Fonctions sans primitive

Véronique Cerclé(*)

Résumé : en TS on montre que le fait d'être continue est une condition suffisante pour qu'une fonction admette des primitives : toute fonction continue a une primitive (par l'intégrale), et une fonction qui a une primitive en a une infinité (par addition d'une constante quelconque). Cet article s'intéresse au problème d'une condition nécessaire pour qu'une fonction admette des primitives. On se place dans le cadre de fonctions définies sur un intervalle fixé $[a,b]$.

Lorsque j'ai donné en TS la définition d'une primitive, et démontré que si une fonction a une primitive, alors elle en a une infinité, mes élèves m'ont demandé s'il existait des fonctions n'ayant pas de primitive. Je n'ai pas su leur répondre tout de suite sans entrer dans des fonctions trop étranges. Voici le résultat de mon enquête.

Une fonction n'ayant pas de primitive, mais soulevant des questions...

L'exemple classique de fonction de TS n'ayant pas de primitive est la fonction partie entière E. En effet, si elle admettait une primitive F, celle-ci aurait pour expression $\mathrm{F}(x) = c$ sur $[0,1[$ et $\mathrm{F}(x) = x + c'$ sur $[1,2]$. Mais la fonction F ainsi définie n'est pas dérivable en 1. (Pour être dérivable, elle doit déjà être continue ce qui suppose $c' = c - 1$; mais même dans ce cas, on a deux demi-tangentes ce qui met en défaut la dérivabilité)

Problème : la fonction E sert généralement d'exemple de référence, et n'est pas continue. Cet exemple tend à faire penser que c'est le fait qu'elle n'est pas continue qui met en défaut sa *primitivabilité*. On va voir que non, et pour cela s'interroger sur le lien entre « continuité » et « *primitivabilité* ».

Trois théorèmes de TS autour de la continuité

En terminale S, on présente les trois théorèmes suivants:

TH1 : f dérivable $\Rightarrow f$ continue ;
TH2 : f continue $\Rightarrow f$ vérifie une propriété des valeurs intermédiaires (notée P_0 par la suite) ;
TH3 : f continue $\Rightarrow f$ *primitivable* ;

Remarque: La propriété P_0 s'énonce ici comme suit : « pour une fonction f définie sur l'intervalle $[a,b]$, tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ admet un antécédent dans $[a,b]$ ».

(*) Professeur au Lycée Jean Moulin de Pézenas ; veronique.cercle@ac-montpellier.fr
avec la participation de Louis-Marie Bonneval.

Le théorème 1 peut être démontré en TS en approfondissement, il s'appuie sur la définition du taux d'accroissement vue en Première, ce qui n'est pas simple pour les élèves. De même pour la démonstration du théorème 3 : on pose $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et on démontre que F est dérivable de dérivée f ; à nouveau cette démonstration est difficile mais abordable.

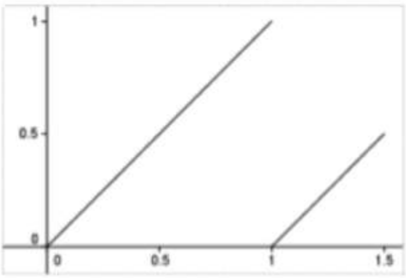
La démonstration du théorème 2 relève du supérieur, elle met en jeu la propriété de $\mathbb{R}$ comme ensemble complet. En revanche ce théorème paraît assez *évident* pour les élèves (comme il le fut historiquement d'ailleurs).

Ces théorèmes présentent un intérêt particulier pour la formation des élèves : leur réciproque est fausse. Il suffit pour s'en persuader d'en trouver des contre-exemples, mais est-ce si simple ?

Cas de la réciproque du TH2 : une fonction non continue peut-elle vérifier P_0 ?

Pour la réciproque (fausse) du TH2 qui serait « f vérifie $P_0 \Rightarrow f$ continue », on cherche une fonction non continue qui vérifie P_0 sur un certain intervalle, et on en trouve :

$f(x) = x - \mathrm{E}(x)$ sur $\left[0,\frac{3}{2}\right]$.



$f(0) = 0$, $f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}$, tout réel k entre 0 et $\frac{1}{2}$ a un antécédent dans $\left[0,\frac{3}{2}\right]$ (et même deux : k et $k + 1$).

On peut donc résumer les quatre cas possibles :

	Vérifie P_0	Ne vérifie pas P_0
Continue	Toute fonction continue (d'après TH2)	Impossible (d'après TH2)
Non continue	Exemple : $f(x) = x - \mathrm{E}(x)$ sur $\left[0,\frac{3}{2}\right]$	Toute fonction ne vérifiant pas P_0 (d'après TH2) exemple : $f(x) = \mathrm{E}(x)$ sur [0,1] non continue sur $\mathbb{R}$ ne vérifie pas P_0 car $f(x) = 0{,}5$ impossible

Intéressons-nous alors à une réciproque du TH3 « *f primitivable* ⇒ *f continue* » ou sa contraposée : « *f non continue* ⇒ *f non primitivable* ».

