

Mathématiques vivantes en classe de CM2

Carole Jolly(*) & Raymond Torrent(**)

Dans le cadre de la semaine des mathématiques qui s'est déroulée du 18 au 23 mars 2013, la commission départementale « mathématiques » du groupe compétence 3 de l'Inspection Académique de Vendée, a proposé à l'ensemble des classes primaires du département (de la moyenne section au CM2) une série de défis-problèmes par niveau d'enseignement ainsi que des énigmes mathématiques (une par jour) pour les élèves mais aussi pour les enseignants. Ces différentes propositions sont accessibles sur le site de l'Inspection Académique de Vendée

(http://www.ia85.ac-nantes.fr/39768776/0/fiche__pagelibre/&RH=1225890334624)

Voici comment l'une de ces activités a été vécue par la classe de CM2 de l'école d'application du Moulin Rouge à La Roche sur Yon.

Le défi intitulé : « drôle de suite ! » avait été choisi. Il était formulé ainsi:

« Une drôle de suite de nombres ! ».

Pour commencer choisir un nombre de deux chiffres.

S'il est pair en prendre la moitié ; s'il est impair, le multiplier par 3 puis ajouter 1.

Recommencer à appliquer la même règle avec le nombre obtenu et ainsi de suite...

S'arrêter lorsque l'on obtient 1.

Voici un exemple :

en débutant avec 12 on obtient la suite : 12, 6, 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, et 1 !

Faire la même chose avec chacun des nombres de 10 à 99.

Essayer de présenter les résultats obtenus en les organisant de la façon qui vous semble la plus claire.

On reconnaîtra ici la célèbre suite dite de Syracuse. En choisissant de traiter avec les élèves de la classe cette situation, nous n'avons pas cherché à aborder les multiples aspects de l'étude de cette suite numérique (nombres d'étapes pour atteindre 1, valeur maximale de la suite, ...) mais à « regarder et analyser ce qui se passe pour les nombres à deux chiffres » en privilégiant les objectifs suivants : Permettre aux élèves :

- de rencontrer une question qui demeure « ouverte » pour les mathématiciens (et par là même découvrir qu'en mathématiques comme dans les autres sciences, la recherche est essentielle),
- de réinvestir des compétences numériques : organiser des informations numériques (structuration des résultats obtenus sous forme d'un graphe), calculer mentalement (en particulier calcul de triples et de moitiés), utiliser de manière raisonnée une

(*) professeure des écoles, maître formatrice.

(**) professeur d'IUFM, retraité.

- calculatrice,
- de s'impliquer dans un projet collectif nécessitant collaboration et échanges, de faire preuve d'une certaine persévérance (compétence visée au palier 2 du socle commun). Cette dernière était notamment nécessaire lorsque le nombre d'étapes pour atteindre 1 était élevé,
- de réinvestir dans un domaine scientifique des compétences langagières à l'oral et à l'écrit.

Trois séances d'une heure ont été nécessaires. La dernière s'est effectuée sous la forme d'ateliers autonomes d'une vingtaine de minutes chacun.

Première séance :

Pour lancer la recherche nous avons fait le choix de présenter l'énigme oralement (comme un jeu numérique) à la classe entière et non à partir de l'énoncé écrit : le nombre 14 a été pris au départ et les deux règles définissant la suite ont été formulées en situation. Au fur et à mesure de la détermination des termes successifs de cette suite particulière les notions de nombre pair et de nombre impair ont été rappelées. Les nombres obtenus sont écrits au tableau. À chaque étape, le calcul du nombre cherché est explicité oralement, parfois à l'écrit. Le terme de « suite » a été introduit. Une fois le nombre 1 obtenu, nous avons fait constater que si on continuait la suite après 1 en appliquant les deux règles, on « bouclerait » avec la répétition à l'infini de la séquence : 1, 4, 2, 1, ...

