Un puzzle astucieux

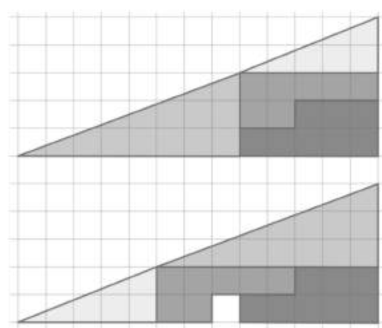
Matériaux pour un problème.

Bernard Langer[*]

Introduction (version romancée)

Récemment un collègue écrivait :

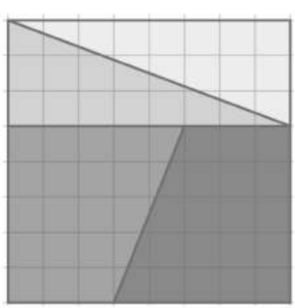
« *J'ai le souvenir d'une sorte de puzzle où, en découpant un triangle et réarrangeant les morceaux en rectangle, ou le contraire, et en calculant les aires, on semblait prouver que* 8 = 9, *ou quelque chose dans ce style…* »

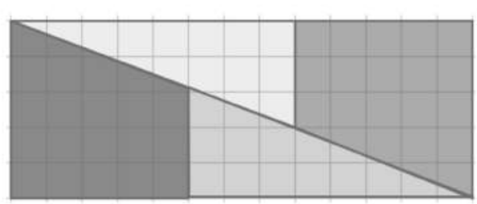


Je me souvenais d'un assemblage triangulaire de prime abord assez surprenant.

Internet apporte des réponses rapides et me rappelle que cet assemblage est connu sous le nom de « triangle de Curry[1] ». Aucun mystère là-dessous, les hypoténuses des triangles n'étant pas « droites ».
On trouvera des explications quant au choix des dimensions des pièces du puzzle à la fin de cet article.

Dans le même ordre d'idées, en assemblant de deux manières différentes un puzzle rectangulaire, on donne l'illusion, en comparant les aires des deux assemblages, que 64 = 65…





(*) Bernard.langer@laposte.net
(1) Paul Curry (1917 – 1986) était un magicien amateur newyorkais ami de Sam Loyd.

Au cours de ma navigation, le Net m'a fait découvrir une vidéo tout à fait étonnante :

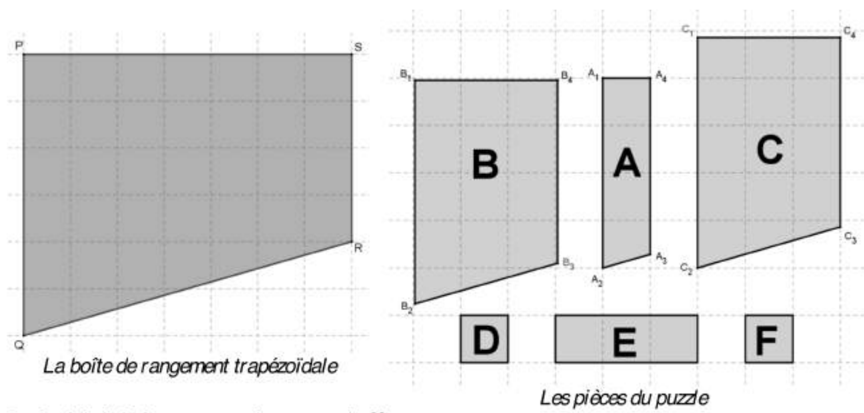
http://www.youtube.com/watch?v=3PszMaZ5Ipk

Magique ? Bien sûr que non, mais si comme moi vous restez intrigués après plusieurs visionnages, cet article va lever le voile et en prime vous donnera quelques pistes d'exercices ou de problèmes adaptables au Collège ou au Lycée… Libre à chacun d'utiliser tout ou partie de ces pistes. Nous les présenterons sous forme de quatre défis.

Défi N° 1 : (Le puzzle)

On dispose d'une boîte et d'un puzzle constitué de 6 pièces polygonales. Le problème consiste à ranger les pièces dans la boîte, les superpositions étant interdites !

