Approximation de $n!$ et formule de Stirling

Éric Trotoux(*)

Introduction

Cet article n'est pas une « activité clé en main » à proposer en TS sans accompagnement, mais seulement une suggestion fondée sur le nouveau programme de TS mis en place en 2012-2013 ; chacun pourra l'exploiter à sa guise. J'ai animé l'an passé pour mes collègues du lycée, une session d'appropriation de ce nouveau programme dont le but était, entre autres, de présenter le théorème de De Moivre - Laplace. C'est à la suite de cette présentation que j'ai souhaité rédiger une justification rigoureuse avec les outils du programme 2012-2013, de ce préalable au théorème de De Moivre - Laplace, qu'est la formule de Stirling. Non seulement une preuve rigoureuse, mais aussi une découverte la moins parachutée si possible, de cette formule, à proposer à des élèves de TS. La lecture du petit opus d'E. Lesigne « *Pile ou Face, Une introduction aux théorèmes limites du Calcul des Probabilités* » m'a suggéré une entrée possible sur ce sujet, sans utiliser de prérequis sur la notion de série ou de développement généralisé, ce qui est souvent le cas dans les travaux que l'on peut trouver classiquement sur $n!$. Ce problème très connu de l'approximation de $n!$ est abordable avec les connaissances du programme d'un bac scientifique (cf. Sujet bac C Centres étrangers 1994)(1).

Dans cette étude élémentaire, nous allons illustrer la mise en œuvre d'idées et de méthodes mathématiques intéressantes en soi, qui peuvent être réinvesties dans d'autres problèmes. Nous nous proposons d'obtenir une information quantitative (déduite d'une vision géométrique des valeurs en jeu et exprimée avec les fonctions disponibles en TS) sur la croissance de la suite factorielle et le résultat asymptotique dû à A. De Moivre et J. Stirling (vers 1730).

Prérequis du programme TS. Les fonctions logarithme népérien et exponentielle, les bases du calcul intégral, les théorèmes de convergence des suites réelles (existence de la limite pour les suites croissantes majorées, obtention de limite par encadrement.)

Deux idées à l'œuvre pour trouver une approximation de $n!$. D'une part, utiliser deux propriétés fondamentales de la fonction logarithme népérien : la fonction ln aplatit les fortes variations et transforme les produits en sommes. En effet

(*) Lycée C. De Gaulle Caen

(1) http ://www.apmep.asso.fr/IMG/pdf/CentresetrangersCjuin1994.pdf
Dans le problème, on justifie la formule de Stirling sans expliquer sa genèse, et l'on y établit que $\lim \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}$ est strictement positive.

le quotient $\frac{(n+1)!}{n!}$ tend vers plus l'infini, ce qui montre que la croissance de $n!$ est plus rapide que toute suite géométrique. D'où l'idée de s'intéresser à la suite $u_n = \ln(n!)$ dont le rapport de deux termes consécutifs tend vers 1.

D'autre part, écrire $u_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(k) = \sum_{k=2}^{n} \ln(k)$, d'où l'interprétation de cette somme comme approximation d'une intégrale que nous saurons expliciter.

Pour nous plonger dans le sujet, nous allons commencer par le dessert, à savoir justifier un encadrement asymptotiquement convergeant de $n!$ qui ouvre la porte à une preuve du théorème de De Moivre - Laplace. Le prix à payer pour cette gourmandise est d'accepter le parachutage d'une suite dont la provenance peut sembler obscure. Nous poursuivrons ensuite l'étude en dévoilant un cheminement possible conduisant à cette suite, par réalisation du programme annoncé dans le paragraphe précédent. Rien n'empêche ceux qui préfèrent débuter par le salé[2], d'intervertir l'ordre de lecture des deux parties largement indépendantes.

I – Encadrement de *n*!

Comme dans le sujet de Bac C 1994 précité, considérons la suite $w_n = n!n^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}\mathrm{e}^n$. Nous allons établir grâce à un encadrement lié à des aires de trapèzes, que cette suite w_n converge vers une limite finie C. C vaut $\sqrt{2\pi}$, ce que nous montrerons via la méthode des intégrales de Wallis. Nous présentons, en la simplifiant, une approche figurant dans la fin de l'article de H. Robbins[3] (cf. bibliographie) attribuée à Cesàro.