La troisième règle a été alors formulée : « dès que l'on obtient le nombre 1, on s'arrête ». Les trois règles écrites sont laissées apparentes sur le tableau interactif afin que les élèves puissent s'y référer rapidement en cas d'oubli.

Un travail par binôme est alors proposé aux élèves : chacun des binômes (constitués par l'enseignante en fonction de leurs compétences numériques) reçoit une enveloppe contenant une feuille sur laquelle est inscrit un nombre de deux chiffres. Il s'agit de fabriquer la suite obtenue à partir de ce nombre en appliquant les règles. Les calculs peuvent se faire à la main ou à l'aide de la calculatrice mise à la disposition de chaque binôme. Une différenciation a été possible par le choix du nombre de départ (suite plus ou moins longue). Les valeurs choisies étaient : 9, 19, 23, 45, 53, 70, 81.

Le même nombre est donné à deux binômes différents pour permettre, au cours de la synthèse, une confrontation des résultats et une vérification des calculs effectués.

Les élèves se sont impliqués de suite dans ce travail avec un certain enthousiasme et rapidement les suites proposées ont été élaborées. La collaboration dans chaque binôme pour l'organisation des calculs et leur vérification pas à pas a été importante. Lors de la synthèse les différents binômes ont présenté les suites obtenues en les écrivant au tableau les unes sous les autres. À noter que la plupart des groupes n'ont pas souhaité utiliser au départ la calculatrice, les calculs leur semblant accessibles sans cet outil. Lors de cette première phase, elle a essentiellement servi d'instrument de vérification. Son usage s'est ensuite imposé de façon spontanée lorsque les élèves ont été confrontés à des suites plus longues et lorsque les nombres rencontrés étaient

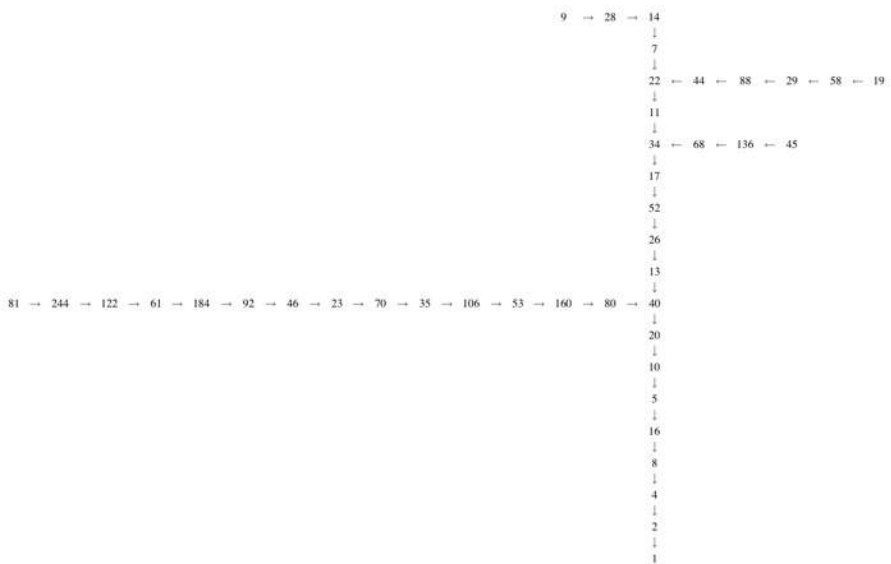
plus « grands ». Peu d'erreurs de calcul ont été commises.

L'observation collective de ces suites a conduit les élèves à la formulation d'un certain nombre de remarques :

La première, unanime : « toutes les suites se terminent de la même façon » ; les autres remarques concernent des propriétés d'inclusion :

- dans la « suite de 9 » on retrouve la « suite de 14 »,
- dans la « suite de 45 » et la « suite de 14 » on retrouve le même nombre 34 et donc les nombres qui suivent,
- dans la « suite de 70 » et la « suite de 14 » on retrouve le même nombre 40 et donc les nombres qui suivent,
- dans la « suite de 81 » on retrouve « la suite de 23 », la « suite de 70 » et la « suite de 53 »...

