Les problèmes de l'APMEP

Les propositions de problèmes, solutions ou commentaires, sont à envoyer à

Max HOCHART
13, rue des Garennes
63 800 Cournon d'Auvergne
ou
hochartmax@yahoo.fr

Énoncés des nouveaux problèmes

Problème 504–1 (Moubinool Omarjee (Lycée Henri IV Paris))

On note $\lfloor\ \rfloor$ *la fonction partie entière et, pour* $n \in \mathbb{N}^*$, p_n *est le n-ième nombre premier. Étudier la nature de la série*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{\lfloor n\sqrt{2}\rfloor}}{p_n}.$$

Problème 504–2 (Ghali Lalami (Marrakech))

Trouver tous les $n \in \mathbb{N}$ *tels que* $3^n - 2$ *soit un carré parfait.*

Problème 504–3 (Franck Gautier (Pérignat Lès Sarlieves))

On désigne par $\mathrm{D} = \mathrm{B}(0, 1)$ *le disque ouvert de centre* 0 *et de rayon* 1 *du plan. Pour un chemin* $\Phi : \begin{cases} [0,1] & \rightarrow & \mathrm{D} \\ t & \mapsto & (x(t), y(t)) \end{cases}$ *de classe* C^1*, on définit l'énergie de* Φ *par*

$$\mathrm{E}(\Phi) = \int_0^1 \frac{x'(t)^2 + y'(t)^2}{\left(1 - x(t)^2 - y(t)^2\right)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Déterminer l'ensemble des chemins reliant le centre 0 *à un point* $\mathrm{M}_0 \in \mathrm{D}$ *qui minimisent cette énergie.*

Problème 504–4 (Michel Lafond (Dijon))

On définit la suite u par la condition initiale $u_0 = 3$ *et pour* $n \in \mathbb{N}$*, par la relation* $u_{n+1} = u_n + \sin(u_n)$. *Montrer que* u_3 *est une approximation par défaut de* π *à* 10^{-33}.

Solutions des problèmes antérieurs

Problème 495–3 (Question de Michel Lafond)

Un entier strictement positif n est pythagoricien si dans l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ des entiers modulo n, tout élément est somme de deux carrés. Quels sont les entiers pythagoriciens ?

Réponses de Michel Lafond (Dijon) et Pierre Renfer (Saint-Georges d'Orques).

La lettre p désignera toujours un nombre premier. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{Z}$, on notera abusivement k la classe de k dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, en mentionnant toujours qu'une égalité a lieu dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si tel est le cas. On dira que l'entier $k \in \mathbb{Z}$ est un carré modulo n si l'équation $x^2 = k$ admet (au moins) une solution x dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

On rappelle sans démonstration le résultat suivant (dont on trouvera une preuve dans tout bon livre d'arithmétique ou par exemple dans l'excellent ouvrage « Exercices de mathématiques pour l'agrégation » de **Serge Francinou** et **Hervé Gianella**, publié chez Masson).

Théorème 1 (Théorème des deux carrés)

Un entier $n \in \mathbb{N}^*$ peut s'écrire comme somme de deux carrés d'entiers si et seulement si, dans sa décomposition en facteurs premiers, les facteurs premiers congrus à 3 modulo 4 apparaissent avec un exposant pair.

On va montrer qu'un entier $n \in \mathbb{N}^*$ est pythagoricien si et seulement si, dans la décomposition de n en produit de facteurs premiers, le facteur 2 et les facteurs premiers congrus à 3 modulo 4 apparaissent avec un exposant au plus égal à 1.

