Qu'est-ce qu'un bon énoncé de bac ?
Analyse de l'exercice de spécialité de TS de Pondichéry 2013

Jacques Lubczanski

« Pondichéry est tombé ! » : cela ressemble à l'annonce d'une victoire militaire, mais non : c'est le texte du mail que j'ai reçu d'une collègue enseignant en Terminale, pour me dire d'aller récupérer sur le site de l'APMEP le tout premier sujet de Bac de la session 2013 ; il a été posé aux élèves du lycée français de Pondichéry, en avance de deux mois sur leurs camarades de la métropole.
Aussitôt dit aussitôt fait, et aussitôt posé l'exercice de spécialité à mes élèves, avec lesquels je finissais justement la partie « matrices » du nouveau programme.

EXERCICE 3 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

On étudie l'évolution dans le temps du nombre de jeunes et d'adultes dans une population d'animaux.

Pour tout entier naturel n, on note j_n le nombre d'animaux jeunes après n années d'observation et a_n le nombre d'animaux adultes après n années d'observation. Il y a au début de la première année de l'étude, 200 animaux jeunes et 500 animaux adultes. Ainsi $j_0 = 200$ et $a_0 = 500$.

On admet que pour tout entier naturel n on a :

$$\begin{cases} j_{n+1} = 0{,}125\, j_n + 0{,}525\, a_n \\ a_{n+1} = 0{,}625\, j_n + 0{,}625\, a_n \end{cases}$$

On introduit les matrices suivantes :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0{,}125 & 0{,}525 \\ 0{,}625 & 0{,}625 \end{pmatrix} \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ \mathrm{U}_n = \begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix}.$$

1.

a) Montrer que pour tout entier n, $\mathrm{U}_{n+1} = \mathrm{A} \times \mathrm{U}_n$.

b) Calculer le nombre d'animaux jeunes et d'animaux adultes après un an d'observation puis après deux ans d'observation (résultats arrondis à l'unité près par défaut).

c) Pour tout entier naturel n non nul, exprimer U_n en fonction de A^n et de U_0.

(*) Lycée Léon Blum, Créteil ; jacques.lubczanski@ac-creteil.fr

2. On introduit les matrices suivantes $Q = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -0{,}25 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   a) On admet que la matrice Q est inversible et que $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}1 & -0{,}06 \\ 0{,}1 & 0{,}14 \end{pmatrix}$.

   Montrer que $Q \times D \times Q^{-1} = A$.

   b) Montrer par récurrence sur n que pour tout entier naturel n non nul : $A^n = Q \times D^n \times Q^{-1}$.

   c) Pour tout entier naturel n non nul, déterminer D^n en fonction de n.

3. On admet que pour tout entier naturel n non nul,

$$A^n = \begin{pmatrix} 0{,}3 + 0{,}7 \times (-0{,}25)^n & 0{,}42 - 0{,}42 \times (-0{,}25)^n \\ 0{,}5 - 0{,}5 \times (-0{,}25)^n & 0{,}7 + 0{,}3 \times (-0{,}25)^n \end{pmatrix}$$

   a) En déduire les expressions de j_n et a_n en fonction de n et déterminer les limites de ces deux suites.

   b) Que peut-on en conclure pour la population d’animaux étudiée ?

À première vue, après une lecture rapide, cet exercice m’avait semblé facile. Une bonne façon de mettre en confiance mes élèves à l’approche de l’examen.
Mais au fur et à mesure que les élèves avançaient dans la recherche en classe de cet exercice, je découvrais avec eux des difficultés inattendues, qui ne les ont pas rassurés. Voici l’analyse que je fais de cet énoncé, déclinée en cinq questions : pour chacune d’entre elles, j’ai essayé de dépasser la simple critique, toujours facile, et d’élargir ma réflexion autour d’une question plus générale : qu’est-ce qu’un bon énoncé de bac ?