Nous avons

$$\ln\left(\frac{w_n}{w_{n+1}}\right) = \ln\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}\right] - 1 = \frac{2n+1}{2}\left(\ln(n+1) - \ln(n)\right) - 1.$$

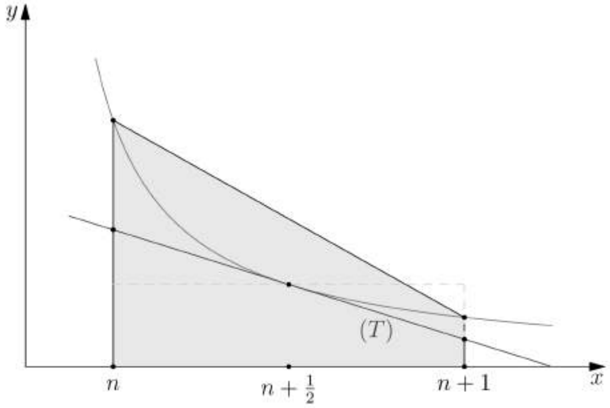
Nous cherchons maintenant à encadrer $\left(\ln(n+1) - \ln(n)\right)$ pour en déduire notre encadrement de $n!$.

L'encadrement de $\left(\ln(n+1) - \ln(n)\right)$ qui correspond à l'aire du domaine limité

(2) C'est le cas de l'auteur de l'article qui a ici composé avec la recommandation du comité de relecture du BV.

(3) Herbert Robbins y a établi l'encadrement $w_n = \mathrm{C}\mathrm{e}^{r_n}$ où $\frac{1}{12n+1} \leq r_n \leq \frac{1}{12n}$, en utilisant le développement en série de $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, puis une majoration et une minoration par des séries géométriques.

par la courbe de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$, l'axe (Ox), et les droites verticales d'abscisse n et $n + 1$ découle de la convexité de la fonction : le trapèze tangent au point milieu d'abscisse $n+\frac{1}{2}$ (d'aire égale à celle du rectangle « milieu ») est inclus dans le domaine, alors que le trapèze construit avec la corde d'extrémités $\left(n,\frac{1}{n}\right)$, $\left(n+1,\frac{1}{n+1}\right)$ le contient.



Donc

$$\frac{1}{\frac{2n+1}{2}} \leq \left(\ln(n+1)-\ln(n)\right) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)$$

ou encore

$$\frac{2}{2n+1} \leq \left(\ln(n+1)-\ln(n)\right) \leq \frac{2n+1}{2n(n+1)}.$$

Nous obtenons alors

$$0 \leq \ln\left(\frac{w_n}{w_{n+1}}\right) \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right).$$

En introduisant la suite $t_n = w_n e^{-\frac{1}{4n}}$, il s'ensuit que $\ln\left(\frac{t_n}{t_{n+1}}\right) \leq 0$, donc la suite (t_n) est croissante. De façon analogue, $0 \leq \ln\left(\frac{w_n}{w_{n+1}}\right)$ entraîne que la suite (w_n) décroît. Comme pour tout n, $t_n \leq w_n$, leur convergence découle du théorème sur les suites monotones bornées. Dès lors $\lim\limits_{n\to+\infty}(w_n - t_n) = 0$. Les deux suites convergent donc vers la même limite C. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $t_n \leq C \leq w_n$. Cela permet d'obtenir des approximations de C avec une précision arbitraire. Par exemple avec $w_1 = e$ et $t_1 = e^{\frac{3}{4}}$, on trouve $2,117 \leq C \leq 2,719$. Nous pouvons conclure que :

$$C\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} \leq n! \leq C\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}\, e^{\frac{1}{4n}}.$$

Calcul de la constante C par la méthode(4) de Wallis

La constante C peut être déterminée indirectement en introduisant les intégrales dites « de Wallis ».

Considérons la suite (J_m) définie pour $m \in \mathbb{N}$ par $J_m = \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{m}{2}}\,dt$.