• On commence par montrer qu'un entier n divisible par p^2 avec $p = 2$ ou p congru à 3 modulo 4 ne peut être pythagoricien. Soit n un tel entier et p un tel facteur premier de n. Si, pour tout $k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, l'équation $k = x^2 + y^2$ a une solution $(x,y) \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2$, alors, pour tout $k \in \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$, l'équation $k = x^2 + y^2$ a une solution $(x,y) \in (\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})^2$. Or si $p = 2$, l'équation $3 = x^2 + y^2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, puisque, dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, les carrés valent 0 ou 1, donc la somme de deux carrés vaut 0, 1 ou 2, jamais 3. Et si $p \equiv 3 \bmod 4$, l'équation $p = x^2 + y^2$ ne peut avoir de solution dans $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$. Sinon, il existerait trois entiers a, b, $c \in \mathbb{Z}$ tels que $p = a^2 + b^2 - cp^2$, soit encore $a^2 + b^2 = p(1 + cp)$. Mais alors l'entier $p(1 + cp)$ serait divisible par p et pas par p^2, tandis que p doit apparaître dans $a^2 + b^2$ avec un exposant pair, d'où la contradiction.

La suite de ce texte est consacré à la contraposée : tout entier n, divisible ni par 4 ni par aucun nombre p^2 avec p premier congru à 3 modulo 4, est pythagoricien.

• On commence par le cas où n est un nombre premier p. Le cas $p = 2$ est évident. Pour $p \geq 3$, l'idée classique est de remarquer qu'il y a $\dfrac{p+1}{2}$ carrés dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. En effet, l'application définie sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} - \{0\}$ par $g \mapsto g^2$ a pour image l'ensemble des carrés non nuls. Et tout carré non nul possède exactement deux antécédents, puisque dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, l'équation $a^2 = b^2$ impose $(a - b)(a + b) = 0$, soit $a = b$ ou $a = -b$. Il y a donc $\dfrac{p-1}{2}$ carrés non nuls dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, soit $\dfrac{p+1}{2}$ carrés en ajoutant 0. Soit alors $k \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Les ensembles $\{k - x^2 \mid x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\}$ et $\{y^2 \mid y \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\}$, tous deux de cardinal $\dfrac{p+1}{2}$, ne peuvent être disjoints. Il existe donc $x, y \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ tels que $k - x^2 = y^2$. Ainsi, tout $k \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est somme de deux carrés.

• Pour étendre le résultat au cas où $n = p^\alpha$, où p est un nombre premier, $p \equiv 1 \bmod 4$, et α est un entier, $\alpha \geq 2$, on énonce un petit lemme :

Lemme 1

Soit p un nombre premier, $p \geq 3$, $\alpha \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{Z}$ non divisible par p. Alors k est un carré modulo p si et seulement si k est un carré modulo p^α.

Si k est un carré modulo p^α, comme α est supérieur ou égal à 1, alors k est un carré modulo p. Pour montrer l'autre sens, on suppose que l'équation $x^2 = k$ a au moins une solution x dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. On va montrer par récurrence sur $\alpha \in \mathbb{N}^*$ que l'équation $x^2 = k$ a au moins une solution x dans $\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}$. Pour $\alpha = 1$, c'est l'hypothèse. On suppose le résultat établi à un rang $\alpha \geq 1$. Il existe donc deux entiers X, $m \in \mathbb{Z}$ tels que $k = \mathrm{X}^2 + mp^\alpha$. Pour $\lambda \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{X}+\lambda p^\alpha\right)^2 &= \mathrm{X}^2 + 2\lambda \mathrm{X} p^\alpha + \lambda^2 p^{2\alpha}\\ &= k + \left(2\lambda\mathrm{X} - m\right)p^\alpha + \lambda^2 p^{2\alpha}.\end{aligned}$$

Comme $2\alpha \geq \alpha + 1$,

$$\left(\mathrm{X}+\lambda p^\alpha\right)^2 = k + \left(2\lambda\mathrm{X} - m\right)p^\alpha \quad \bmod p^{\alpha+1}.$$

Comme k n'est pas divisible par p et comme $p \geq 3$, l'entier $2\mathrm{X}$ est premier à p, donc est inversible dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, ce qui permet de choisir l'entier $\lambda \in \mathbb{Z}$ tel que $2\lambda\mathrm{X} \equiv m \bmod p$. En posant $\mathrm{Y} = \mathrm{X} + \lambda p^\alpha \in \mathbb{Z}$, on obtient $\mathrm{Y}^2 \equiv k \bmod p^{\alpha+1}$, ce qui clôt la démonstration.

