Les problèmes de l'APMEP

Les propositions de problèmes, solutions ou commentaires, sont à envoyer à
Max HOCHART
13, rue des Garennes
63 800 Cournon d'Auvergne
ou
hochartmax@yahoo.fr

Énoncés des nouveaux problèmes

Problème 505–1 (Michel Bataille (Rouen))

Montrer que si a, b, c sont des réels strictement positifs vérifiant $abc = 1$, alors

$$2+\frac{3}{a+b+c}\leq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leq\frac{3}{4}+\frac{(a+b+c)^2}{4}.$$

Problème 505–2 (Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques))

Après une soirée dans un pub, n lords récupèrent leurs chapeaux au vestiaire de façon aléatoire. À la sortie du pub, la fraîcheur de la nuit leur permet de retrouver un peu leurs esprits et ils décident de continuer la fête. Chaque lord pose ses mains sur les épaules de celui qui porte son chapeau. Se forment ainsi des chenilles fermées (où un lord portant son propre chapeau forme une chenille à lui tout seul). Calculer l'espérance et la variance du nombre de chenilles.

Problème 505–3 (Ghali Lalami (Marrakech))

Calculer

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x}\left(\int_0^x\frac{\cos(x-y)-\cos(x)}{y}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$

Problème 505–4

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$ connexe par arcs. Montrer que K ne peut pas s'écrire comme une réunion dénombrable disjointe de fermés (non triviale, c'est à dire autre que K = K). Ici, dénombrable signifie finie ou infinie dénombrable.

Solutions des problèmes antérieurs

Problème 497–3 (Question de Georges Lion)

Quel est le lieu géométrique des points M intérieurs à un parallélogramme ABCD et tels que les angles AMB et DMC soient supplémentaires ?

Réponses de Maurice Bauval (Versailles), Jean-Claude Carréga (Lyon), Bernard Collignon (Coursan), François Duc (Orange), Allain Perron (Clelles), Georges Lion (Wallis), Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques).

Soit M un point intérieur au parallélogramme et Δ la droite parallèle à (AB) passant par M. Pour M hors de [CA], soit $\overrightarrow{MX}$ du même côté que (AB) de Δ et tel que $(\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MX}) = (\overrightarrow{MX},\overrightarrow{MA})$.

De même, pour M hors de [DB], soit $\overrightarrow{MY}$ du même côté que (CD) de Δ et tel que $(\overrightarrow{MD},\overrightarrow{MY}) = (\overrightarrow{MY},\overrightarrow{MC})$.

De là, on déduit d'abord que (MX) (resp. (MY)) est sécante avec [AC] (resp. sécante avec [DB]), puis

$$2\,(\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MX}) = (\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MA})$$

et

$$2\,(\overrightarrow{MY},\overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{MD},\overrightarrow{MB})$$

En ajoutant membres à membres :

$$\begin{aligned} 2(\overrightarrow{MY},\overrightarrow{MX}) &= (\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{MD},\overrightarrow{MB}) + 2(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}) \\ &= (\overrightarrow{MD},\overrightarrow{MC}) + (\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}) \\ &= S \end{aligned}$$

où S est réel défini modulo 2π. D'où :

$$(\overrightarrow{MY},\overrightarrow{MX}) \equiv \frac{S}{2} \pmod{\pi}.$$

Donc la condition « $\widehat{AMB}$ et $\widehat{DMC}$ sont supplémentaires » est équivalente à la condition « (MX) et (MY) sont perpendiculaires ».
De cela, on déduit le point suivant : si M est hors de (DB) (resp. hors de (AC)), alors (MX) (resp. (MY)) est bissectrice extérieure de $\widehat{DMB}$ (resp. de $\widehat{AMC}$) et (MX) (resp. (MY)) ne rencontre pas [DB] (resp. ne rencontre pas [AC]). Cela étant, distinguons trois cas :

1) Si la droite (MX) est perpendiculaire à la droite (CA), la droite (MX) est la médiatrice du segment [CA] et passe par le centre O $\in$ [DM]. Le point M est sur (DB), les diagonales de ABCD sont perpendiculaires. Donc ABCD est un losange.

2) Si la droite (MY) est perpendiculaire à la droite (DB), on prouve que de même que

le point M appartient au segment [AC], les droites (CA) et (DB) sont perpendiculaires, c'est-à-dire que ABCD est un losange.

3) Il reste à étudier le cas où la droite (MX) n'est ni parallèle ni perpendiculaire à la droite (AC) et la droite (MY) n'est ni perpendiculaire ni parallèle à la droite (DB).

