

Solution graphique de trois problèmes d'optimisation géométrique

George Lion

Là où la raison, comme un souffle, nous porte, là nous devons aller.

(Platon, La République)

Introduction

Remarquons d'abord que le qualificatif *graphique* peut être employé dans plusieurs acceptions. Par exemple on peut trouver une solution approchée d'une équation en observant le point d'intersection d'une droite avec la courbe représentative d'une fonction. Par ailleurs pour étudier une suite on peut faire appel à sa représentation *graphique en chemin* et cette méthode, sans donner la certitude, est cependant beaucoup plus convaincante que le calcul des dix premières valeurs de la suite. Le rôle d'un graphique peut être aussi de suggérer l'introduction de courbes non données a priori et dont les propriétés fourniront les arguments indispensables à l'élaboration d'une démonstration. Il en sera ainsi dans ce qui suit.

Ci-dessous on étudie les trois problèmes classiques suivants :

- 1) Parmi les triangles inscrits dans un cercle donné trouver ceux dont l'aire est maximum.
- 2) Parmi les triangles d'aire donnée trouver ceux dont le périmètre est minimum.
- 3) Un segment $[BC]$ étant donné extérieurement et perpendiculairement à une droite \mathcal{D} , en quel point M de \mathcal{D} l'angle \widehat{BMC} est-il maximum?

Sachant que les réponses à ces questions sont bien connues, c'est seulement la survenue des méthodes graphiques dans les programmes récents des lycées qui m'a décidé à les considérer sous l'angle de ces méthodes. Pour les trois problèmes on s'est efforcé de suivre des cheminements de preuve semblables : obtention de conditions nécessaires d'extrémum le plus directement possible puis, la route ayant ainsi été balisée, reconnaissance des conditions suffisantes.

Les courbes intervenant ci-dessous sont des parties des courbes représentatives de la fonction inverse d'une part, de fonctions du second degré d'autre part. Ces fonctions sont au programme de la classe de Seconde et leurs dérivées sont au programme de la classe de Première. Les tangentes à ces courbes ayant donc été explicitement définies, la forme littérale de leurs équations ne suffit pas à contredire le caractère élémentaire de l'argumentation angulaire mise en œuvre **ensuite**.

Cinq remarques classées « Hors programmes » peuvent intéresser des lecteurs curieux. Les autres lecteurs pourront les éviter sans dommage car leur contenu n'intervient pas dans la cohérence du texte lui-même.

Le texte imprimé accompagné des figures fixes classiques est suivi d'animations en rapport avec les problèmes posés. Ces animations sont présentées par J. Moussa et Marc Roux à l'intention des lecteurs familiers avec les techniques de la géométrie dynamique,

I. Triangles inscrits dans un cercle et d'aire maximum

Soit \mathcal{C} un cercle du plan de rayon 1. Par abus de langage on dira que \mathcal{C} est la « *contrainte* » du problème.

Propriété préliminaire : *Pour tout triangle inscrit dans \mathcal{C} et non équilatéral il existe un triangle isocèle inscrit dans \mathcal{C} et d'aire strictement plus grande.*

Démonstration : On peut supposer $AB \neq AC$. Notons A' le milieu de l'arc \widehat{BC} contenant A .

De $A' \neq A$ on déduit : $d(A', BC) > d(A, BC)$, d'où : aire $A'BC >$ aire ABC .

De cette propriété on déduit :

- La question de l'existence d'un triangle inscrit dans \mathcal{C} et d'aire maximum pourra être restreinte à l'ensemble des triangles isocèles.
- Tout triangle inscrit dans \mathcal{C} et d'aire maximum (s'il en existe) est **nécessairement** équilatéral.

Théorème : *Les triangles inscrits dans \mathcal{C} d'aire maximum sont les triangles équilatéraux.*

Démonstration : 1) Introduisons un repère orthonormé d'axes Ax, Ay tel que les coordonnées du centre O de \mathcal{C} soient $(0,1)$. On note \mathcal{C}_1 l'intersection de \mathcal{C} et du premier quart de plan ouvert.