• Comme annoncé, on montre maintenant que p^α est pythagoricien (toujours avec p premier, $p \equiv 1 \bmod 4$ et $\alpha \in \mathbb{N}^*$). Soit $k \in \mathbb{Z}$. On veut montrer que $k = x^2 + y^2 \bmod p^\alpha$ a une solution $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$. Pour cela, on écrit $k = p^j k'$ avec $j \in \mathbb{N}$ et k' premier avec p. On sait (par le théorème des deux carrés) que p^j est somme de deux carrés dans $\mathbb{Z}$ (donc dans $\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}$ en réduisant modulo p^α). On sait également que le produit de sommes de deux carrés est encore une somme de deux carrés dans $\mathbb{Z}$ (donc dans $\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}$), en vertu de l'identité de Lagrange : pour $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$,

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2.$$

Il suffit donc de montrer que k' est somme de deux carrés modulo p^α. Puisque tout nombre premier est pythagoricien (traité plus haut), il existe $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $k' = x_0^2 + y_0^2 \mod p$. Si y_0 n'est pas divisible par p, l'entier $k' - x_0^2$ est un carré modulo p, donc modulo p^α : il existe $y \in \mathbb{Z}$ tel que $k' - x_0^2 = y^2$, ce qui conclut. Le cas où x_0 n'est pas divisible par p est semblable. Enfin, le cas où p divise à la fois x_0 et y_0 est exclu car sinon, p diviserait k'.

• Enfin, on montre que si deux entiers m, $n \in \mathbb{N}^*$, premiers entre eux, sont pythagoriciens, alors leur produit mn est pythagoricien. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Puisque m et n sont pythagoriciens, il existe quatre entiers $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ tels que

$$k \equiv a^2 + b^2 \mod m$$

et

$$k \equiv c^2 + d^2 \mod n.$$

Puisque m et n sont premiers entre eux, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$ tels que

$$\lambda m + \mu n = 1.$$

On considère alors

$$\mathrm{A} = \lambda mc + \mu na \text{ et } \mathrm{B} = \lambda md + \mu nb.$$

Alors

$$\mathrm{A} = \lambda mc + \mu na = \lambda mc + (1 - \lambda m)a,$$

donc $\mathrm{A} \equiv a \mod m$, tandis que

$$\mathrm{A} = \lambda mc + \mu na = (1 - \mu n)c + \mu na,$$

donc $\mathrm{A} \equiv c \mod n$. De même $\mathrm{B} \equiv b \mod m$ et $\mathrm{B} \equiv d \mod n$. Donc

$$\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 \equiv a^2 + b^2 \mod m,$$

soit

$$\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 \equiv k \mod m,$$

et de même,

$$\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 \equiv k \mod n.$$

Enfin, puisque m et n sont premiers entre eux,

$$\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 \equiv k \mod mn,$$

ce qu'il fallait démontrer.

• Si maintenant n n'est divisible ni par 2 ni par aucun p^2 avec $p \equiv 3 \mod 4$, on écrit $n = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{v_p(n)}$, l'ensemble $\mathcal{P}$ désignant l'ensemble des nombres premiers. Chaque facteur $p^{v_p(n)}$ étant pythagoricien, le produit n l'est encore.

En commentaires, on peut remarquer que le lemme 1 est un cas particulier du lemme de Hensel : soit P un polynôme à coefficients dans l'anneau $\mathbb{Z}_p$ des entiers p-adiques et $a_0 \in \mathbb{Z}_p$ tel que $P(a_0) \equiv 0 \bmod p$ et $P'(a_0) \not\equiv 0 \bmod p$. Alors, il existe $a \in \mathbb{Z}_p$ tel que $P(a) = 0$ et $a \equiv a_0 \bmod p$. Le lemme s'obtient en prenant $P(X) = X^2 - k$ (d'où la nécessité du $p \neq 2$). Et le calcul des entiers A et B ci-dessus résulte bien sûr du théorème des restes chinois.