1. Le nombre d’animaux est-il un nombre entier ?

Mes élèves, après m’avoir demandé ce que signifiait l’expression « arrondis à l’unité près par défaut » qui ne leur était pas familière, car elle n’est plus guère utilisée, ont calculé et arrondi sans problème les valeurs de j_1 et a_1, puis se sont interrogés : pour calculer les nombres d’animaux au bout de deux ans, faut-il partir des valeurs arrondies ou des valeurs exactes trouvées pour j_1 et a_1 ? On ne trouve pas les mêmes résultats…

Il apparait donc que les suites (j_n) et (a_n) sont mal définies : j_n et a_n ne peuvent pas être à la fois des nombres d’animaux, c’est à dire des nombres entiers, et les valeurs non entières obtenues par les relations de récurrence. L’énoncé ne distingue pas entre la modélisation mathématique et l’interprétation qu’on peut en faire en arrondissant à l’entier inférieur le plus proche.

D'ailleurs le mot « modélisation » n'apparaît pas dans l'énoncé, ce que je regrette, d'autant que cet énoncé est un exemple de situation « pseudo-concrète », où les nombres proposés n'ont qu'un lointain rapport avec des nombres issus d'une situation réelle : ils ont été calculés « pour que ça tombe juste » (les matrices D et Q). Poser l'exercice comme un travail de modélisation permet de garder une distance critique par rapport aux résultats obtenus, et d'accepter que, le temps du calcul, des nombres d'animaux puissent ne pas être des nombres entiers.

2. Démontrer ou constater ?

La question se pose dès le début de l'exercice : *Montrer que pour tout entier naturel* n, $U_{n+1} = A \times U_n$. En effet, cette égalité est l'écriture matricielle des formules de récurrence données au début de l'énoncé. Y a-t-il ici quelque chose à démontrer ? Un résultat de cours à invoquer ? Après deux mois de travail sur les matrices, mes élèves ne savaient pas comment rédiger une réponse à cette question, pourtant censée être la plus facile, puisque c'est la première de l'exercice. Je leur ai proposé la rédaction suivante : « d'après la définition du produit des matrices, et les relations données par l'énoncé, on observe que les coefficients du produit $A \times U_n$ sont égaux aux coefficients de U_{n+1} ». Je n'ai pas l'impression de les avoir convaincus que cette phrase reflétait un véritable travail.

Ensuite (question 1.c), on demande d'*exprimer* U_n *en fonction de* A^n *et* U_0 : le verbe « exprimer » signifie-t-il qu'on attend seulement l'écriture $U_n = A^n \times U_0$, ou bien qu'il faut aussi la démontrer ? Auquel cas un raisonnement par récurrence est nécessaire, mais il n'est pas explicitement demandé. Et puis il me semble qu'une formulation plus pertinente aurait été de demander d'exprimer U_n en fonction de n, de A, et de U_0, qui sont les variables utilisées, plutôt qu'en fonction de A^n et U_0.
Plus loin (question 2.a), on demande de montrer que $Q \times D \times Q^{-1} = A$. Là encore, y a-t-il quelque chose à démontrer quand le résultat du calcul est donné à l'avance, et qu'on peut effectuer ce calcul à la calculatrice ? Faut-il faire semblant d'avoir effectué le calcul en posant l'opération dans la copie avec les coefficients des matrices, puis en donnant le résultat ? Ou bien dire qu'on a fait effectuer le produit de matrices à la calculatrice, et que le résultat a été confirmé par ce qui était affiché sur l'écran? On aurait sans doute pu, pour que les élèves aient quelque chose à faire, ne pas donner le résultat, d'autant que ce type d'exercice figure dans tous les manuels et a été cherché en classe de nombreuses fois par les élèves. En règle générale, les questions où on demande de vérifier un calcul numérique dont le résultat est donné dans l'énoncé me semblent difficiles à évaluer dans une copie, dès lors que ce calcul peut être effectué à la calculatrice, car le travail de l'élève est invisible pour le correcteur.