Soit k un nombre > 0 et \mathcal{H}_k la courbe représentative de la fonction h_k définie dans $]0, +\infty[$ par $h_k(x) = \frac{k}{x}$. Remarquant que $\mathcal{H}_k = \left\{ (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \mid xy = k \right\}$ on dira que \mathcal{H}_k est la *ligne du niveau k* pour le produit xy .

De $h'_k(x) = -\frac{k}{x^2}$, on tire l'équation de la tangente \mathcal{T}_a à \mathcal{H}_k en le point d'abscisse $a > 0$:

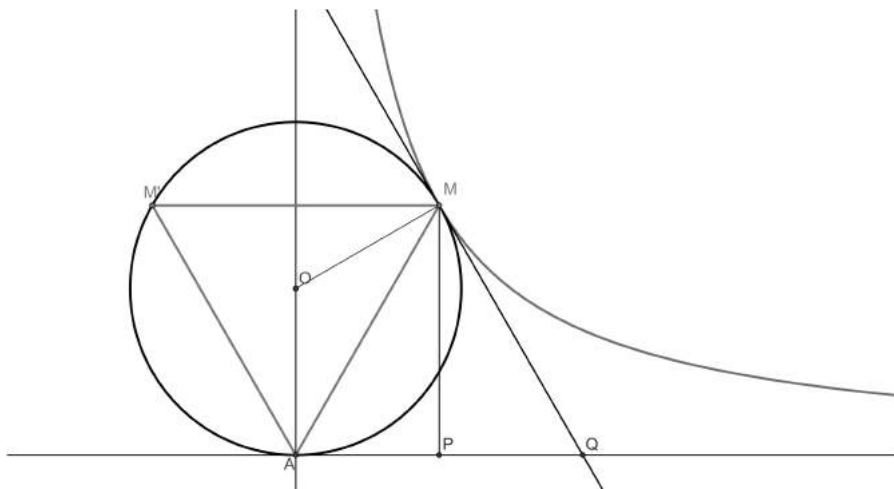
$$y = -\frac{k}{a^2}(x-a) + \frac{k}{a} = -\frac{kx}{a^2} + \frac{2k}{a}.$$

Sur \mathcal{H}_k et sur \mathcal{T}_a soit deux points de même abscisse $x > 0$. Calculons la différence de leurs ordonnées :

$$\frac{k}{x} - \left(-\frac{kx}{a^2} + \frac{2k}{a} \right) = \frac{k}{x} \left(1 + \frac{x^2}{a^2} - 2\frac{x}{a} \right) = \frac{k}{x} \left(1 - \frac{x}{a} \right)^2 \geq 0.$$

On peut traduire la situation **graphiquement** en écrivant : *La courbe de niveau \mathcal{H}_k est située au dessus des tangentes à \mathcal{H}_k . A fortiori l'ensemble $\left\{ (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \mid xy > k \right\}$*

l'est aussi (strictement). (voir figure ci-dessous).



2) On s'intéresse aux triangles isocèles MAM' où M est un point de \mathcal{C}_1 de coordonnées x et $y > 0$ et M' le symétrique de M par rapport à l'axe (Ax) . L'aire d'un tel triangle est égale à xy .

Parmi ces triangles on distingue le triangle équilatéral $M_0AM'_0$ où $\widehat{M_0AM'_0} = 60^\circ$, qui est le seul à pouvoir être éventuellement d'aire maximum. On note (a, b) les coordonnées de M_0 . Ainsi $M_0 \in \mathcal{H}_{ab}$.

Notons Q le point d'intersection de la tangente en M_0 à la courbe \mathcal{H}_{ab} avec l'axe (Ax) et P le projeté orthogonal de M_0 sur (Ax) . Sachant que $h'_k(x) = -\frac{k}{x^2} = -\frac{h_k(x)}{x}$, les droites (AM_0) et (M_0Q) ont des coefficients directeurs opposés et la droite (M_0P) est la bissectrice de l'angle $\widehat{AM_0Q}$.

On peut écrire aussi $\widehat{AM_0P} = \widehat{M_0AO}$ (alternes-internes) et enfin $\widehat{M_0AO} = \widehat{OM_0A}$.

En rassemblant les relations on obtient $\widehat{OM_0Q} = 3\widehat{AM_0P} = 90^\circ$ d'après la définition de M_0 .