Problème 497–2 (Question de Pascale De Jonghe)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe et R un réel, $R > 1$. On suppose que la suite $(Ru_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{C}$ quand n tend vers $+\infty$. étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Réponses de Raymond Heitz (Piriac), Pascale De Jonghe (Clermont-Ferrand) et Pierre Renfer (Saint-Georges d'Orques).

On va montrer que u_n converge vers $\dfrac{l}{R-1}$ quand n tend vers $+\infty$. On commence par se ramener au cas où $l = 0$. Pour cela, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - \dfrac{l}{R-1}$.

Alors, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$R\,v_{n+1} - v_n = R\,u_{n+1} - u_n - \frac{l}{R-1}(R-1) = (R\,u_{n+1} - u_n) - l \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Si l'on sait montrer que la suite v tend vers 0, c'est gagné.

Soit donc une suite complexe $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $Rv_{n+1} - v_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Il faut montrer que v tend vers 0. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $\delta_k = Rv_{k+1} - v_k$. La suite δ tend vers 0. Par définition, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$R^k\delta_k = R^{k+1}v_{k+1} - R^k v_k.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En sommant la relation précédente pour $k \in [[0, n-1]]$,

$$R^n v_n - v_0 = \sum_{k=0}^{n-1} R^k \delta_k.$$

Donc

$$v_n = \sum_{k=0}^{n-1} R^{k-n}\delta_k + \frac{v_0}{R^n} = \sum_{k=1}^{n} R^{-k}\delta_{n-k} + \frac{v_0}{R^n}$$

Puisque $R > 1$, le terme $\dfrac{v_0}{R^n}$ tend clairement vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Pour finir, il s'agit de montrer que la somme $\sum_{k=1}^{n} R^{-k}\delta_{n-k}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Pour simplifier les notations, on note $r = \dfrac{1}{\mathrm{R}}$. Le point fondamental est l'encadrement $0 < r < 1$.

• Soit $\varepsilon > 0$. Puisque les suites (δ_n) et (r^n) tendent vers 0, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que, pour $k \geq p$,

$$|\delta_k| < \varepsilon \quad \text{et} \quad 0 < r^k < \varepsilon.$$

On choisit $n \geq 2p$. On découpe la somme ainsi :

$$\sum_{k=1}^{n} r^k \delta_{n-k} = \sum_{k=1}^{p} r^k \delta_{n-k} + \sum_{k=p+1}^{n} r^k \delta_{n-k}.$$

Par l'inégalité triangulaire,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} r^k \delta_{n-k}\right| \leq \sum_{k=1}^{p} r^k |\delta_{n-k}| + \sum_{k=p+1}^{n} r^k |\delta_{n-k}|.$$

Dans la première somme, $k \leq p$ donc $n - k \geq n - p \geq p$ et $|\delta_{n-k}| < \varepsilon$. Dans la seconde somme, $k \geq p$ donc et $|r^k| < \varepsilon$. Enfin, puisque la suite δ tend vers 0, elle est bornée, disons par $\mathrm{M} > 0$. Ainsi,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} r^k \delta_{n-k}\right| \leq \varepsilon \sum_{k=1}^{p} r^k + \mathrm{M} \sum_{k=p+1}^{n} r^k.$$

On calcule les deux sommes géométriques :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} r^k \delta_{n-k}\right| \leq \varepsilon \frac{r - r^{p+1}}{1-r} + \mathrm{M} \frac{r^{p+2} - r^{n+1}}{1-r}.$$

Le dénominateur est positif. On majore donc la fraction en majorant le numérateur :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} r^k \delta_{n-k}\right| \leq \varepsilon \frac{r}{1-r} + \mathrm{M} \frac{r^{p+2}}{1-r}.$$

Par choix de l'entier p, on a la majoration $r^{p+2} < \varepsilon$. Ainsi,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} r^k \delta_{n-k}\right| \leq \frac{r + \mathrm{M}}{1-r} \varepsilon.$$

Le terme $\dfrac{r+\mathrm{M}}{1-r}$ est une constante. Vu l'arbitraire sur ε, on a bien montré que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} r^k \delta_{n-k}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Problème 496–1 (Question de Michel Lafond)

Un triangle a un périmètre p et une aire A. Montrer que chaque côté du triangle mesure au plus

$$\frac{p}{6}\left(1+2\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(1-\frac{864\mathrm{A}^2}{p^4}\right)\right)\right).$$

Réponses de Maurice Bauval (Versailles), Jean-Claude Carréga (Lyon), François Couloigner (Tarbes) et Michel Lafond (Dijon).

