Troubles du calcul ou difficultés scolaires ? L'apprentissage des fractions en Sixième

Françoise Duquesne-Belfais(*)
& Marie-Hélène Marchand(**)

Une version plus complète de cet article est parue dans la revue ANAE (Approche Neuropsychologique des Apprentissages chez l'Enfant) : nº 120 – 121, Novembre - Décembre 2012.

Avec le souci de mieux comprendre les nombreuses difficultés de certains élèves dans le domaine numérique, nous avons opté pour une approche didactique de type compréhensive et ergonomique : mieux comprendre pour mieux agir.

De nombreuses études ayant prouvé que les apprentissages numériques sont très liés au développement de la conceptualisation (Brissiaud, 2002 ; Fischer, 2009), l'hypothèse que nous interrogerons est la suivante : la mise en place de situations d'apprentissage favorisant la conceptualisation des notions numériques fondamentales, les fractions par exemple, permet de faire évoluer les compétences d'un certain nombre de ces enfants « troublés en calcul », qu'ils soient dyscalculiques ou en difficultés. Il nous semble que si une rééducation peut s'avérer pertinente et même indispensable dans certains cas, des pistes existent et restent à mieux explorer au sein même de la classe.

Après avoir présenté les élèves avec qui nous avons travaillé et le protocole de l'expérimentation, l'exposé de notre cadre théorique permettra de justifier notre choix de tâches dont le but a été de favoriser l'appropriation des relations entre les représentations figurées des fractions et leur écriture symbolique. Puis nous proposerons une analyse de l'activité des élèves et de leurs productions lors de la résolution de ces tâches.

1. La population concernée

La recherche a été réalisée avec une enseignante de mathématiques, Mme Anne-Catherine Ferrari, et deux de ses classes de Sixième dans un collège.

– Le groupe témoin accueille 25 élèves d'un bon niveau global, et la classe dite « tremplin » réunit 22 élèves en grandes difficultés. Ces derniers ont été regroupés suite au repérage effectué par l'enseignant de CM2 ou suite à une demande de la famille ou de rééducateurs. C'est l'examen des dossiers, suivi d'un entretien individuel avec les familles volontaires, qui a arrêté la constitution de ce groupe.

(*) Maitre de conférences (INS HEA-Suresnes) site : francoiseduquesne.free.fr
(**) Neuropsychologue.

– Sur le plan étiologique, deux élèves présentent des anomalies chromosomiques, un élève est diagnostiqué TDAH[1] (sous ritaline[2]), une élève est dite précoce, un élève est en attente de bilan.

– Sur le plan rééducatif, 10 élèves sont suivis, principalement en orthophonie, mais aussi en psychothérapie ou/et en psychomotricité.

Le projet de cette classe est d'accompagner ces élèves de manière plus soutenue durant leur première année de collège et d'essayer de leur redonner confiance en eux. Ils sont moins nombreux, ils ont plus de séances de travail en demi-groupes et sont encadrés par une équipe de professeurs, tous volontaires et très impliqués. Le temps accordé au français et aux mathématiques est augmenté d'une heure et demie. Après le passage dans cette classe « tremplin », les élèves sont répartis dans les classes de Cinquième du collège, sans dispositif spécifique.

2. Le protocole d'expérimentation

Les séquences de travail se sont déroulées durant trois semaines aux horaires habituels des cours de mathématiques. Nous avons choisi de travailler sur les fractions avant que cette notion ne soit abordée en cours.

L'expérience comprend plusieurs étapes :

– la fabrication en groupes d'un jeu, « les carrés de Mac-Mahon » qui est ensuite utilisé pour résoudre des problèmes de fractions (durée 1h30) ;

– une évaluation diagnostique individuelle ;

– l'apprentissage, organisé en groupes de besoins constitués à partir des résultats à l'évaluation diagnostique. Chaque groupe est encadré par un adulte : l'enseignante référent de la classe, une enseignante-chercheure, une neuropsychologue et une psychologue (durée 2h30).

