}{2}} \left(\frac{2}{l-x} - \frac{4}{(l-x)^2} \left| y - \frac{l-x}{2} \right| \right) dy dx.$$

Donc

$$\begin{aligned} P(T) &= \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{4x}{l^2} \left(\frac{2x}{l-x} - \frac{x^2}{(l-x)^2} \right) dx \\ &= \frac{-4}{l^2} \int_l^{\frac{l}{2}} \left(\frac{2(l-h)^2}{h} - \frac{(l-h)^3}{h^2} \right) dh = 2 \ln(2) - \frac{27}{2} \approx 0,36. \end{aligned}$$

Que cette valeur soit plus élevée que les précédentes s'explique assez bien : on obtient moins souvent des morceaux trop petits.

Conclusion

Ainsi un énoncé défectueux nous a fourni sept énoncés qui le sont moins, et de difficultés très diverses.

Merci à Louis-Marie Bonneval qui a apporté bien des enrichissements à cet article.

Bibliographie/sitographie :

[1] SUQUET Charles, U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées, Université des Sciences et Technologies de Lille : *Probabilités géométriques*.

<http://math.univ-lille1.fr/~suquet/Polys/ProbGeom.pdf>

[2] FONTANA Joëlle, NOGUES Maryse - Irem de Montpellier : *Simulation et modélisation : étude d'un exemple* - REPÈRES - IREM . N° 46 - janvier 2002.

<http://www.univ-irem.fr/commissions/reperes/consulter/46nogues.pdf>

[3] STRAZZABOSCO Dominique, POULIN Claude - Académie de Nouméa : *De l'art de couper un spaghetti - Un problème de simulation pour les élèves de première*.

<http://www.ac-noumea.nc/maths/spip.php?article285>