Pour illustrer ces remarques nous avons projeté une représentation des suites sous la forme d'un graphe (le terme est introduit) :



Une fois présenté, le graphe a été longuement commenté par les élèves, chaque binôme y retrouvant « sa suite ». Puis il a été utilisé pour répondre à un certain nombre de questions :

- si on choisit au départ 46, faut-il faire beaucoup de calculs pour trouver la suite qui correspond ?
- à l'aide du graphe, trouver cinq nombres pour lesquels on peut facilement trouver les suites correspondantes (soit parce que les nombres y figurent déjà soit parce qu'ils sont les doubles de nombres qui y figurent). Cette nouvelle recherche s'est faite de nouveau par binômes. La plupart des groupes ont proposé des doubles de nombres inscrits. Peu d'entre eux ont exprimé le fait

que si on choisit un nombre qui figure dans le graphe alors sa suite est déterminée, ce qui nous a laissé penser que l'inclusion d'une suite dans une autre n'était pas encore perçue par tous les élèves et qu'il y avait nécessité à reprendre ce point lors de la séance suivante.

Les réponses à ces différentes questions sont abordées oralement, explicitées et surtout argumentées.

Deuxième séance :

Le graphe est de nouveau projeté. Un questionnement collectif permet de rappeler l'objet de l'étude, les règles utilisées (elles sont de nouveau projetées) et surtout les propriétés observées en particulier le fait que toutes les suites construites se terminent avec la séquence 4, 2, 1.

L'idée est alors lancée de vérifier si cela est encore vrai pour tous les nombres entre 1 et 99. Pour relancer la recherche nous nous sommes appuyés sur la remarque d'un élève : « Pour le savoir, il faut tous les faire ! ». Très vite certains élèves disent qu'il n'est pas nécessaire pour certains nombres de faire les calculs « parce que c'est dans le graphe » et citent des exemples de nombres. Le travail est alors de nouveau organisé par binôme : il s'agit de calculer (ou de trouver à l'aide des nombres déjà placés dans le graphe) les termes des suites de chacun des nombres de 1 à 99. Pour faciliter l'organisation de la tâche, chaque binôme reçoit un exemplaire du graphe et un tableau des nombres de 1 à 99 avec comme suggestion de rayer au fur et à mesure les nombres dont les suites ont été trouvées. Il est demandé aux élèves, lorsqu'une suite est trouvée, de la placer correctement « au bon endroit » sur le graphe. Certains binômes ont travaillé de façon autonome, pour d'autres l'aide de l'enseignante a été nécessaire surtout pour l'organisation du travail (par exemple, commencer par barrer dans le tableau tous les nombres qui figurent dans le graphe, repérer des doubles pour éviter des calculs inutiles, se répartir les tâches au sein du binôme, ...) et aider à anticiper avant d'exécuter les calculs. Si les élèves avaient tous intégré les différentes règles de l'algorithme et les appliquaient sans difficultés majeures, le principal obstacle était d'observer attentivement le graphe pour une économie de calculs. Plusieurs élèves calculaient systématiquement tous les termes de la suite et ce n'était qu'au moment de son positionnement dans le graphe qu'ils réalisaient que bon nombre des termes étaient déjà inscrits. Au fil de la séance, les stratégies se sont affinées ; l'efficacité et l'autonomie se sont accrues. Trois binômes ont eu recours à une aide spécifique car ils ne tenaient pas compte des nombres déjà inscrits et réécrivaient les mêmes nombres sans s'en apercevoir. Il s'agissait alors pour nous d'insister sur la contrainte qu'un nombre ne pouvait figurer plusieurs fois dans le graphe. Une fois les redondances identifiées, les élèves se sont appropriés progressivement l'inclusion d'une suite dans une autre. Au cours de ce temps de calcul des remarques fusent : « ça monte et ça descend » et une question surgit : « est-ce que cela va s'arrêter ? » ... et des nombres apparaissent comme récalcitrants : 27, 31, 41, 47, 54, 55, 62, 63, 71, 73, 82, 83, 94, 95 et 97.