Les courbes \mathcal{C} et \mathcal{H}_{ab} sont tangentes en M_0 et situées de part et d'autre de leur tangente commune. D'où :

$$\left\{ (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \mid xy > ab \right\} \cap \mathcal{C}_1 = \emptyset.$$

Le maximum de l'aire des triangles est bien atteint pour $M = M_0$.

Remarque 1 (Hors programmes) : L'idée de rechercher le point en lequel la contrainte et la ligne de niveau sont tangentes a été généralisée à des fonctions de

plusieurs variables, par exemple pour résoudre des problèmes d'optimisation en mécanique et en économie. La méthode employée pour la recherche des conditions nécessaires d'extrémum a reçu alors le nom de méthode des *multiplicateurs de Lagrange*.

Dans ce qui précède on a pu conclure à l'existence d'un extrémum grâce à la position des deux courbes par rapport à leur tangente commune. La figure 1 fait apparaître que cette position favorable est due au fait que sur les deux courbes les convexités sont de sens opposés. La généralisation de cette idée a conduit aux méthodes de *l'optimisation convexe*.

II. Triangles d'aire donnée et de périmètre minimum

La méthode pour résoudre ce problème est assez voisine de celle qui a été utilisée pour le problème précédent. Techniquement une difficulté nouvelle provient de la reconnaissance des lignes de niveau du périmètre.

Propriété préliminaire : *Pour tout triangle non équilatéral il existe un triangle isocèle de même aire et de périmètre strictement plus petit.*

Démonstration : Supposons, par exemple, $AB \neq AC$, menons par A la droite Δ parallèle à (BC) et notons D le symétrique de B par rapport à Δ . Si Δ coupe (DC) en A' , on a $A'B = A'D = A'C$, donc A' est distinct de A et A n'appartient pas à (DC). Sachant $A' \in [DC]$ on peut écrire :

$$BC + A'B + A'C = BC + A'D + A'C = BC + DC < BC + AD + AC = BC + AB + AC.$$

Le périmètre de $A'BC$ est strictement plus petit que celui de ABC.

En sachant $d(A,BC) = d(A',BC)$, on obtient que les deux triangles sont de même aire.

De cette propriété on déduit :

- La question de l'existence d'un triangle d'aire donnée et de périmètre minimum pourra être restreinte à l'ensemble des triangles isocèles.
- Tout triangle d'aire donnée et de périmètre minimum (s'il en existe) est **nécessairement** équilatéral.

Théorème : *Les triangles d'aire donnée et de périmètre minimum sont les triangles équilatéraux.*

Démonstration : 1) On se restreint aux triangles MAM' où les points M et M' sont symétriques par rapport à (Ax) et dont l'aire est égale à 1. Si x et y sont les coordonnées de M, la contrainte du problème est donc que M appartienne à

$$\text{l'ensemble } \mathcal{H} = \left\{ (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \mid xy = 1 \right\}.$$

Le périmètre du triangle MAM' est égal à $2\left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$.

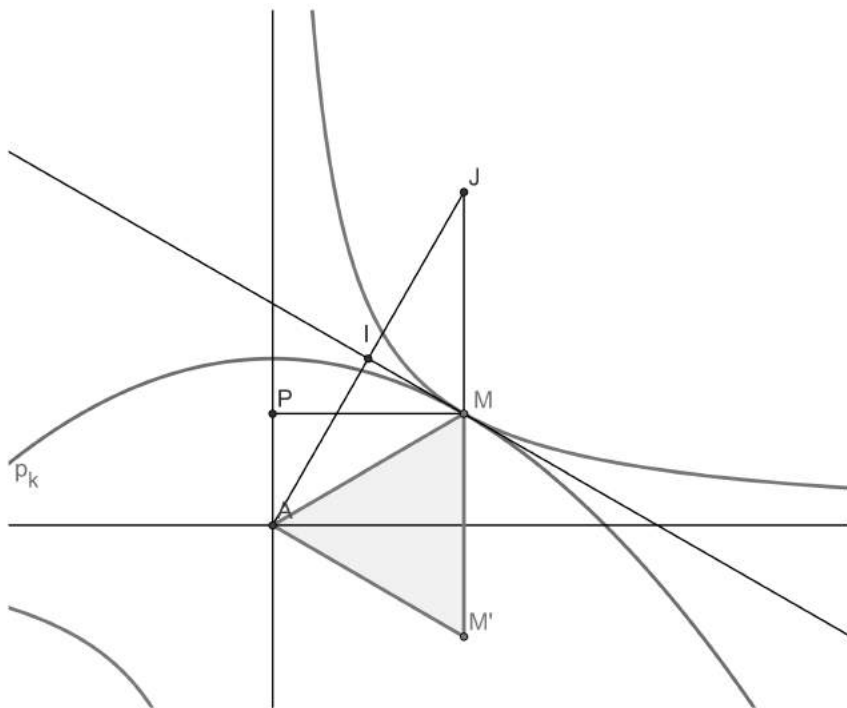
La condition pour que ce périmètre soit égal à un nombre $k > 0$ s'écrit :