Une unité de longueur étant choisie (si vous souhaitez réaliser le puzzle, 1,5 cm est un bon choix). Voici les indications de départ :



La boîte de rangement trapézoïdale

Les pièces du puzzle

Le fond de la boîte est un trapèze rectangle X_1 :

- grande base : PQ = 6.
- petite base : RS = 4.
- hauteur : PS = 7.

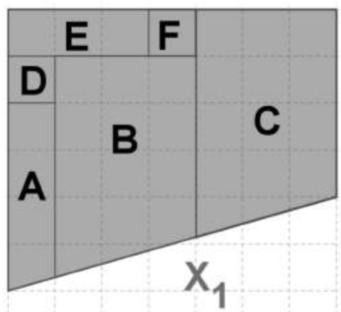
Les six pièces du puzzle sont constituées de :

- 3 trapèzes rectangles A, B, C :
  A est de hauteur $A_1A_4 = 1$. B et C sont de hauteur $B_1B_4 = C_1C_4 = 3$.
- 2 carrés D et F de côté 1.
- un rectangle E de longueur 3 et de largeur 1.

Dans un premier temps il s'agit de trouver la bonne disposition des pièces à l'aide du logiciel *Geogebra* et du fichier *puzzle.ggb* (que vous trouverez sur le site de l'APMEP) qui est indispensable à moins que vous ne préfériez manipuler les pièces découpées dans du carton. Ce fichier n'a aucune vertu pédagogique et il est sans doute inutile de le faire construire aux élèves, seules les manipulations sont intéressantes.

Sachant que le puzzle épouse parfaitement la boîte X_1, *le premier défi consiste à le vérifier puis à déterminer les dimensions exactes de chaque pièce.*

Voici quelques éléments de solution :



Une autre solution consiste à placer la pièce F au-dessus de D et de pousser E vers la droite.

Pour déterminer les dimensions des pièces, on pourra, suivant le niveau d'enseignement, utiliser le théorème de Thalès, une homothétie, une équation de droite, etc. pour trouver :

$$A_1A_4 = 4\ ;\ A_3A_4 = \frac{26}{7}\ ;\ B_1B_2 = \frac{33}{7}\ ;\ B_3B_4 = \frac{27}{7}\ ;\ C_1C_2 = \frac{34}{7}\ ; C_3C_4 = 4.$$

On pourra vérifier l'exactitude des calculs en comparant l'aire de la boîte : $(6+4)\dfrac{7}{2} = 35$ avec la somme des aires des pièces du puzzle :

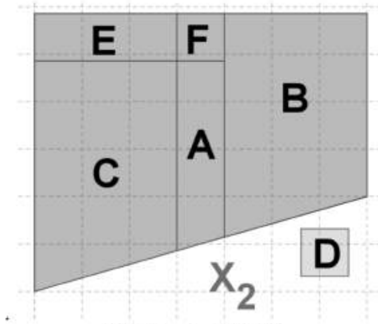
$$S = \text{aire(A)} + \text{aire(B)} + \text{aire(C)} + \text{aire(D)} + \text{aire(E)} + \text{aire(F)}.$$

$$S = \left(4+\frac{26}{7}\right)\frac{1}{2} + \left(\frac{33}{7}+\frac{27}{7}\right)\frac{3}{2} + \left(\frac{34}{7}+4\right)\frac{3}{2} + 1 + 3 + 1 = 35.$$

Défi N° 2 : (magique)

On raccourcit les deux bases de la boîte de $\frac{1}{7}$. En utilisant d'abord le fichier Geobegra puis en vérifiant par le calcul :

Montrer que l'on peut encore ranger le puzzle privé de la pièce D *dans la boîte trapézoïdale* X_2 *dont les bases mesurent* 41/7 *et* 27/7.