En dérivant la fonction $f(t) = -\frac{t}{2} \times \dfrac{(1-t^2)^{\frac{m+2}{2}}}{\frac{m+2}{2}}$, nous obtenons :

$$f'(t) = \left(-\frac{t}{2}\right)\left(-2t(1-t^2)^{\frac{m}{2}}\right) - \frac{1}{2}\frac{(1-t^2)^{\frac{m+2}{2}}}{\frac{m+2}{2}},$$

$$f'(t) = t^2(1-t^2)^{\frac{m}{2}} - \frac{1}{2}\frac{(1-t^2)^{\frac{m+2}{2}}}{\frac{m+2}{2}},$$

$$f'(t) = (1-t^2)^{\frac{m}{2}} - (1-t^2)^{\frac{m}{2}+1} - \frac{1}{2}\frac{(1-t^2)^{\frac{m+2}{2}}}{\frac{m+2}{2}}.$$

Nous évaluons alors $\int_0^1 f'(t)\,dt$ de deux façons.

Comme $f(0) = f(1) = 0$:

(4) Méthode que l'on peut mettre à la portée du programme de TS en simulant la formule d'intégration par parties pour obtenir la relation de récurrence entre les intégrales. Dans l'article de W. Feller cité dans la bibliographie, l'expression de ln(C) est obtenue directement comme valeur de l'intégrale $-\int_0^{\frac{1}{2}} \ln\left(\frac{\sin \pi t}{\pi}\right) dt$, qui vaut $\frac{1}{2}\ln(2\pi)$. La justification de ce résultat passe par l'identité $t\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{t^2}{k^2}\right) = \frac{\sin \pi t}{\pi}$ qui n'est pas à la portée du programme de TS.

$$0=\int_0^1\left(1-t^2\right)^{\frac{m}{2}}\,\mathrm{d}t-\left(1+\frac{1}{m+2}\right)\int_0^1\left(1-t^2\right)^{\frac{m+2}{2}}\,\mathrm{d}t,$$

ce qui donne

$$\frac{m+3}{m+2}\mathrm{J}_{m+2}=\mathrm{J}_m.$$

Avec $\mathrm{J}_0 = 1$ et $\mathrm{J}_1 = \dfrac{\pi}{4}$ (aire du quart du disque(5) unité), la relation de récurrence $(m+3)\mathrm{J}_{m+2}=(m+2)\mathrm{J}_m$ conduit à

$$\mathrm{J}_{2m}=\frac{2^{2m}(m!)^2}{(2m+1)!}$$

pour $m \in \mathbb{N}$ et

$$\mathrm{J}_{2m-1}=\frac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2}\frac{\pi}{2}$$

pour $m \in \mathbb{N}^*$.

D'après la positivité de l'intégration, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$,

$$0<\mathrm{J}_{2m}\leq \mathrm{J}_{2m-1}\leq \mathrm{J}_{2m-2},$$

d'où :

$$1\leq\frac{\mathrm{J}_{2m-1}}{\mathrm{J}_{2m}}\leq\frac{\mathrm{J}_{2m-2}}{\mathrm{J}_{2m}}.$$

Ayant $\dfrac{\mathrm{J}_{2m-2}}{\mathrm{J}_{2m}}=\dfrac{2m+1}{2m}$, nous obtenons par encadrement $\lim\limits_{m\to+\infty}\dfrac{\mathrm{J}_{2m-1}}{\mathrm{J}_{2m}}=1$. En utilisant les expressions de J_{2m}, de J_{2m-1} et la substitution de n! par $\mathrm{C}n^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}\mathrm{e}^{-n}$ pour $n = m$, $2m$, $2m + 1$, nous déduisons $\mathrm{C}^2 = 2\pi$. Nous avons donc :

$$\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\sqrt{2\pi n}\leq n!\leq\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\sqrt{2\pi n}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{4n}}$$

et nous pouvons donc conclure que

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{2\pi n}\,\frac{n^n\mathrm{e}^{-n}}{n!}=1.$$

Une approximation de n! est alors

(5) La fonction intégrée sur [0,1] est $x\mapsto\sqrt{1-x^2}$ dont la courbe est le quart de cercle d'équation $y^2+x^2=1, x\geq 0, y\geq 0$.

$$S_n = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

Cette dernière est d'autant plus précise(6) que n est grand. Nous notons $\varepsilon_n = \dfrac{n! - S_n}{n!}$ l'erreur relative commise et illustrons à l'aide de calculs numériques fait par l'ordinateur l'approximation obtenue :