– une synthèse des propriétés travaillées, effectuée collectivement à l'aide du support d'un TBI. Un document écrit est donné aux élèves (durée 30mn).

– une évaluation finale.

3. Le cadre théorique

La démarche que nous présentons est issue du croisement de nos points de vue de neuropsychologue et de didacticienne.

– Le point de vue de la ***didactique des mathématiques*** nous invite à étudier les processus d'apprentissages mathématiques au travers des relations entre l'enseignement (point de vue du maître), l'apprentissage (point de vue des élèves) et les savoirs mathématiques.

(1) TDAH : trouble du déficit de l'attention avec hyperactivité.
(2) ritaline : médicament psychotrope de la classe des phényléthylamines dont la principale indication est le traitement de la TDAH.

– Le point de vue de la ***didactique professionnelle*** nous pousse à donner une place particulière à l’analyse de l’activité des élèves en cours de résolution de tâches (Pastré, Mayen et Vergnaud, 2006 ; Lenoir et Pastré, 2008). Ainsi, nous distinguerons tâche et activité, la tâche étant ce qui est à faire, l’activité, ce qui se fait réellement.

Le point de vue de la tâche pourrait être qualifié d’« objectif » : il décrit les conditions qu’il faut nécessairement prendre en compte pour que l’action soit réussie.

Le point de vue de l’activité pourrait être qualifié de « subjectif » : il vise à décrire ce que fait effectivement l’apprenant. Pour une même tâche, les manières de faire des élèves sont nombreuses, y compris à niveau de réussite équivalent.

En pratique, concevoir une situation d’apprentissage requiert, en didactique, deux niveaux d’analyse : une analyse de la tâche *a priori* qui renvoie à l’identification des obstacles inhérents aux concepts visés, ici les fractions ; une analyse *a posteriori* de ce que fait réellement l’apprenant lorsqu’il est aux prises avec la tâche, ici avec des problèmes de fractions.

– Dans le cadre de la **neuropsychologie**, on se pose la question de l'intégrité des « instruments » qui supportent les connaissances conceptuelles.

D’où le choix des tâches

L’analyse *a priori* de la notion de fraction nous a conduit à choisir des objectifs-obstacles qui remettent en cause chez les élèves une partie de leurs conceptions erronées ou incomplètes. Les situations d’apprentissage visaient à dépasser les aspects de fractionnement et de rapport pour aboutir à la fraction en tant que nombre, soit à faire évoluer les aspects perceptifs et figuratifs vers les aspects abstraits du concept de fraction. Nous avons choisi d'étudier plus spécifiquement le passage des représentations figurales vers les représentations numérales et inversement.

L’analyse neuropsychologique nous a alors suggéré plusieurs pistes de recherche :

– Les résultats des élèves des deux classes face à ces tâches dépendent-ils des types de présentation (dessin ou écriture numérique) ?

– Les types de présentation sont-ils différemment utilisés chez les élèves de la classe témoin et chez les élèves en difficultés ?

Au final, nous avons choisi des tâches qui visaient à :

- permettre un apprentissage ludique pour augmenter la motivation des élèves en difficulté et leur implication ;
- mettre les apprenants en situation d’acteurs en les confrontant à des obstacles, l'évolution des conceptions étant alors rendue nécessaire pour surmonter ces obstacles ;
- s’articuler autour d’un support de référence commun et concret, « les carrés de Mac Mahon », et permettant de « manipuler » les fractions rencontrées pour résoudre des problèmes.

De l'analyse conjointe didactique, pédagogique et neuropsychologique, découlent l'élaboration de parcours d'apprentissage différenciés puis une analyse *a posteriori*, qui a permis entre autres l'identification des sujets à difficultés spécifiques.

4. Les carrés de Mac-Mahon(3)

Cette séquence n'a été effectuée qu'avec les élèves du groupe « tremplin ».