$$2\sqrt{x^2 + y^2} = k - 2y.$$

Sachant $k > 0$ cette relation équivaut à $4(x^2 + y^2) = (k - 2y)^2$, ou encore à $4x^2 = k^2 - 4ky$ et à :

$$y = -\frac{x^2}{k} + \frac{k}{4}.$$

Notant cette fonction $p_k(x)$, la ligne du niveau k pour le périmètre de MAM' est la partie de la courbe représentative de p_k contenue dans le premier quart de plan ouvert. On la note \mathcal{P}_k .



Pour x donné $p_k(x)$ est fonction croissante de k . Pour $k > k'$ l'ensemble \mathcal{P}_k est au dessus de $\mathcal{P}_{k'}$.

De $p'_k(x) = -\frac{2x}{k}$, on tire l'équation de la tangente \mathcal{T}_a à \mathcal{P}_k en le point d'abscisse $a > 0$:

$$y = -\frac{2a}{k}(x - a) - \frac{a^2}{k} + \frac{k}{4} = -\frac{2a}{k}x + \frac{a^2}{k} + \frac{k}{4}.$$

Sur \mathcal{T}_a et sur \mathcal{P}_k soit deux points de même abscisse x positive. Calculons la différence de leurs ordonnées :

$$-\frac{2a}{k}x + \frac{a^2}{k} + \frac{k}{4} - \left(-\frac{x^2}{k} + \frac{k}{4}\right) = -\frac{2a}{k}x + \frac{a^2}{k} + \frac{x^2}{k} = \frac{(x-a)^2}{k} \geq 0.$$

On peut traduire la situation **graphiquement** en écrivant : La courbe de niveau \mathcal{P}_k est située en dessous des tangentes à \mathcal{P}_k . A fortiori l'ensemble $\{(x, y) \mid 0 < y < p_k(x)\}$ l'est aussi (strictement). (voir figure ci-dessus).

2) Parmi les triangles isocèles MAM' d'aire 1 il existe un triangle équilatéral $M_0AM'_0$ où $\widehat{M_0AM'_0} = 60^\circ$, qui est le seul à pouvoir être éventuellement de périmètre minimum.

On note (a, b) les coordonnées de M_0 . Notant k le périmètre de $M_0AM'_0$ on a $b = p_k(a)$ et rappelant l'équation de la tangente en M_0 à la courbe \mathcal{P}_k , il vient :

$$y = -\frac{2a}{k}x + \frac{a^2}{k} + \frac{k}{4},$$

d'où

$$y - \frac{k}{4} = -\frac{2a}{k}\left(x - \frac{a}{2}\right).$$

Par ailleurs soit J le point de coordonnées $\left(a, \frac{k}{2}\right)$, on a

$$M_0J = \frac{k}{2} - b = \sqrt{a^2 + b^2} = M_0A,$$

et d'après son équation la tangente en M_0 à \mathcal{P}_k passe par I milieu de [AJ].

Cette droite est donc la médiatrice de [AJ], ou encore la bissectrice de l'angle $\widehat{AM_0J}$.