$\varepsilon_n = \dfrac{n! - S_n}{n!}$

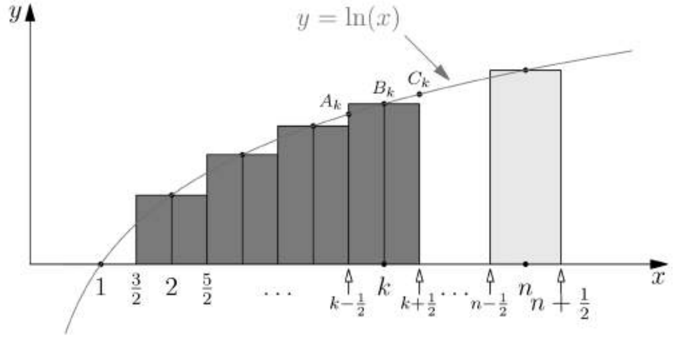
n	1	2	3	4	5	6
S_n	0.922137	1.919004	5.836209	23.506175	118.019167	710.078184
$n!$	1	2	6	24	120	720
ε_n	0.077862	0.040497	0.027298	0.020576	0.016506	0.013780

n	7	8	9	50	100
S_n	4980.395831	39902.3954527	359536.872842	$3.03634459394 \cdot 10^{64}$	$9.32484762527 \cdot 10^{157}$
$n!$	5040	40320	362880	50 !=30414093/…/0000	100 ! =9332621544/…/0000
ε_n	0.011826	0.010357	0.009212	0.001665	0.000832

II – Une autre approximation de n!

À la différence de la section I, nous justifions par une vision géométrique basée sur les aires, la formule d'une suite approximante.

L'intégrale I_n approximant ln(n!)



Pour évaluer la somme $u_n = \sum_{k=2}^{n} \ln(k)$, nous introduisons un repère orthonormé dans le plan et interprétons (voir figure ci-dessus) ses termes comme des mesures d'aires de rectangles de même largeur 1 (en abscisse) et de hauteurs ln(k) (en ordonnée). Pour la suite de ce travail, nous considérons vis-à-vis de ce repère, la courbe C représentative de la fonction ln, les points $A_k\left(k-\frac{1}{2}, \ln\left(k-\frac{1}{2}\right)\right)$, $B_k(k, \ln(k))$, $C_k\left(k+\frac{1}{2}, \ln\left(k+\frac{1}{2}\right)\right)$ et le domaine Δ constitué des points :

(6) L'erreur relative tend vers 0 quand $n \to \infty$. S_n est une approximation par défaut de n!.

$$\left\{ M(x,y) \middle| \frac{3}{2} \le x \le n + \frac{1}{2} \text{ et } 0 \le y \le \ln(x) \right\}.$$

Nous approximons la somme u_n par l'aire de Δ qui est égale à $\int_{\frac{3}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \ln(t)\,\mathrm{d}t$, que nous désignons par I_n.

Majoration de l'erreur $u_n - \mathrm{I}_n$

D'après la relation de Chasles, nous avons :

$$u_n - \mathrm{I}_n = \sum_{k=2}^{n} a_k$$

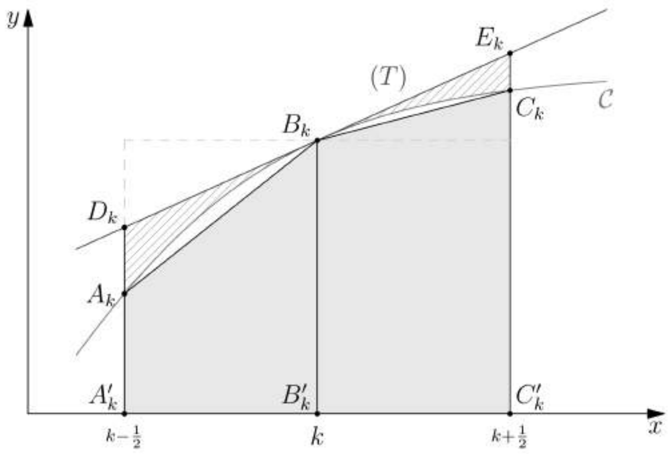
où

$$a_k = \ln(k) - \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln(t)\,\mathrm{d}t.$$