Première étape : la fabrication du jeu par groupes

Consigne :
On donne ci-dessous des carrés. Chaque carré est divisé en quatre parties par ses diagonales.
Pour colorier ces carrés, on dispose de trois couleurs : le rouge, le bleu et le vert.
On peut les colorier en utilisant une, deux ou trois de ces couleurs, sans laisser de blanc.
On veut colorier le plus de carrés possible et que tous les carrés obtenus soient différents.
Combien avez-vous trouvé de possibilités ?

Les échanges à l'intérieur des groupes portent principalement sur la signification de « une, deux ou trois couleurs » : *doit-on avoir exactement les 3 couleurs dans un carré ? Le blanc est-il une couleur ? Peut-on colorier en dessinant des rayures ou des motifs à l'intérieur des carrés ? Un carré bleu clair est-il différent d'un carré bleu foncé ?*, etc.

Toutes ces questions sont générées par l'obstacle : colorier 4 régions avec 3 couleurs, sans laisser de blanc. Autre obstacle : l'orientation des carrés n'a pas d'importance.

La mise en commun a nécessité que les groupes s'organisent pour désigner un rapporteur et s'accordent sur les résultats qu'ils voulaient exposer. Pour vérifier qu'il n'y avait pas de doublons, différentes stratégies voient le jour : établissement de listes au fur et à mesure de la recherche, classement selon le nombre de régions coloriées, ou selon le nombre de couleurs dans un carré...

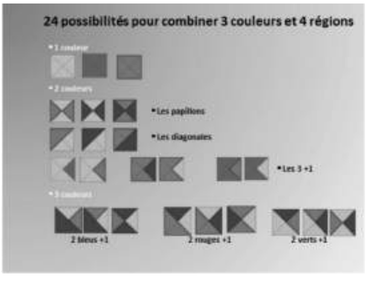


Figure 1

Au final, les élèves ont réussi au bout d'une séance et demie à trouver les 24 carrés différents qui constituent le jeu complet. (*figure 1*)

Deuxième étape : l'utilisation du jeu pour résoudre une situation problème

Le but de cette activité est de faire résoudre aux élèves un problème de fractions avec un support figuratif : il leur est possible de faire de multiples essais en manipulant les

(3) Vers 1930, dans l'Armée des Indes, le major d'artillerie et mathématicien britannique Mac Mahon créa ce jeu formé de 24 carrés.

carrés pour les placer sur la grille vide et en comptant le nombre de parties coloriées. (*figure 2*)

Par exemple, il est demandé que la moitié du rectangle soit bleue. Or, il n'y a qu'un seul carré entièrement bleu, les élèves sont donc obligés de compter en « triangles ». Le problème revient alors à trouver un agencement de 24 triangles : 12 triangles bleus, 8 triangles rouges et 4 triangles verts.

½ = 12/24   1/3 = 8/24   1/6 = 4/24

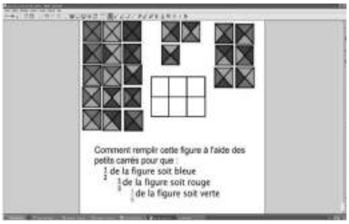


Figure 2

Il y a plusieurs solutions.

5. L'analyse *a posteriori* de l'évaluation initiale

Les trois types d'exercice présentent des caractéristiques différentes pour un même objectif : passer d'une représentation figurale à une représentation symbolique et réciproquement.

Ligne 1

Ligne2

Ligne3

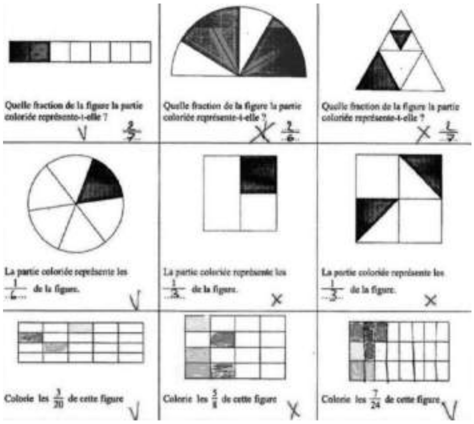


figure 3

Ligne 1 : produire une fraction numérique à partir d'une proportion dessinée, soit savoir traduire une information visuelle en une écriture symbolique.