3. Faut-il faire un raisonnement par récurrence ?

Pour obtenir l'expression de A^n en fonction de l'entier n et des matrices Q et D, on demande explicitement un raisonnement par récurrence (question 2.b). Mais en toute rigueur, il aurait fallu aussi utiliser une récurrence dès la question 1.c, pour démontrer que $U_n = A^n \times U_0$, ainsi qu'à la question 2.c, pour déterminer la puissance n-ième de la matrice diagonale D.

Attend-on d'un élève qu'il prenne l'initiative d'un raisonnement par récurrence ? Jusqu'à présent ce n'était pas le cas : l'usage était de préciser quand ce type de raisonnement était demandé, et de façon corollaire, quand ce n'était pas demandé, c'est qu'on pouvait faire autrement. Mais quel que soit l'usage adopté, il faudrait qu'il soit cohérent : ou bien on demande chaque fois de faire une récurrence, ou bien on ne le précise jamais. Le flou de cet énoncé est très perturbant pour les élèves, d'autant qu'une bonne partie d'entre eux n'est pas à l'aise avec le raisonnement par récurrence, comme chaque collègue enseignant en Terminale S peut en témoigner d'expérience.

Enfin un raisonnement par récurrence est-il vraiment nécessaire pour cette question ? En effet, si $A = Q \times D \times Q^{-1}$, $A^n = Q \times D \times Q^{-1} \times \ldots \times Q \times D \times Q^{-1}$ où le produit $Q \times D \times Q^{-1}$ figure n fois de suite. On observe que d'abord il y a dans cette expression des produits $Q^{-1} \times Q$ qui se réduisent à l'identité, et ensuite qu'il reste alors $Q \times D \times D \times \ldots \times D \times Q^{-1}$, où D est multipliée par elle même n fois, soit finalement $A^n = Q \times D^n \times Q^{-1}$, ce qu'il fallait démontrer.

D'autre part, est-ce que l'élévation à la puissance n d'une matrice diagonale, obtenue en élevant à la puissance n tous ses coefficients, peut-être considérée comme un résultat du cours sur les matrices, au moins pour les matrices d'ordre 2 et 3 que les élèves manipulent lors des TP ? Les indications du programme officiel ne me semblent pas assez détaillées pour pouvoir répondre à cette question de façon définitive. Du coup, je ne sais pas ce qui est attendu en termes de rédaction pour cette question le jour de l'examen.

4. Comment faire calculer A^n à partir de A ?

La méthode classique pour élever à la puissance n une matrice est de la diagonaliser, c'est-à-dire de déterminer une matrice de changement de base Q telle que la matrice $D = Q^{-1} \times A \times Q$ soit diagonale. La recherche de la matrice Q passe par la détermination de vecteurs propres de la matrice A, travail qui me semble clairement au delà de ce qui est exigible d'un élève de TS le jour du Bac : donner la matrice Q dans l'énoncé est un choix raisonnable, d'ailleurs fait dans de nombreux manuels.

Donner aussi son inverse dans l'énoncé, quand il s'agit de matrices d'ordre 2 me semble plus discutable, car c'est un travail que les élèves peuvent faire, à la calculatrice ou même à la main. Pour ma part, j'ai inclus dans le cours sur les matrices les formules de l'inverse d'une matrice d'ordre 2, sous la forme d'une petite recette : échanger les termes diagonaux a et d, changer le signe des deux autres, et diviser le tout par $ad - bc$.

Une fois établies les formules de passage de A à D, puis de A^n à D^n et enfin de D^n à A^n , il ne reste plus qu'à élever D à la puissance n pour retrouver la matrice A^n. C'est la voie que prend l'exercice de Pondichéry, mais celui-ci s'arrête brutalement juste avant de retrouver A^n à partir de D^n, alors que tout a été fait dans ce but ! Les coefficients de A^n sont donnés au début de la question suivante, apparemment venus de nulle part.