L'hyperbole équilatère de diamètre [AC] ayant une asymptote parallèle à (MX) a aussi une deuxième asymptote parallèle à (MY) et de même l'hyperbole équilatère de diamètre [BD] d'asymptote parallèle à (MY) a aussi une autre asymptote parallèle à (MX). Ces deux hyperboles ont le même centre, les mêmes asymptotes et un point commun M. Elles sont donc identiques et il s'agit de l'hyperbole ayant son centre au centre du parallélogramme et ses asymptotes parallèles aux bissectrices intérieures des angles $\widehat{\mathrm{ADC}}$ et $\widehat{\mathrm{DAB}}$ respectivement.

Réciproquement, dans le cas du losange, les symétries axiales de ce quadrilatère impose au lieu recherché d'être la réunion des deux segments diagonaux.

Sinon, si le point M appartient à l'hyperbole qui a été définie ci-dessus, les bissectrices de $\widehat{\mathrm{AMC}}$ et $\widehat{\mathrm{BMD}}$ sont deux à deux perpendiculaires et l'on a vu que cela entraîne la condition de supplémentarité de l'énoncé.

Le lieu demandé est donc formé des deux arcs de cette hyperbole situés à l'intérieur du parallélogramme.

Remarque : À partir de l'égalité $\widehat{\mathrm{MBC}} = \widehat{\mathrm{MDC}}$, démontrée dans le bulletin 491 à propos d'un exercice posé aux olympiades canadiennes, on peut noter que les droites (BM) et (DM) sont en relation homographique et que par conséquent leur point d'intersection décrit une conique dont les directions asymptotiques sont celles des bissectrices de $\widehat{\mathrm{ABC}}$.

D'où pour le lieu recherché ci-dessus la réunion des diagonales lorsque ABCD est un losange, une hyperbole équilatère sinon.

Problème 497–1 (Question de Fernand Canonico)

Caractériser (par exemple par leurs valuations p-adiques) les entiers pouvant s'écrire $2a^2 + 3b^2$ avec $a, b \in \mathbb{N}$.

Réponse de Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques).

I - Premières propriétés

On étudie conjointement les ensembles
$\mathrm{A} = \{2x^2 + 3y^2 \mid (x, y) \in \mathbb{Z}^2\}$ et $\mathrm{B} = \{x^2 + 6y^2 \mid (x, y) \in \mathbb{Z}^2\}$.

Ceci est motivé par les résultats suivants, valable pour tout entier naturel n :

1. n appartient à A si et seulement si $2n$ appartient à B ;
2. n appartient à B si et seulement si $2n$ appartient à A;
3. n appartient à A si et seulement si $3n$ appartient à B ;
4. n appartient à B si et seulement si $3n$ appartient à A.

Le premier point résulte de l'égalité

$$2\left(2x^2+3y^2\right)=\left(2x\right)^2+6y^2,$$

et les points suivants se démontrent de la même façon.

Par ailleurs, pour tout entier n et tout entier d, on vérifie facilement que

1. n appartient à A si et seulement d^2n appartient à A ;
2. n appartient à B si et seulement d^2n appartient à B.

Il suffit donc de chercher dans A et B les entiers impairs, non multiples de 3, sans facteur carré, ce que l'on fait désormais. On note A′ (resp. B′) l'ensemble des éléments de A (resp. de B) de cette forme.

On commence par montrer que les ensembles A′ et B′ sont disjoints. En effet, les carrés modulo 8 sont 0, 1, 4 donc $2x^2 + 3y^2$ vaut 0, 2, 3, 4, 5 ou 6 modulo 8. Si $2x^2 + 3y^2$ est dans A′, il vaut 3 ou 5 modulo 8. Les carrés modulo 3 sont 0 et 1, donc $2x^2 + 3y^2$ vaut 0 ou 2 modulo 3. Si $2x^2 + 3y^2$ est dans A′, il vaut 2 modulo 3. Finalement, si $2x^2 + 3y^2$ est dans A′, il vaut 5 ou 11 modulo 24. On montre de même que si $x^2 + 6y^2$ est dans B′, il vaut 1 ou 7 modulo 24, ce qui montre que A′ et B′ sont effectivement disjoints.

II - Formes quadratiques de discriminant −24

On considère toutes les formes quadratiques définies positives

$$(x,y)\mapsto ax^2+bxy+cy^2,$$

avec

$$a,c\in\mathbb{N}^*,\quad b\in\mathbb{Z},\quad \Delta=b^2-4ac=-24.$$

À une telle forme est associée la matrice

$$\mathrm{M}=\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$$

de telle sorte que

$$ax^2+bxy+cy^2=(x,y)\mathrm{M}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Deux formes quadratiques q et q' sont équivalentes si leurs matrices M et M′ vérifient

$$\mathrm{M}'={}^t\mathrm{PMP},$$

où $\mathrm{P}\in\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$, c'est-à-dire que M est une matrice 2×2, à coefficients entiers, de déterminant ± 1. Cela signifie que $q' = q \circ f$ où f est un isomorphisme du $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}^2$.