Ligne 2 : tâche identique mais avec une contrainte supplémentaire : le numérateur doit être égal à 1.

Ligne 3 : produire une proportion dessinée à partir d'une fraction numérique, soit savoir traduire une écriture symbolique en une information visuelle. (*figure 3*)

pourcentage de bonnes réponses par sujet	Classe témoin	Classe « tremplin »
de 80 à 100%	36%	9%
de 58 à 79%	44%	50%
de 50% à 57%	20%	9%
Moins de 50%	0	32%

Les résultats globaux

– du point de vue des sujets
Le groupe témoin répond bien à au moins 50% des questions posées. Une partie non négligeable du groupe « tremplin » (32%) présente un échec franc. 64% des élèves « témoin » et 91% des élèves « tremplin » ont donc besoin de travailler la notion de fraction.

– du point de vue des figures

Les profils des réussites sont les mêmes dans les deux groupes, avec une accentuation des échecs pour les figures plus complexes dans le groupe tremplin. (*figure 4*)

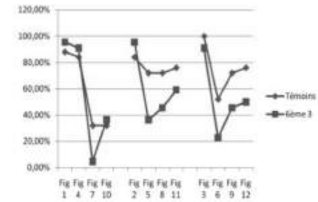


Figure 4

La comparaison entre la ligne 1 et la ligne 3 (*figure 5*) montre qu'il semble plus difficile pour le groupe témoin d'écrire la fraction que de produire le fractionnement dessiné. Ce qui n'est pas le cas des élèves « tremplin », au contraire.

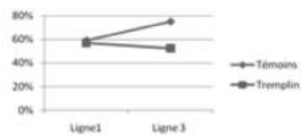


Figure 5

La comparaison entre la ligne 1 et la ligne 2 (*figure 6*) montre l'impact de la contrainte d'un numérateur égal à 1 : c'est une aide pour les élèves « témoins » mais pas pour les élèves « tremplin ». Pour ces derniers, les fractions sont difficiles quelle que soit la modalité de présentation.

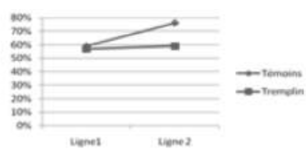


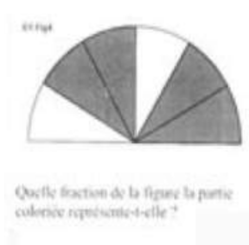
Figure 6

Des erreurs surreprésentées dans le groupe « tremplin »

<u>Traduire une représentation figurale en une écriture symbolique</u> (ligne 1, figure 3)

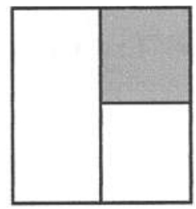
Question : Quelle fraction de la figure la partie coloriée représente-t-elle ?
Réponse attendue : 4/6
Réponse observée : 2/4

Une des erreurs surreprésentée chez les élèves « tremplin » (deux fois plus souvent que dans le groupe témoin) consiste à faire le rapport entre la partie blanche et la partie grisée ; ce qui révèle une prégnance perceptive :
- au niveau des couleurs, en faisant le rapport des parties blanches (2) sur les parties grises (4);
- en faisant le rapport de la « petite » partie par rapport à la « grande », au lieu de la partie foncée par rapport au tout.

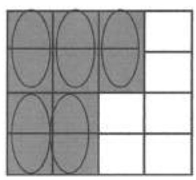


Traduire une représentation figurale en une écriture symbolique et numérateur égal à 1 (ligne 2, figure 3)

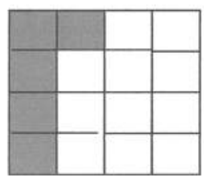
Question : Quelle fraction de la figure la partie coloriée représente-t-elle ?
Réponse attendue : 1/4
Réponse observée : 1/3
Dans la classe « tremplin » les élèves ne tiennent pas compte de l'égalité des parties et privilégient le nombre de parties.