Cas de la réciproque du TH3 : une fonction non continue peut-elle avoir des primitives ?

Le cas de la fonction E laisse entendre qu'on aurait un théorème « *f non continue* ⇒ *f non primitivable* » (autrement dit on aurait équivalence entre « *f continue* » et « *f primitivable* »). Or ce théorème est faux, un contre-exemple classique est la fonction $f(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ et $f(0) = 0$: elle n'est pas continue en 0 mais a pour primitive $F(x) = x^2 \sin(1/x)$ avec $F(0) = 0$. On vérifie en effet que cette fonction F est dérivable, y compris en 0, et que $F' = f$.

Ce qu'on peut résumer en quatre cas possibles:

	Primitivable	Non primitivable
Continue	Toute fonction continue (d'après TH3)	Impossible (d'après TH3)
Non continue	$f(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ et $f(0) = 0$ f n'est pas continue en 0, mais a pour primitive sur $\mathbb{R}$ $F(x) = x^2 \sin(1/x)$	$f(x) = E(x)$ f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ f n'a pas de primitive sur $\mathbb{R}$

Parmi les fonctions discontinues, il y a en a donc qui ont des primitives, d'autres non. Mais si ce n'est pas seulement le fait d'être discontinue qui empêche la fonction E d'avoir des primitives, c'est quoi ? Quelle condition la fonction doit-elle vérifier nécessairement pour qu'on puisse espérer qu'elle admette des primitives ?

Enquête sur la notion de fonction « primitivable »

Des recherches sur internet en associant les mots « primitive » à d'autres mots-clés m'avaient conduite à des forums où on peut lire l'affirmation : f primitivable ⇒ f vérifie la propriété des valeurs intermédiaires. Mais je n'en trouvais ni explication, ni preuve.

J'ai alors réalisé que j'avais mal posé les termes de recherche, il fallait chercher « propriétés d'une dérivée » : f ayant une primitive, elle est une dérivée.
C'est le mathématicien Gaston Darboux qui à la fin du XIX^e siècle a étudié ce problème des fonctions dérivées, et qui a démontré le lien avec la propriété des valeurs intermédiaires. Ainsi, dans l'article de Wikipédia consacré au **Théorème de Darboux** (analyse) on trouve les deux formulations suivantes :

Première forme
Soit F une fonction numérique (à valeurs réelles), dérivable sur un intervalle $[a,b]$. Si k est un nombre réel compris entre $F'(a)$ et $F'(b)$, il existe alors un nombre c, compris entre a et b, tel que $F'(c) = k$.
Formulation équivalente
Soit F une fonction à valeurs réelles, dérivable sur un intervalle I, alors $F'(I)$ est un intervalle.

Ainsi, se demander si f admet des primitives, ce que j'avais qualifié avec l'assez laid néologisme de « primitivable », revient à se demander si f peut être une dérivée, ce qui est plus élégant : « f est-elle primitivable ? » $\Leftrightarrow$ « f est-elle une dérivée ?». Néanmoins pour la suite de l'article je garderai cet adjectif, qui traduit bien ma problématique de départ.

Dans cette perspective, le théorème de Darboux (sous sa première forme) se formule alors:

TH4 : f primitivable $\Rightarrow f$ vérifie P_0

dont voici une démonstration :
Soit f une fonction définie sur $[a,b]$ admettant une primitive F sur $[a,b]$. On va démontrer que f vérifie P_0.
Pour cela soit k un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$.
On se place dans le cas où $f(a) < f(b)$ (la démonstration est similaire dans l'autre cas : remplacer le mot minimum par le mot maximum)
Posons $g(x) = F(x) - kx$; g est dérivable donc continue sur $[a,b]$, elle y admet donc un minimum, en un réel c de $[a,b]$.
Mais $g'(a) = f(a) - k < 0$ donc(1) le minimum de g ne peut pas être en a ; et $g'(b) = f(b) - k > 0$ donc le minimum de g ne peut pas être en b.
Donc g dérivable admet un minimum en un réel c de $]a,b[$, donc $g'(c) = 0$, c'est-à-dire $f(c) - k = 0$.
On a bien trouvé un réel c de l'intervalle $]a,b[$ tel que $f(c) = k$.

Retour sur la « propriété des valeurs intermédiaires » (PVI) nécessaire pour être primitivable : fonction de Darboux

En analysant cette démonstration, on voit qu'elle reste vraie en y remplaçant a et b par tout couple de réels u et v de l'intervalle $[a,b]$. On démontre donc en réalité que, si f a une primitive sur $[a,b]$, alors elle vérifie la PVI sur tout intervalle $[u,v]$ contenu dans $[a,b]$. Ceci rejoint le fait que si F est dérivable sur $[a,b]$, alors F est dérivable sur tout intervalle $[u,v]$ contenu dans $[a,b]$: si f est primitivable sur $[a,b]$, alors elle est primitivable sur tout intervalle $[u,v]$ contenu dans $[a,b]$.
De fait, c'est ce sens que prend la PVI citée dans le théorème de Darboux, et dans la définition d'une « fonction de Darboux » :

f est une fonction de Darboux sur $[a,b]$ lorsque f vérifie la PVI sur tout intervalle contenu dans $[a,b]$ ».