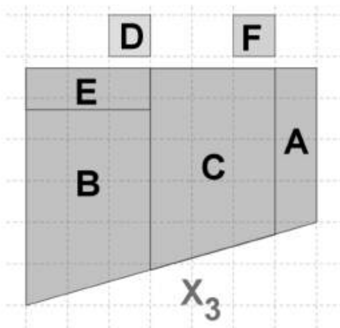


Solution du défi N°2

Défi N° 3 : (ça se corse)

On diminue encore … les deux bases de la boîte de $\frac{1}{7}$.

Montrer que l'on peut ranger le puzzle privé des pièces D *et* F *dans la boîte* X_3 *dont les bases mesurent* 40/7 et 26/7

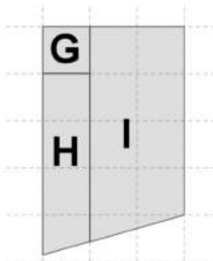


Solution du défi N° 3

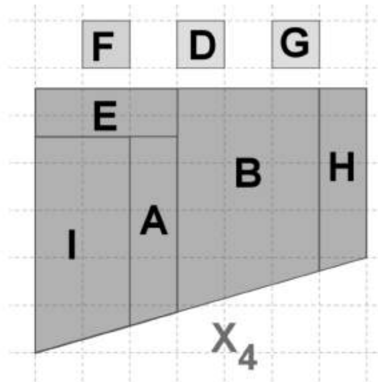
Défi N° 4 : (de plus en plus fort)

Ne me dites pas… Et bien si ! On va encore diminuer les deux bases de la boîte de $\frac{1}{7}$. Il faudra cependant découper la pièce C …

Montrer que l'on peut ranger le puzzle privé des pièces D, F, G *dans la boîte* X_4 *dont les bases mesurent* 39/7 et 25/7



Découpage de la pièce *C*

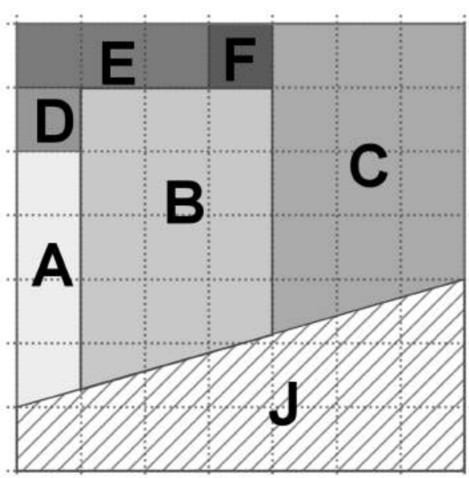


Solution du défi N°4

Et pour terminer un T.P…

Avec un cutter et une bonne règle métallique (attention aux doigts) on peut découper les pièces du puzzle dans du carton fort avec une précision satisfaisante.

Les boîtes trapézoïdales étant extrêmement rares, on aura recours à une boîte carrée de dimensions 7×7 par exemple. On ajoutera alors une pièce trapézoïdale J au puzzle. Le seul rôle de cette pièce est de combler le vide occasionné et elle occupera toujours la même position.



La manipulation consiste à :

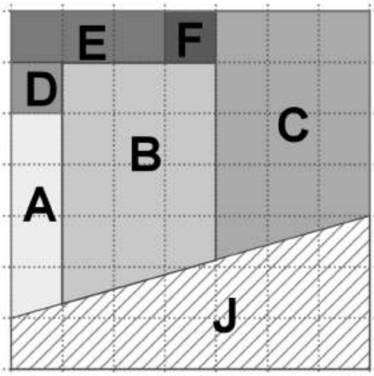
1. Ranger le puzzle dans la boîte.
2. Enlever un carré puis ranger les pièces restantes à nouveau dans la même boîte en donnant l'illusion que les pièces occupent toujours la totalité de l'espace disponible.

D’après ce qui précède cette manipulation peut être réalisée 3 fois de suite et peut-être est-t-il plus spectaculaire de la réaliser dans l’ordre inverse.