Je suppose que cette incohérence mathématique ne faisait pas partie de l'énoncé initial, mais que celui-ci a été raccourci lors d'une relecture, sans doute pour réduire le temps de travail des élèves sur cet exercice. Même si on ne peut pas attendre d'un exercice d'examen qu'il développe complètement la situation étudiée, car il s'agit d'abord d'évaluer les acquis et les compétences des élèves en temps limité, on peut tout de même espérer qu'il respecte la démarche mathématique, quitte à admettre certains résultats pour gagner du temps. Ce n'est malheureusement pas le cas ici.

Enfin on peut remarquer que si on donne dans l'énoncé les coefficients de A^n, on pourrait alors remplacer tout le travail de diagonalisation par une démonstration par récurrence de l'expression des quatre coefficients de la matrice A^n : en effet, la difficulté technique se réduit alors à multiplier A^n par A, pour retrouver les coefficients de A^{n+1} : avec les données de l'énoncé, ce n'est pas très confortable, mais quitte à utiliser une modélisation dans un but exclusivement mathématique, on pourrait trouver d'autres données numériques plus simples à manipuler.

5. Passer à la limite dans A^n ou dans U_n ?

L'énoncé demande (question 3.b) d'exprimer les nombres j_n et a_n en fonction de n, à partir de l'expression de A^n et de U_0, autrement dit de calculer les coefficients de la matrice colonne U_n, pour étudier ensuite sa limite lorsque n tend vers l'infini. Or il est beaucoup plus simple de passer à la limite dans les coefficients de A^n avant de faire le produit par U_0. Autrement dit, si on appelle A' la matrice dont les coefficients sont les limites de ceux de A^n, la limite L de U_n est égale au produit $A' \times U_0$. Le produit de matrices ne met en jeu que des combinaisons linéaires : dans le cas de limites finies, comme ici, on peut sans problème passer à la limite avant de faire le produit.

La matrice limite L présente un gros intérêt aussi bien au plan théorique qu'au plan pratique : si on se demande ce qui se passe quand n tend vers l'infini dans l'égalité $U_{n+1} = A \times U_n$, on observe que si U_n admet une limite L, cette limite doit vérifier $L = A \times L$. L'état décrit par L s'appelle une répartition(1) stable de la transition décrite par la matrice A. Autrement dit la limite possible est forcément une répartition stable. On aurait pu en fin d'énoncé faire vérifier que la limite trouvée était une répartition stable, ce qui a un sens du point de vue de la modélisation.

Allons plus loin : $L = A \times L$ signifie que la répartition stable L est un vecteur propre pour la valeur propre 1. Or les valeurs propres de A sont les coefficients de la diagonale de D, et leurs puissances n-ièmes sont ceux de la diagonale de D^n. Pour que D^n, et alors aussi A^n, admettent une limite finie non nulle quand n tend vers l'infini,

(1) « L'état stable d'un système » fait partie des expressions couramment employées par les scientifiques, mais le terme « état » peut être ambigu dans ce type de question, car il désigne aussi un sommet dans un graphe probabiliste. Nous avons donc préféré utiliser ici le terme de « répartition ».

il faut et il suffit que 1 soit valeur propre, et que l'autre valeur propre q vérifie $-1 < q < 1$, en supposant que A n'est pas la matrice identité. C'est bien le cas dans cet énoncé, où $q = -0{,}25$. Dans le cas d'une marche aléatoire, les matrices de transition vérifient souvent cette condition, ce qui permet, par exemple en série ES, de chercher d'abord la répartition stable pour admettre ensuite qu'elle est la répartition limite.