Notons Q le point d'intersection de la tangente en M_0 à \mathcal{P}_k avec l'axe (Ay) . Sachant $\widehat{AM_0M'_0} = 60^\circ$, on a $\widehat{AM_0J} = 120^\circ$, d'où $\widehat{AM_0Q} = 60^\circ$. Si P est le projeté orthogonal de M_0 sur (Ay) , de $\widehat{AM_0P} = 30^\circ$ on déduit que (M_0P) est la bissectrice de $\widehat{AM_0Q}$. Donc (M_0Q) est aussi tangente à \mathcal{H} et les courbes \mathcal{H} et \mathcal{P}_k sont situées de part et d'autre de leur tangente commune. D'où :

$$\{(x, y) \mid 0 < y < p_k(x)\} \cap \mathcal{H} = \emptyset.$$

Le minimum du périmètre des triangles est bien atteint pour $M = M_0$.

Remarque 2 (Hors programmes) : L'ensemble \mathcal{P}_k est contenu dans une courbe appelée *parabole*. Le point A en est le *foyer*, la droite Δ d'équation $y = \frac{k}{2}$ en est la *directrice*.

La parabole est définie comme l'ensemble $\{M \mid MA = d(M, \Delta)\}$.

La propriété que la tangente à la parabole soit bissectrice de l'angle $\widehat{AM_0J}$ correspond au fait que des ondes dirigées dans la direction de l'axe Ay se réfléchissent sur la parabole en des ondes convergeant en le foyer A . De l'incendie des vaisseaux romains assiégeant Syracuse jusqu'au bûcher du Temple du Soleil cette propriété a fait le bonheur de toute une littérature romanesque. De nos jours on en retrouve une application dans la réception des ondes électromagnétiques.

Remarque 3 : La question des polygones de n côtés d'aire donnée et de périmètre minimum peut encore être résolue pour $n = 4$ par des moyens élémentaires : On démontre d'abord la propriété préliminaire suivante :

Pour tout quadrilatère non losange il existe un losange de même aire et de périmètre strictement plus petit.

La démonstration suit le schéma suivant : quadrilatère \rightarrow cerf-volant \rightarrow losange.

Ensuite en se restreignant aux losanges on montre que les *carrés* sont les quadrilatères d'aire donnée et de périmètre minimum. Pour cela deux méthodes élémentaires sont possibles :

a) Notant x et y les demi-diagonales d'un losange, on suppose l'aire donnée égale à 2 d'où $xy = 1$ et de la relation $x^2 + y^2 = 2xy + (x - y)^2$ on déduit que le périmètre $4\sqrt{x^2 + y^2}$ est minimum pour $x = y = 1$.

b) On peut aussi raisonner graphiquement en gardant les mêmes paramètres soumis à la contrainte $xy = 1$ et en introduisant les lignes de niveau du périmètre qui sont des quarts de cercle centrés à l'origine. Celle de ces lignes qui est tangente à la contrainte correspond à la valeur $4\sqrt{2}$ du périmètre, les deux courbes sont de part et d'autre de leur tangente commune et le quadrilatère de périmètre minimum est le carré de côté $\sqrt{2}$.

Pour $n > 4$ la solution du problème nécessite, à ma connaissance, l'emploi de méthodes non élémentaires.

III. Maximum de l'angle de vision d'un segment le long d'une demi-droite

Soit dans le plan un segment $[BC]$ de milieu I , un point H aligné avec B et C , hors de $[BC]$, et Δ une demi-droite d'origine H perpendiculaire à la droite (BC) .

On cherche pour quel point $M \in \Delta$ l'angle \widehat{BMC} est maximum.

Ici la droite Δ est la contrainte. Il reste à trouver les lignes de niveau de l'angle \widehat{BMC} pour M appartenant au demi-plan de frontière (BC) contenant Δ

Lemme : Soit un triangle ABC , Γ le cercle circonscrit à ABC . Soit u, v, w les mesures des angles 2 à 2 égaux formés par les tangentes à Γ respectivement avec

$[BC]$, $[AC]$, $[AB]$, extérieurement au triangle. Alors on a $u = \widehat{BAC}$ et de même pour v et w .