Les images de $\mathbb{Z}^2$ par deux formes quadratiques équivalentes sont les mêmes. Les deux formes définissant A et B ne sont donc pas équivalentes.

On va montrer que toute forme quadratique définie positive, de déterminant -24, est équivalente à l'une de nos deux formes.
Toute forme quadratique est équivalente à une forme q dont le premier coefficient est le minimum de l'ensemble des valeurs strictement positives prises par q. En effet, il suffit de choisir pour f un isomorphisme qui transforme (1, 0) en un couple antécédent de a par q.

La forme quadratique de matrice $\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$ est équivalente à celle de matrice $\begin{pmatrix} a & -b/2 \\ -b/2 & c \end{pmatrix}$, en prenant $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, ce qui permet de supposer $b \geq 0$.
Soit $b = 2an + r$ avec $0 \leq r < 2a$, la division euclidienne de b par $2a$. En choisissant $P = \begin{pmatrix} 1 & -n-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ si $r \leq a$, et $P = \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ si $a < r \leq 2a$, on obtient une matrice $\begin{pmatrix} a & b'/2 \\ b'/2 & c' \end{pmatrix}$ d'une forme équivalente à celle de la matrice $\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$ qui vérifie $|b'| \leq a$. Comme c' est une valeur prise par la forme quadratique, on a l'inégalité $a \leq c'$. Mais alors

$$-24 = b'^2 - 4ac' \leq -3a^2,$$

et donc $0 < a \leq 2$. Les deux seules possibilités sont donc

$$a = 1,\ b' = 0,\ c' = 6,$$

ou bien

$$a = 2,\ b' = 0,\ c' = 3.$$

III - Résidus quadratiques

Si p est un nombre premier impair et n un entier non multiple de p, le symbole de Legendre $\left(\frac{n}{p}\right)$ vaut 1 si n est un carré modulo p et vaut -1 sinon. Classiquement, si p est un nombre premier distinct de 2 et 3,

$$\left(\frac{-6}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{2}{p}\right)\left(\frac{3}{p}\right).$$

Or, on sait(1) que

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}},$$

(1) Pour plus de précisions sur le symbole de Legendre et la réciprocité quadratique, on pourra consulter le « Cours d'Arithmétique » de Jean-Pierre Serre, publié aux PUF.

$$\left(\frac{2}{p}\right)=(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$$

et la loi de réciprocité quadratique donne

$$\left(\frac{3}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{3-1}{2}}\left(\frac{p}{3}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{p}{3}\right).$$

Ainsi,

$$\left(\frac{-6}{p}\right)=(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}\left(\frac{p}{3}\right).$$

On en déduit que pour un nombre premier congru à 1, 5, 7 ou 11 modulo 24, l'entier -6 est un carré modulo p.
Plus généralement, pour tout entier n, produit de nombres premiers (deux à deux distincts) de ce type, -6 est un carré modulo n. Il existe donc des entiers positifs b et c tels que

$$-6 = b^2 - cn.$$

La forme quadratique $nx^2 - 2bxy + cy^2$ est donc de discriminant -24. Elle prend la valeur n en $(x, y) = (1, 0)$. Suivant la classe d'équivalence de cette forme, le nombre n appartient à l'ensemble A′ ou B′.
Réciproquement, si une forme quadratique $ax^2 + 2bxy + cy^2$ de discriminant -24 prend une valeur n, divisible par un facteur premier p distinct de 2 et 3, mais non divisible par p^2, alors

$$a^2x^2+2abxy+acy^2=(ax+by)^2+6y^2\equiv 0 \mod p.$$

La classe de y est inversible dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, sinon n serait divisible par p^2. Donc la classe de -6 est un carré dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et p est congru à 1, 5, 7 ou 11 modulo 24.

IV - Conclusion

Soit P l'ensemble des nombres premiers congrus à 5 ou 11 modulo 24 et soit Q l'ensemble des nombres premiers congrus à 1 ou 7 modulo 24
Tout entier strictement positif n s'écrit $n = d^2m$, où m est sans facteur carré.
Alors, n appartient à A ∪ B si et seulement si la décomposition en facteurs premiers de m ne comporte que des facteurs de P ∪ Q ∪ {2, 3}, c'est-à-dire si

$$m = 2^\alpha 3^\beta p_1 \dots p_j q_1 \dots q_k,$$

où α, β sont dans {0, 1} et où $p_1, \dots, p_j$ sont des éléments distincts de P et $q_1, \dots, q_k$ sont des éléments distincts de Q.
Le produit de deux éléments de B est encore dans B. Le produit de deux éléments de A est dans B. Le produit d'un élément de A et d'un élément de B est dans A.
Finalement, le nombre n appartient à A si $\alpha + \beta + j$ est pair et appartient à B si $\alpha + \beta + j$ est impair.