Traduire une écriture symbolique en une représentation figurale (ligne 3, figure 3)



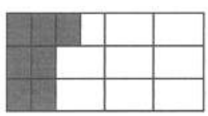
Réponse attendue



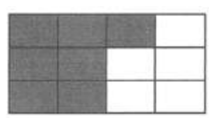
Réponse observée

Question 1 : Colorie les 5/8 de la figure

Nombre d'erreurs de ce type
groupe témoin : 11
groupe « tremplin » : 17



Réponse attendue

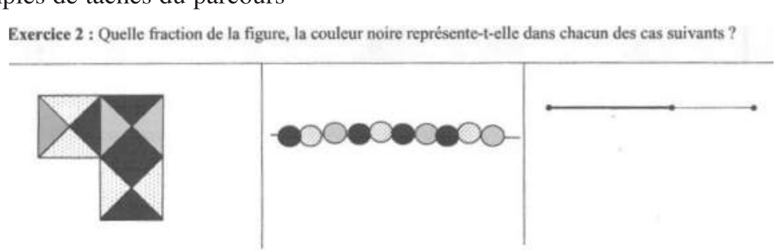


Réponse observée

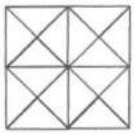
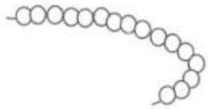
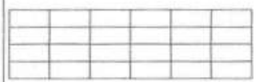
Question 2 : Colorie les 7/24 de la figure
Nombre d'erreurs de ce type
groupe témoin : 15
groupe « tremplin » : 39

6. Le travail par groupes de besoin

Les élèves sont regroupés en parcours *, ** ou *** en fonction de leurs résultats à l'évaluation initiale. Une fiche de travail est proposée à tous. Le rythme de travail des élèves du groupe témoin a été beaucoup plus rapide (ils ont tous terminé la fiche), contrairement aux élèves du groupe « tremplin ».
Toutes les tâches visent les mêmes objectifs d'apprentissage, mais elles sont de plus en plus abstraites : le travail initial autour des carrés de Mac Mahon favorise l'évocation mentale et constitue une référence.
Exemples de tâches du parcours *

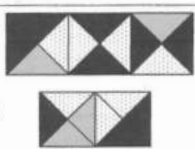


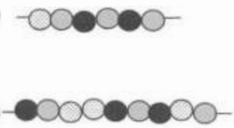
Exercice 3 : Colorie $\frac{3}{8}$ de chacune des figures dans la couleur de ton choix.

Exemples de tâches du parcours**

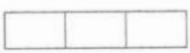
Exercice 1 : Dans chacun des cas, dire si les fractions des deux figures coloriées en noir sont identiques.

1) 2)


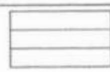
1) 2)


1) 2)


Exercice 5 : Compléter les égalités ci-dessous. Tu **peux** t'aider des figures.

$\frac{2}{3} = \frac{\cdots\cdots}{9}$


$\frac{4}{5} = \frac{\cdots\cdots}{20}$


$\frac{2}{3} = \frac{\cdots\cdots}{15}$


$\frac{4}{5} = \frac{\cdots\cdots}{15}$


$\frac{2}{3} = \frac{\cdots\cdots}{18}$

$\frac{4}{5} = \frac{\cdots\cdots}{35}$

Exemples de tâches du parcours ***

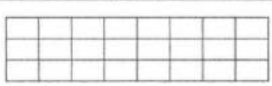
Exercice 4 : Compléter : la couleur grise représente : …

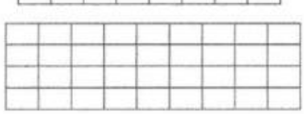
$\frac{\cdots\cdots}{12}$ de la figure
$\frac{\cdots\cdots}{6}$ de la figure
$\frac{\cdots\cdots}{3}$ de la figure

$\frac{\cdots\cdots}{9}$ de la figure
$\frac{\cdots\cdots}{3}$ de la figure

$\frac{\cdots\cdots}{18}$ de la figure
$\frac{\cdots\cdots}{9}$ de la figure
$\frac{\cdots\cdots}{6}$ de la figure
$\frac{\cdots\cdots}{3}$ de la figure

Exercice 6 : Simplifier les fractions suivantes. Tu **peux** t'aider des figures.