Au fil de la séance (afin d'éviter un temps de mise en commun trop long) chaque binôme vient placer au tableau la ou les suites trouvées ; les binômes ayant travaillé les mêmes suites comparent avec leurs propres résultats, ce qui permet une

vérification des calculs. À la fin de cette mise en commun, le graphe s'est étoffé et les nombres récalcitrants ont été identifiés. Dès cette séance, des binômes ont tenté de trouver les suites correspondant à ces nombres mais n'obtenant pas la séquence 4, 2 1, ils ont douté de leurs calculs. Seul un binôme faisant preuve d'une grande persévérance est parvenu à construire la suite du nombre 27. Ce succès a bien sûr été mis en valeur et a suscité chez beaucoup d'autres l'envie de traiter les autres nombres « récalcitrants ». La longueur de la suite 27 a amené les élèves à réaliser que l'espace du support TNI serait insuffisant pour y inscrire tous les termes et l'idée de réaliser une grande affiche sur papier a été lancée.

Troisième séance :

Au préalable, l'enseignante de la classe a repris les travaux de chaque binôme et reporté les suites obtenues sur un nouveau graphe pour assurer la lisibilité de l'ensemble. Un code de couleur a été utilisé pour matérialiser l'avancée des travaux au fil des séances : le graphe de la première séance a été écrit en noir, les suites traitées au cours de la seconde en rouge et celles rajoutées au cours de la dernière en bleu puis en vert. Cette utilisation de couleurs différentes peut paraître anodine mais dans ce chantier de calcul étalé dans le temps, elle a permis à chacun de se repérer dans l'avancée du travail collectif et de prendre des repères. L'organisation spatiale du graphe a été discutée en particulier pour le positionnement de la suite de 27.

Ce graphe est projeté, commenté (chacun est invité à y retrouver les suites traitées) et la liste des nombres non encore traités est établie. Pour cela on utilise le tableau de nombres distribué lors de la deuxième séance.

C'est sur ces nombres que le chantier numérique a été de nouveau lancé, toujours par binômes. Ces ateliers ont fonctionné alors en autonomie car en parallèle, d'autres groupes ont travaillé sous la conduite de l'enseignante à la résolution d'autres énigmes mathématiques et à la communication de leur démarche et de leurs résultats à leurs correspondants via l'espace numérique de travail de la classe. Les binômes se sont investis avec enthousiasme et ont fait preuve d'une organisation sans faille sans qu'il soit nécessaire d'intervenir : chaque groupe inscrit au tableau le nombre qu'il traite, gère ses calculs, compare la suite trouvée avec celle d'un autre binôme qui a traité le même nombre. Pour favoriser l'autonomie, un fichier Excel donnant pour chaque nombre sa suite a été mis à leur disposition sur l'ENT de la classe. Plusieurs groupes y ont eu recours spontanément pour vérifier les termes de leur suite, d'autres n'ont pas jugé utile de s'y référer, confiants dans l'exactitude de leurs calculs réalisés à l'aide de la calculatrice.

Les élèves ont régulièrement consulté l'affiche pour envisager la façon de positionner leur suite dans le graphe. À cette étape de l'étude la difficulté la plus conséquente a été celle qui consistait à placer correctement la nouvelle suite trouvée dans le graphe, celui-ci s'étant considérablement étoffé. Sur ce point précis, l'aide de l'enseignante a été nécessaire.

Quelle satisfaction alors pour les élèves à la fin de ce travail de pouvoir affirmer que la propriété observée au début de l'étude était vraie pour tous les nombres de 1 à 99. Beaucoup se sont adonnés à une longue contemplation du graphe. La question : « Mais, pourquoi trouve-t-on toujours 4,2, 1 ? » a très vite émergé.