Introduisons les points $\mathrm{A}'_k\left(k - \frac{1}{2}, 0\right)$, $\mathrm{B}'_k(k,0)$, $\mathrm{C}'_k\left(k + \frac{1}{2}, 0\right)$, la tangente (T) à $\mathcal{C}$ en B_k dont une équation est $y = \ln(k) + \frac{1}{k}(x-k)$, puis les points D_k (resp. E_k) d'intersection entre (T) et $(\mathrm{A}_k\mathrm{A}'_k)$ (resp. $(\mathrm{B}_k\mathrm{B}'_k)$). Leurs coordonnées sont alors : $\left(k - \frac{1}{2}, \ln(k) - \frac{1}{2k}\right)$ pour D_k, $\left(k + \frac{1}{2}, \ln(k) + \frac{1}{2k}\right)$ pour E_k.

Le rectangle « milieu » construit sur le segment $[\mathrm{A}'_k\mathrm{C}'_k]$ de hauteur $[\mathrm{B}'_k\mathrm{B}_k]$ a même aire que le trapèze $\mathrm{A}'_k\mathrm{D}_k\mathrm{E}_k\mathrm{C}'_k$ (voir figure ci-dessous). Cette aire vaut ln(k).

L'aire de la partie hachurée (comprise entre $\mathcal{C}$ et (T)) a pour valeur a_k.



D'une part, d'après la concavité de la fonction ln, tout arc de $\mathcal{C}$ est situé sous la tangente (T).

D'autre part, tout arc de $\mathcal{C}$ est situé au dessus de la corde joignant ses extrémités. Ici, $\overset{\frown}{B_kC_k}$ est au dessus de $[B_kC_k]$ et $\overset{\frown}{A_kB_k}$ au dessus de $[A_kB_k]$. Il s'ensuit que la partie hachurée est incluse dans la réunion des domaines triangulaires $\mathrm{Tr1}_k\ (A_kB_kD_k)$ et $\mathrm{Tr2}_k\ (B_kC_kE_k)$.

Il en découle :

– Dans le premier temps, $\ln(k)-\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}\ln(t)\,\mathrm{d}t\geq 0$, c'est-à-dire $a_k\geq 0$.

– Dans le second, $a_k\leq \mathcal{A}(\mathrm{Tr1}_k)+\mathcal{A}(\mathrm{Tr2}_k)$ avec $\mathcal{A}(\mathrm{Tr1}_k)=\frac{1}{4}\left(y_{D_k}-y_{A_k}\right)$ et $\mathcal{A}(\mathrm{Tr2}_k)=\frac{1}{4}\left(y_{E_k}-y_{C_k}\right)$ d'où :

$$0\leq a_k\leq\frac{1}{4}\left(\ln(k)+\frac{1}{2k}-\ln\left(k+\frac{1}{2}\right)\right)+\frac{1}{4}\left(\ln(k)-\frac{1}{2k}-\ln\left(k-\frac{1}{2}\right)\right),$$

soit en simplifiant,

$$0\leq a_k\leq\frac{1}{4}\ln\left(\frac{k^2}{k^2-\frac{1}{4}}\right).$$

Selon la propriété $\ln(1+x)\leq x$ si $x>-1$, puisque

$$\frac{k^2}{k^2-\frac{1}{4}}=\frac{4k^2}{4k^2-1}=1+\frac{1}{4k^2-1},$$

nous concluons que

$$a_k\leq\frac{1}{4}\times\frac{1}{4k^2-1}.$$

De plus,

$$\frac{1}{4k^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right).$$

De cela, nous déduisons : pour tout $k\geq 2$,

$$0\leq a_k\leq\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right),$$

d'où par sommation,

$$0 \leq \sum_{k=2}^{n} a_k \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right).$$

Le téléscopage des termes consécutifs entraîne

$$\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n+1}.$$

ce qui nous conduit à l' encadrement suivant de $u_n - \mathrm{I}_n$:

$$0 \leq u_n - \mathrm{I}_n \leq \frac{1}{8}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+1}\right) \qquad (1)$$

Nous obtenons maintenant, via (1), un encadrement de u_n :

$$\mathrm{I}_n \leq u_n \leq \mathrm{I}_n + \frac{1}{24} - -\frac{1}{8(2n+1)} \qquad (2)$$

Un autre encadrement de *n*!