$\frac{15}{24} =$


$\frac{24}{36} =$


$\frac{18}{24} =$

$\frac{72}{48} =$

7. L'analyse *a posteriori* de l’évaluation finale

L'évaluation finale est construite sur le même principe que l’évaluation initiale. (*figure 7*)

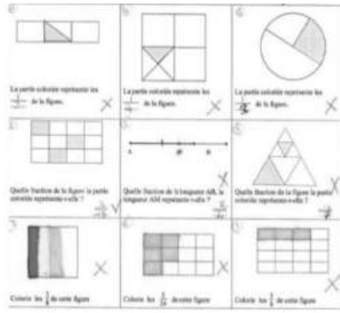


Figure 7

Les résultats comparés entre les deux évaluations

du point de vue des sujets (figures 8 et 9)

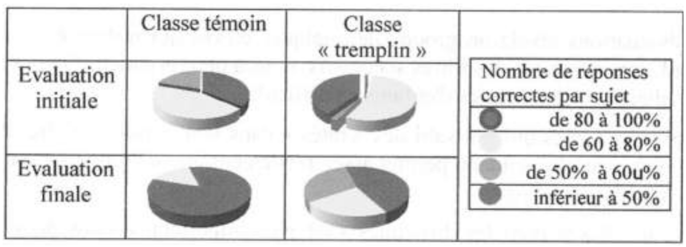


Figure 8

– Chez les élèves « témoins », 76% des élèves progressent entre l’évaluation initiale et la finale. Les progrès peuvent être importants : deux élèves du groupe les plus en difficulté dans l’évaluation initiale répondent à toutes les questions. Les erreurs sont rares (7%) et l'absence de réponse est exceptionnelle (une seule). (figure 8)
– Chez les élèves « tremplin », 68% d’entre eux progressent de manière importante dont 27% qui saturent l'épreuve, pour certains, issus du groupe le plus en difficulté dans l’évaluation initiale. 9% des élèves ne progressent pas. (figure 8)

Evaluation initiale / Evaluation finale	Classe témoin	Classe « tremplin »
100% de réussite aux 2	40 %	14%
Fig > num	28%	72%
Fig < num	28%	14%
Homogène bas	4%	-

Figure 9

Concernant les représentations figurales / fractions numériques (figure 9), les « préférences » des élèves du groupe témoin se répartissent en deux groupes comparables, ce qui n'est pas vrai dans le groupe « tremplin ». Leur préférence pour les problèmes à données visuelles est très nette (72%) et nous incite à penser que les effets de notre entraînement se sont fait sentir.

du point de vue des figures (figure 10)

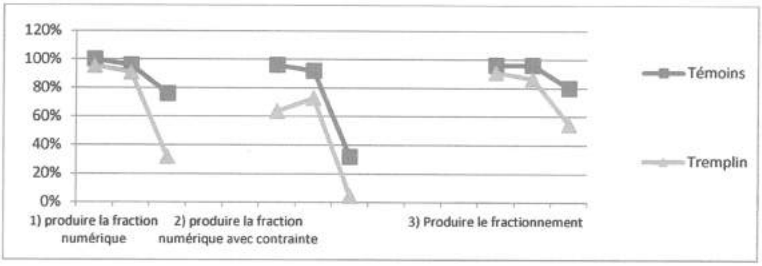


Figure 10

Il semble qu'après l'apprentissage, les progrès se fassent sentir essentiellement sur les exercices demandant de produire la fraction numérique à partir des représentations figurées (ligne 1/ligne 3, figure 11) et ce pour les deux groupes, les élèves « témoins » progressant beaucoup plus que les élèves « tremplin ». Les progrès concernant la production du fractionnement semblent beaucoup moins flagrants pour les deux groupes. La production d’une représentation de type figuratif est plus aisée pour le groupe témoin que pour les élèves « tremplin ».