Il nous a semblé alors important, pour clore cette étude d'expliquer aux élèves que la question de savoir si pour tout nombre entier pris au départ, la suite se terminait par 4,2 et 1 restait une question ouverte ainsi que celle qui consistait à comprendre pourquoi cela constituait un défi encore actuel pour les mathématiciens. Certains élèves ont suggéré « qu'avec les ordinateurs ça devait être facile » et nous avons expliqué qu'une chose était de vérifier que la propriété était vraie pour certains nombres et qu'une autre était de prouver que cela était vrai pour n'importe quel nombre aussi grand soit-il... Suite à cette remarque, un élève Alexis (élève effectuant un second CM2 et dont la motivation pour les apprentissages est toute nouvelle) a cherché à la maison la suite obtenue en partant de 1 256 250 146 (cf Annexes) ! Son travail a été valorisé comme il se devait et Alexis en a retiré une grande fierté !

Ce qui ressort de ces trois séances :

- l'implication et la motivation de tous les élèves même de ceux dont les compétences calculatoires sont plus fragiles. Tous se sont investis dans la durée pour mener à bien ce chantier de calcul inhabituel par rapport aux exercices traditionnels qui ne nécessitent que deux ou trois calculs consécutifs,
- la qualité des échanges entre pairs et les efforts réalisés lors de ces échanges pour argumenter et convaincre,
- la curiosité des enfants qui ont manifesté un désir d'en savoir plus,
- une ouverture culturelle sur le monde des sciences et des mathématiques en particulier.

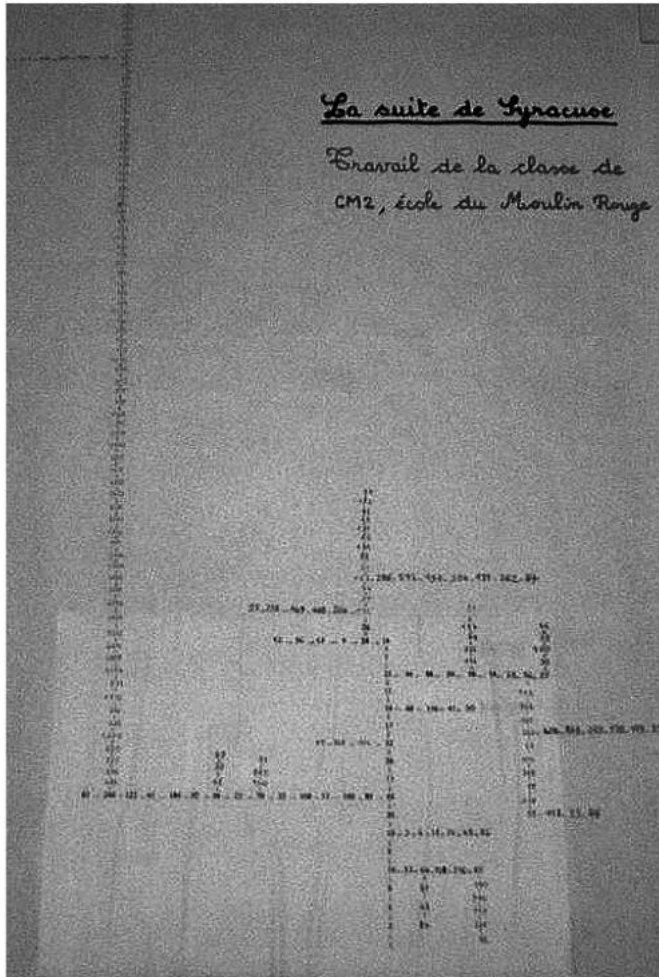
... Et pour nous, le sentiment d'un moment de mathématiques vivantes partagé avec les élèves !