La « formulation équivalente » qui apparaît dans Wikipedia montre alors son ambiguïté. Si l'on se contente de prouver P_0 pour le seul intervalle global $[a,b]$, on n'a pas encore prouvé que la fonction dérivée est bien « de Darboux ». Autrement dit, pour passer de la « première forme » à la « formulation équivalente », il faut encore utiliser la remarque du paragraphe précédent et éclaircir la notion de propriété des valeurs intermédiaires. Et désormais, quand je parlerai de PVI, il s'agira de la

(1) La dérivée est strictement négative donc le taux d'accroissement, partant de a, est nécessairement négatif sur un certain voisinage de a.

propriété P_0, mais sur tout sous-intervalle de $[a,b]$.

Le théorème de Darboux doit donc s'énoncer : « *si une fonction est une dérivée sur* $[a,b]$ *(i.e. est primitivable sur* $[a,b]$*) alors elle vérifie la PVI <u>sur tout intervalle</u> contenu dans* $[a,b]$ ».

La fonction affine par morceaux proposée précédemment vérifie P_0 sur $\left[0,\frac{3}{2}\right]$, mais pas sur tout intervalle contenu dans $\left[0,\frac{3}{2}\right]$, ce n'est pas un bon contre-exemple à TH2.

On va donc chercher une fonction qui vérifie la PVI sur tout intervalle inclus dans $[a,b]$, mais qui n'ait pas de primitive.

Les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par[2] :

$$f(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } x\neq 0, \text{ et } f(0)=0 \quad ; \quad g(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } x\neq 0, \text{ et } g(0)=1.$$

satisfont toutes deux la propriété des valeurs intermédiaires sur tout intervalle (voir annexe).

La différence $f-g$ (qui est nulle partout sauf en 0) ne satisfait pas la propriété des valeurs intermédiaires, cette fonction n'admet donc pas de primitive sur $\mathbb{R}$, donc il en est de même pour l'une au moins des fonctions f ou g.

Les démonstrations données en annexe montrent en effet que g n'a pas de primitive, contrairement à f. Ces deux fonctions sont toutes deux discontinues et vérifient la PVI sur tout intervalle de $\mathbb{R}$.

Conclusion

Ce nouveau théorème va permettre d'y voir plus clair puisqu'il vient ordonner les deux conditions nécessaires de continuité citées dans les TH2 et TH3 : on a finalement

$$\boxed{f \text{ continue} \Rightarrow f \text{ primitivable} \Rightarrow f \text{ vérifie la PVI.}}$$

ou encore, en formulant différemment avec un peu de logique appliquée :

* Par contraposée, on a aussi :

$$\boxed{f \text{ ne vérifie pas la PVI} \Rightarrow f \text{ non primitivable} \Rightarrow f \text{ non continue.}}$$

Ainsi c'est parce qu'elle ne vérifie pas la PVI que la fonction E n'a pas de primitive.

* Pour qu'une fonction admette des primitives, il faut qu'elle vérifie la PVI, mais ça ne suffit pas. Pour qu'une fonction admette des primitives, il suffit qu'elle soit continue, mais ce n'est pas nécessaire.

La chaîne d'inclusions :

$$\boxed{\text{continues} \subset \text{primitivables} \subset \text{vérifient la PVI}}$$

invite à distinguer quatre sortes de fonctions au regard des propriétés considérées :

(2) http://forums.futura-sciences.com/mathematiques-superieur/549589-theoreme-de-darboux-dire-de-reciproque.html

Non PVI (et donc aussi non primitivable et non continue)	PVI et non primitivable (et donc aussi non continue)	PVI et primitivable et non continue	PVI et primitivable et continue
$\mathrm{E}(x)$	$g(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x\neq 0$ et $g(0)=1$ (voir annexe)	$f(x)=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x\neq 0$ et $f(0)=0$ (voir annexe)	Toute fonction continue

Une question demeure : on a donc trouvé une condition nécessaire et une condition suffisante pour qu'une fonction soit primitivable ; mais y a-t-il une condition nécessaire et suffisante simple ?

Je laisse la parole à André Revuz (Encyclopaedia Universalis, article *Intégration et mesure*) :

La recherche des primitives (…) et l'intégration ne coïncident nullement, car les fonctions intégrables ne sont pas toutes des fonctions dérivées, et les fonctions dérivées ne sont pas toutes intégrables. Le problème de la recherche des primitives de la fonction dérivée la plus générale a été résolu par A. Denjoy dans sa belle et difficile théorie de la totalisation.