La fonction dérivée de $t \mapsto t(\ln(t)-1)$ est $t \mapsto \ln(t)$. Nous pouvons donc expliciter $\mathrm{I}_n = \int_{\frac{3}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \ln(t)\,\mathrm{d}t$:

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_n = \left[t\ln(t) - t\right]_{\frac{3}{2}}^{n+\frac{1}{2}} &= \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(n+\frac{1}{2}\right) - n - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{3}{2} \\ &= \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(n+\frac{1}{2}\right) - n + 1 - \frac{3}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right).\end{aligned}$$

Dans la suite, nous posons $\alpha = 1 - \frac{3}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right)$. Nous en déduisons alors, d'après (2) :

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(n+\frac{1}{2}\right) - n + \alpha \leq \ln(n!) \leq \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(n+\frac{1}{2}\right) - n + \alpha + \frac{1}{24} - \frac{1}{8(2n+1)}.$$

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)^{\left(n+\frac{1}{2}\right)} \mathrm{e}^{-n}\mathrm{e}^{\alpha} \leq n! \leq \left(n+\frac{1}{2}\right)^{\left(n+\frac{1}{2}\right)} \mathrm{e}^{-n}\mathrm{e}^{\alpha+\frac{1}{24}} \text{ où } \mathrm{e}^{\alpha} = \frac{2\mathrm{e}\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}.$$

La moyenne arithmétique, m_n, des suites encadrantes nous donne une valeur approchée de $n!$. Ainsi

$$m_n = \frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)^{\left(n+\frac{1}{2}\right)} \mathrm{e}^{-n}\left(\mathrm{e}^{\alpha} + \mathrm{e}^{\alpha}\mathrm{e}^{\frac{1}{24}}\right) = \left(n+\frac{1}{2}\right)^{\left(n+\frac{1}{2}\right)} \mathrm{e}^{-n}\,\frac{\mathrm{e}}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\left(1+\mathrm{e}^{\frac{1}{24}}\right).$$

Nous notons $\delta_n = \frac{m_n - n!}{n!}$ l'erreur relative liée à cette approximation. Nous constatons ci-dessous, à l'aide de calculs numériques, que cette erreur se dégrade au fur et à mesure que n grandit. Nous allons donc rechercher dans la section suivante une formule d'approximation asymptotique, dont l'erreur relative tend vers zéro quand n tend vers l'infini.

Quelques calculs numériques fait par l'ordinateur pour illustrer l'approximation obtenue :

$$\delta_n = \frac{m_n - n!}{n!}$$

n	1	2	3	4	5	6
m_n	1.02127	2.02097	6.03468	24.07565	120.17718	720.22727
$n!$	1	2	6	24	120	720
δ_n	0.0212735	0.0104869	0.0057802	0.0031521	0.0014765	0.0003157

n	7	8	9	50	100
m_n	5037.29909	40272.13458	362262.64128	$3.02545108675 \cdot 10^{64}$	$9.27984350491 \cdot 10^{157}$
$n!$	5040	40320	362880	50!=30414093/.../0000	100! =9332621544/.../0000
δ_n	-0.0005359	-0.0011871	-0.0017013	-0.005247	-0.0056552

50! = 30414093201713378043612608166064768844377641568960512000000000000 (65 chiffres)

Nous obtenons avec m_{100}, une valeur approchée de $n!$ dont l'erreur relative pour $n = 100$ est inférieure à 6/1000.

Formule asymptotique pour $n!$

Reprenons la suite associée à l'encadrement précédent, et établissons l'existence d'une constante K telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^{\left(n+\frac{1}{2}\right)} \mathrm{e}^{-n}}{n!} = \mathrm{K}.$$

Nous reprenons les inégalités obtenues précédemment pour la suite a_k : pour tout $k \geq 2$,

$$0 \leq a_k \leq \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right),$$

Posons $\mathrm{V}_n = \sum_{k=2}^{n} a_k$. Cette suite est croissante ($\mathrm{V}_{n+1} - \mathrm{V}_n = a_{n+1}$ qui est positif). En reprenant l'encadrement de a_k rappelé, nous déduisons comme précédemment que

$$\mathrm{V}_n \leq \frac{1}{24}.$$

Donc cette suite converge vers un réel V tel que $\mathrm{V} \leq \frac{1}{24}$.