Références :

- Les défis-problèmes proposés par la commission départementale « mathématiques » du groupe compétence 3 de l'Inspection Académique de Vendée sont accessibles sur le site : http://www.ia85.ac-nantes.fr/39768776/0/fiche___pagelibre/&RH=1225890334624
- Au sujet de la suite de Syracuse :
 - http://fr.wikipedia.org/wiki/Conjecture_de_Syracuse
 - « Aventures avec votre calculateur », Lennart Rade et Burt A.Kaufman (adapté par Maurice Glaymann) Editions CEDIC. 1979.
 - « Mathématiques élémentaires d'un point de vue algorithmique » de Arthur Engel (adapté par Daniel Reisz) Editions CEDIC. 1979.

Annexes :

L'affiche réalisée dans la classe :



Le travail d'Alexis :

Nombre choisi au départ : 1 256 250 146

628 125 073 – 1 884 375 220 – 942 187 610 – 471 093 805 – 1 413 281 416 –
 706 640 708 – 353 320 354 – 176 660 177 – 529 980 532 – 264 990 266 –
 132 495 133 – 397 485 400 – 198 742 700 – 99 371 350 – 49 685 675 –
 149 057 026 – 74 528 513 – 223 585 540 – 111 792 770 – 55 896 385 –
 167 689 16 – 83 844 578 – 41 922 289 – 125 766 868 – 62 883 434 –
 31 441 717 – 94 325 152 – 47 162 576 – 23 581 288 – 11 790 644 –
 5 895 322 – 2 947 661 – 8 842 984 – 4 421 492 – 2 210 746 – 1 105 373 –
 3 316 120 – 1 658 060 – 829 030 – 414 515 –
 1 243 546 – 621 773 – 1 865 320 – 932 660 – 466 330 – 233 165 – 699 496 –
 349 748 – 174 874 – 87 437 –
 262 312 – 131 156 – 65 578 – 32 789 – 98 368 – 49 184 – 24 592 – 12 296 – 6 148 –
 3 074 –
 1 537 – 4 612 – 2 306 – 1 153 – 3 460 – 1 730 – 865 – 2 596 – 1 298 – 649 –
 1 948 – 974 – 487 – 1 462 – 731 – 2 194 – 1 097 – 3 292 – 1 646 – 823 –
 2 470 – 1 235 – 3 706 – 1 853 – 5 560 – 2 780 – 1 390 – 695 – 2 086 – 1 043 –
 3 130 – 1 565 – 4 696 – 2 348 – 1 174 – 587 – 1 762 – 881 – 2 644 – 1 322 –
 661 – 1 984 – 992 – 496 – 248 – 124 – 62 – 31 – 94 – 47 –
 142 – 71 – 214 – 107 – 322 – 161 – 484 – 242 – 121 – 364 –
 182 – 91 – 274 – 137 – 412 – 206 – 103 – 310 – 155 – 466 –
 233 – 700 – 350 – 175 – 526 – 263 – 790 – 395 – 1 186 – 593 –
 1 780 – 890 – 445 – 1 336 – 668 – 334 – 167 – 502 – 251 – 754 –
 377 – 1 132 – 566 – 283 – 850 – 425 – 1 276 – 638 – 319 – 958 –
 479 – 1 438 – 719 – 2 158 – 1 079 – 3 238 – 1 619 – 4 858 – 2 429 – 7 288 –
 3 644 – 1 822 – 911 – 2 734 – 1 367 – 4 102 – 2 051 – 6 154 – 3 077 – 9 232 –
 4 616 – 2 308 – 1 154 – 577 – 1 732 – 866 – 433 – 1 300 – 650 – 325 –
 976 – 488 – 244 – 122 – 61 – 184 – 92 – 46 – 23 – 70 –
 35 – 106 – 53 – 160 – 80 – 40 – 20 – 10 – 5 – 16 –
 8 – 4 – 2 – 1 !

Alexis a essayé avec un deuxième nombre : 1 032.