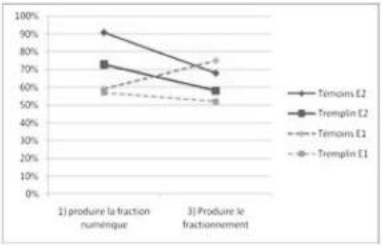


Figure 11

Conclusion

La comparaison des deux évaluations révèle un groupe de quelques élèves qui restent en grande difficulté. Ainsi, notre travail, conçu comme des filtres successifs, nous a permis d'identifier, au sein de cette classe un peu particulière, trois catégories d'enfants en difficulté.

Le premier groupe rassemble des élèves qui ont subi des « ratés » dans leur cursus scolaire. Pour ceux-là, un accompagnement un peu plus soutenu permet assez facilement une « normalisation » et la réintégration rapide dans une classe ordinaire.

Un deuxième groupe réunit les élèves dont les difficultés sont plus importantes, mais pour qui l'identification précise des obstacles liés au concept et l’analyse de leurs difficultés particulières ont permis une adaptation de notre intervention pédagogique : l'ancrage des notions dans les représentations visuelles, la manipulation active pour passer d’un système de signifiants à un autre, la différenciation des tâches, des supports, du rythme d’appropriation...

Le troisième petit groupe rassemble des enfants présentant de réels troubles des apprentissages. Notre expérience montre que le cours accompagnement mis en place dans cette classe « tremplin » est très insuffisant et ne permet pas de remettre ces élèves « à flots ». Qu’ils soient diagnostiqués dyscalculiques ou pas, ils bénéficieraient d’une démarche pédagogique adaptée sur le long cours et certainement d’interventions plus spécifiques et plus individualisées.

Dans tous les cas, ce travail nous renforce dans l’idée que l’école a un rôle premier à jouer dans la recherche de stratégies adaptatives. C’est pourquoi, nous sommes convaincues de la nécessité de former les enseignants à ce rôle.

Les compétences théoriques et pragmatiques qui méritent d’être développées en formation comprennent à notre avis, outre les compétences relatives à la discipline et à la gestion de la classe, des compétences qui sont liées aux élèves (Paquay, Altet, Charlier et Perrenoud, 2001, p. 69) : savoir les observer, les évaluer, identifier leurs possibilités, leurs difficultés, leurs besoins. C’est pour nous l’analyse de l’activité de l’élève qui, en croisant ses caractéristiques et celles du savoir auquel on a l’intention de le confronter, permet d’adapter les tâches en modulant leurs difficultés objectives.

Bibliographie

BRISSIAUD, R. (2002). *Psychologie et didactique : choisir des problèmes qui favorisent la conceptualisation des opérations arithmétiques*. In Bideaud J. & Lehalle H. Le développement des activités numériques (p. 265-291). Paris : Hermès.

DUQUESNE-BELFAIS, F. & GIRODET, M.-A. (2012). Collection *Tous en maths*, Paris : Nathan

FISCHER, J.-P. (2009). Six questions ou propositions pour cerner la notion de dyscalculie développementale, *ANAE*, n° 102, pp117-133, Paris.

LENOIR (Y.), PASTRE (P.) (dir.)(2008), *Didactique professionnelle et didactiques disciplinaires en débat*, Toulouse, Octarès.

PAQUAY (L.), ALTET (M.), CHARLIER (E.), PERRENOUD(P.), (2001), *Former des enseignants professionnels : Quelles stratégies ?* Quelles compétences ?, De Boeck Université, Bruxelles, 3e édition.

PASTRÉ (P.), MAYEN (P.), VERGNAUD (G.), « La didactique professionnelle », *Revue française de pédagogie*, n° 154, p. 145-198, 2006. [en ligne], consulté le 08 avril 2011. URL : http://rfp.revues.org/157