Majorons alors la suite $(\mathrm{V} - \mathrm{V}_n)$: pour $p > n$,

$$\mathrm{V}_p - \mathrm{V}_n = \sum_{k=n+1}^{p} a_k$$

et

$$\lim_{p\to+\infty}\left(\mathrm{V}_p - \mathrm{V}_n\right) = \mathrm{V} - \mathrm{V}_n .$$

$$\sum_{k=p+1}^{n} a_k \leq \sum_{k=p+1}^{n} \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right) = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2p+1}\right) \leq \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2n+1}\right),$$

puis par passage à la limite ($p \to +\infty$) on obtient :

$$0 \leq \mathrm{V} - \mathrm{V}_n \leq \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2n+1}\right).$$

Or

$$\mathrm{V}_n = u_n - \mathrm{I}_n = \ln(n!) - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(n+\frac{1}{2}\right) + n - 1 + \frac{3}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right),$$

d'où

$$0 \leq \mathrm{V} - \ln(n!) + \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(n+\frac{1}{2}\right) - n + 1 - \frac{3}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right) \leq \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2n+1}\right),$$

$$0 \leq \ln\left(\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^{\left(n+\frac{1}{2}\right)} \mathrm{e}^{-n}}{n!}\right) + \mathrm{V} + 1 - \frac{3}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right) \leq \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2n+1}\right).$$

On en déduit alors que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^{\left(n+\frac{1}{2}\right)} \mathrm{e}^{-n}}{n!} = \mathrm{K}$$

où $\mathrm{K} = \mathrm{e}^{\frac{3}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right) - \mathrm{V} - 1}$. Ce n'est pas la formule de Stirling associée à $\left(\mathrm{S}_n\right)$, mais nous la retrouvons en remarquant que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}}{n^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$ car $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n+\frac{1}{2}}{n}\right)^{\frac{1}{2}} = 1$. Il s'ensuit que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\left(n+\frac{1}{2}\right)} e^{-n}}{n!} = K'$$

où

$$K' = e^{\frac{3}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right) - V - \frac{3}{2}} \quad \left(K' = \frac{K}{\sqrt{e}}\right).$$

Sachant d'après I, que $\frac{1}{K'} = C = \sqrt{2\pi}$, nous obtenons

$$K = \sqrt{\frac{e}{2\pi}}$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^{\left(n+\frac{1}{2}\right)} e^{-n}}{n!} = \sqrt{\frac{e}{2\pi}}.$$

Vous trouverez ci-dessous dans la bibliographie quelques références facilement accessibles pour aller plus loin, en particulier un article approfondi de D. Lanier et D. Trotoux, animateurs de l'IREM de Basse-Normandie, sur les questions auxquelles A. De Moivre et J. Stirling ont apporté leur réponses, ainsi que sur les méthodes mises en œuvre pour trouver des développements en séries de $\ln(n!)$. Le document est disponible à cette adresse :
http ://www.math.ens.fr/culturemath/histoire des maths/pdf/Formule de Stirling.pdf

Bibliographie

E. Lesigne, 2001, Pile ou Face, *Une introduction aux théorèmes limites du Calcul des Probabilités*. Éd. Ellipses.

D. Lanier & D. Trotoux, 1998, *La formule de Stirling* in *Analyse et démarche analytique*, IREM de Reims, p. 231-286.

H. Robbins, 1955, *A remark on Stirling's formula*. Amer. Math. Monthly, 62, p. 26-29.

R. Johnsonbaugh, 1981, *The trapezoid rule, Stirling's formula, and Euler's constant*. Amer. Math. Monthly, 88, p. 696-698.

W. Feller, 1967, *A direct proof of Stirling's formula*. Amer. Math. Monthly, 74, p. 1223-1225.

W. Feller, 1968, *Correction to : A direct proof of Stirling's formula*. Amer. Math. Monthly, 75, p. 518.

D. Dominici, Feb 2006, *Variations on a Theme by James Stirling*. arXiv :math/0603007v1 [math.CA].