On note q le demi périmètre du triangle : $p = 2q$. Si a désigne la longueur d'un des côtés du triangle, il faut montrer que

$$a \leq \frac{q}{3}\left(1+2\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(1-\frac{54\mathrm{A}^2}{q^4}\right)\right)\right) \qquad (1)$$

D'après la formule de Héron,

$$\mathrm{A}=\sqrt{q(q-a)(q-b)(q-c)}.$$

Et d'après l'inégalité arithmético-géométrique, pour des réels $x_1, \ldots, x_n > 0$,

$$\prod_{k=1}^{n} x_k \leq \left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right)^n.$$

On en déduit

$$\mathrm{A}=\sqrt{q}\sqrt{(q-a)(q-b)(q-c)} \leq \sqrt{q}\sqrt{\left(\frac{q-a+q-b+q-c}{3}\right)^3},$$

et comme $q - a + q - b + q - c = 3q - p = q$,

$$\mathrm{A} \leq \sqrt{\frac{q^4}{27}},$$

ce que Jean-Claude Carréga appelle « l'inégalité isopérimétrique pour le triangle ». Ainsi,

$$0 \leq \frac{54\mathrm{A}^2}{q^4} \leq 2,$$

donc

$$-1 \leq 1-\frac{54\mathrm{A}^2}{q^4} \leq 1,$$

et l'inégalité à démontrer a un sens (puisque arccos est définie sur $[-1, 1]$) et est équivalente à

$$\frac{3a-q}{2q} \leq \cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(1-\frac{54\mathrm{A}^2}{q^4}\right)\right) \qquad (2)$$

On remarque que

$$0 \leq a \leq q,$$

donc

$$-q \leq 3a - q \leq 2q$$

puis

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{3a-q}{2q} \leq 1.$$

Les calculs ci-dessous utilisent la décroissance des fonctions cos : $[0, \pi] \to [-1, 1]$ et arccos : $[-1, 1] \to [0, \pi]$ et le fait qu'elles sont réciproques l'une de l'autre. Successivement, la relation (2) devient

$$\arccos\left(1-\frac{54\mathrm{A}^2}{q^4}\right) \leq 3\arccos\left(\frac{3a-q}{2q}\right),$$

puis, en posant

$$\theta = \arccos\left(\frac{3a-q}{2q}\right),$$

$$\cos(3\theta) \leq 1-\frac{54\mathrm{A}^2}{q^4},$$

soit

$$4\cos^3(\theta)-3\cos(\theta) \leq 1-\frac{54\mathrm{A}^2}{q^4}.$$

La valeur de $\cos(\theta)$ étant $\dfrac{3a-q}{2q}$, la relation précédente équivaut à

$$\frac{(3a-q)^3}{2q^3}-3\frac{3a-q}{2q} \leq 1-\frac{54\mathrm{A}^2}{q^4}.$$

soit

$$(3a-q)^3 q-3(3a-q)q^3 \leq 2q^4-108\mathrm{A}^2.$$

Un calcul sans difficulté transforme cela en

$$4\mathrm{A}^2 \leq a^2 q(q-a).$$

En utilisant de nouveau la formule de Héron, la relation (1) devient

$$4q(q-a)(q-b)(q-c) \leq a^2 q(q-a).$$

Si $a = q$, le résultat est trivial. Sinon, il s'agit de montrer que

$$4(q-b)(q-c) \leq a^2.$$

soit, puisque $2q = p = a + b + c$,

$$(a+c-b)(a+b-c) \leq a^2,$$

soit enfin

$$a^2-(b-c)^2 \leq a^2,$$

ce qui est évident.