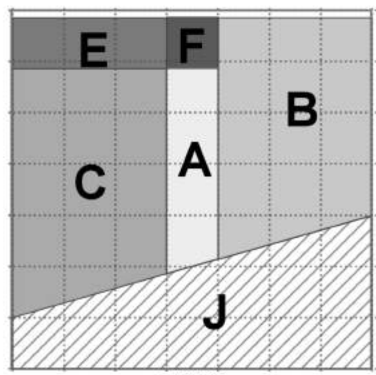
À chaque étape, la longueur du rectangle diminue de 1/7 soit un peu plus de 2 mm (en retenant 1,5 cm comme unité) ce qui devrait passer inaperçu ou être mis sur le compte des inévitables erreurs de fabrication…

Le fait d’avoir ajouté une pièce permet de mieux répartir le vide résultant entre les différents « joints » des pièces.

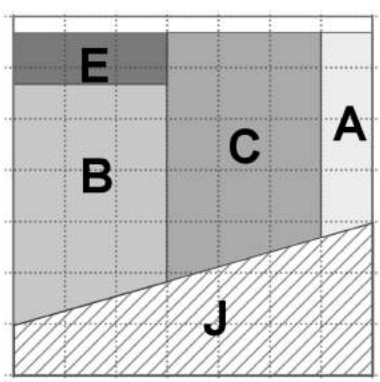
Pour terminer nous présentons les différentes organisations en utilisant des pièces dessinées sur un quadrillage régulier. A ce stade il est peut-être intéressant de visionner une nouvelle fois la vidéo citée en début d’article.



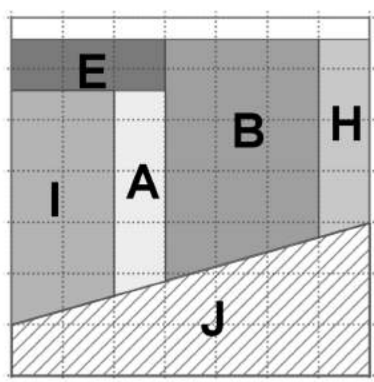
Défi N°1



Défi N°2



Défi N°3



Défi N° 4

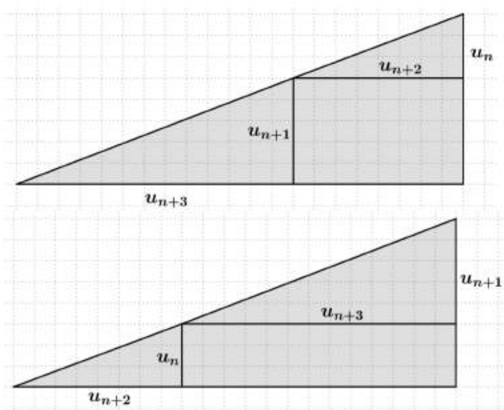
Complément

Où l’on retrouve la suite de Fibonacci pour expliquer l’illusion du triangle de Curry.

On peut lier le triangle de Curry aux termes de la suite de Fibonacci qui, rappelons-le, est définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_1 = 1, \\ \forall n > 1, u_n = u_{n-1} + u_{n-2}. \end{cases}$$

Les premiers termes de cette suite sont : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, …



À titre d'exemple nous avons retenu $u_3 = 3$; $u_4 = 5$; $u_5 = 8$; $u_6 = 13$ pour construire les pièces du puzzle ci-dessous (plus les termes retenus sont grands meilleure sera l'illusion).

Premier assemblage

L'aire du rectangle est égale à :

$$u_{n+1} \times u_{n+2} = 5 \times 8 = 40.$$

Second assemblage

L'aire du rectangle est égale à :

$$u_n \times u_{n+3} = 3 \times 13 = 39.$$

La différence des aires des deux rectangles est :

$$u_n \times u_{n+3} - u_{n+1} \times u_{n+2}.$$

Or une propriété remarquable des termes de la suite de Fibonacci est :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \times u_{n+2} - u_n \times u_{n+3} = 1.$$

Ceci explique l'origine du « carré manquant ».Il suffit alors de découper le rectangle d'aire la plus petite en pièces recouvrant une partie de l'autre rectangle. Ce découpage est toujours possible puisque le nombre de pièces du découpage n'est pas imposé.

Par exemple :