Les situations étudiées en Terminale décrites par une relation matricielle du type $U_{n+1} = A \times U_n + B$ donnent lieu à la recherche d'une limite possible, qui débouche sur une répartition stable L vérifiant $L = A \times L + B$. La recherche de limites possibles obéit au même schéma pour les suites de matrices et pour les suites de nombres. C'est pourquoi j'ai pris le parti de parler à mes élèves de suites géométriques ou arithmético-géométriques de matrices, pour leur montrer la même notion à l'œuvre dans deux contextes différents. Je me suis fait en passant la remarque que s'il est classique de rechercher la limite possible d'une suite arithmético-géométrique de nombres pour ensuite l'étudier, il est moins classique de le faire pour une suite géométrique. Ce n'est pourtant pas inintéressant : $u_{n+1} = q \cdot u_n$ donne à la limite $\ell = q\ell$ soit $(1 - q)\ell = 0$: si la suite n'est pas constante (q différent de 1), la seule limite finie possible est 0.

Pour conclure : qu'est-ce qu'un bon énoncé de bac ?

Cette question est essentielle dans un enseignement problématisé comme celui des mathématiques ; les maths s'enseignent par les problèmes et par les exercices, auxquels les élèvent accèdent par un seul et unique intermédiaire : l'énoncé. Si je mets de coté les « problèmes ouverts », il me semble qu'un énoncé remplit trois fonctions : la première fonction est de présenter et de poser le problème ; la deuxième fonction est de proposer aux élèves un itinéraire de résolution du problème, décliné en une suite de questions, et la troisième fonction est de diviser le travail de l'élève en unités évaluables en termes de savoirs, de savoir-faire et de questionnements.

Ces trois fonctions, présentation, guidage et évaluation ne sont pas faciles à mettre en œuvre lors de la rédaction d'un énoncé. En particulier, le fait qu'il soit rédigé en français implique un style particulier, et surtout une part d'implicite, qui fait que les élèves ne comprennent pas toujours précisément ce qu'on attend d'eux. Nous avons une batterie de termes « métamathématiques » pour libeller les consignes usuelles : dans l'exercice de Pondichéry, on peut relever pas moins de six de ces termes : « montrer », « calculer », « exprimer », « déterminer », « déduire », « conclure ». Mais par exemple, on peut remarquer qu'il n'y a jamais « démontrer ». L'explicitation de ces termes fait partie du travail d'entraînement à l'examen, au détriment d'activités plus mathématiques que linguistiques ; je ne vois pas comment y échapper, si on ne veut pas se contenter de Q.C.M pour évaluer les compétences des élèves.

Une autre difficulté rencontrée lors de la conception et de la rédaction d'un énoncé est d'arriver à concilier la fonction de guidage et la fonction d'évaluation : chaque question est perçue par les élèves comme correspondant à peu près à la même quantité de travail, et donc à la même quantité de points. Il faudrait donc diviser la résolution du problème en étapes de difficultés et de temps de travail équivalents, ce qui est loin d'être évident, car tous les problèmes ne se prêtent pas à cette décomposition quasi-linéaire en questions successives de même taille. Enfin, un énoncé d'examen ajoute à ces difficultés celles du temps limité et de la progressivité sans blocage : d'où la nécessité éventuelle d'admettre certains résultats, et de faire en sorte que, pour répondre à une question, l'élève n'ait pas nécessairement besoin d'avoir su répondre à toutes les questions précédentes.

Compte tenu de toutes ces difficultés, il me semble qu'aucun énoncé d'examen ne devrait être considéré comme définitif ou simplement au point avant d'avoir été posé à des élèves, et d'avoir tenu compte de leurs réactions. Celui de Pondichéry ne fait pas exception, même si, comme tout sujet de Bac, il a sans doute été cobayé par un ou plusieurs enseignants. Cependant, sur une partie nouvelle d'un programme beaucoup moins détaillé que les précédents, j'aurais apprécié, comme sans doute la plupart des collègues enseignant en TS, un énoncé inattaquable au plan mathématique, et plus rassurant au plan didactique.