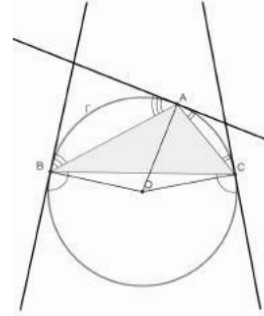
Démonstration : En se référant à la figure ci-contre et aux codes qui y sont indiqués (arc simple pour u , double pour v , triple pour w) on peut écrire :

$$v + \widehat{BAC} + w = w + \widehat{CBA} + u = u + \widehat{ACB} + v = 180^\circ,$$

d'où par addition :

$$2(u + v + w) = 540^\circ - (\widehat{BAC} + \widehat{CBA} + \widehat{ACB}) = 360^\circ.$$

Ainsi $u + v + w = 180^\circ = v + \widehat{BAC} + w$, qui donne l'égalité demandée.



Pour M appartenant au demi-plan limité par (BC) contenant Δ les lignes de niveau de l'angle \widehat{BMC} sont les arcs de cercle d'extrémités B et C . On les appelle « Arcs capables de l'angle \widehat{BMC} » et ils sont notés Γ_α . À deux angles différents correspondent deux arcs distincts.

Soit dans le demi-plan deux points M, N alignés avec B . Le théorème de l'angle extérieur au triangle MCN donne :

$$M \in]BN[\Leftrightarrow \widehat{BMC} > \widehat{BNC}.$$

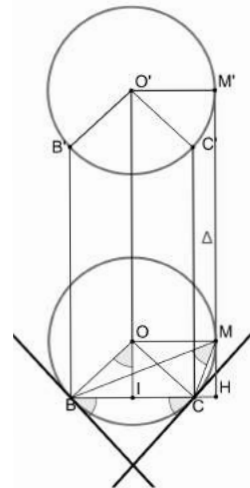
Ainsi l'arc capable Γ_α est intérieur à Γ_β si et seulement si $\alpha > \beta$.

Propriété préliminaire : Soit $M \in \Delta$ tel que le cercle circonscrit à BMC ne soit pas tangent à Δ . Alors il existe $M' \in \Delta$ tel que $\widehat{BM'C} > \widehat{BMC}$.

Démonstration : Le cercle circonscrit à BMC recoupe Δ en $N \neq M$ et le milieu M' de la corde $[MN]$ est intérieur à ce cercle. On a donc $\widehat{BM'C} > \widehat{BMC}$.

De cette propriété on déduit : La question de l'existence d'un maximum pour l'angle \widehat{BMC} pourra être restreinte au point M_0 de Δ en lequel l'arc capable est tangent à Δ .

Le centre O de cet arc est à l'intersection de la médiatrice de $[BC]$ avec le cercle de centre B de rayon IH (voir figure ci-contre).



Théorème : a) La valeur maximum de l'angle \widehat{BMC} pour $M \in \Delta$ est atteinte si M est le point M_0 en lequel Δ est tangente au cercle circonscrit à BMC .

b) Cette valeur maximum α est la mesure de l'angle aigu défini par $\sin \alpha = \frac{IB}{IH}$.

Démonstration : a) Posons $\alpha = \widehat{BM_0C}$. et montrons que α est le maximum de l'angle \widehat{BMC} pour $M \in \Delta$. En effet d'après ce que l'on sait des arcs capables on peut écrire :

$$\{M \mid \widehat{BMC} > \alpha\} \cap \Delta = \emptyset.$$

b) On a alors par perpendicularité $\alpha = \widehat{BOI}$ et $\sin \alpha = \frac{IB}{OB} = \frac{IB}{OM_0} = \frac{IB}{IH}$.

Remarque 4 (Hors programmes) : On se donne \mathcal{D} droite non parallèle et non perpendiculaire à (BC) et soit H (hors de $[BC]$) le point d'intersection de ces droites.

Le long de \mathcal{D} l'angle \widehat{BMC} tend vers 0 à l'infini et s'annule en H . Cet angle atteint donc un maximum sur chacune des demi-droites d'origine H en des points que l'on peut construire en utilisant des *homothéties* dont le centre est à l'intersection de \mathcal{D} et de la médiatrice de $[BC]$.

Remarque 5 (Hors programmes) : Revenons au problème résolu ci-dessus et supposons que la figure étudiée soit le plan d'un terrain de rugby dont les poteaux sont placés en B et C . Après qu'un essai a été marqué en H la transformation doit être tentée d'un point M de Δ et la probabilité de réussite est maximum lorsque l'angle \widehat{BMC} est maximum.