Exercices de ci, de là-bas

Cette rubrique est faite à partir des propositions de collègues. Elle accueille bien volontiers des exercices même « modestes » mais un peu curieux imaginés ou rencontrés par les collègues soit dans des livres, soit dans des situations exploitées dans leurs classes. N'hésitez donc pas à nous envoyer les exercices piochés « de-ci de-là » qui vous ont plu ou vous ont intrigués. Nous les accepterons avec plaisir et en particulier ceux qui pourraient être mis à la portée d'élèves du secondaire.

Les propositions d'exercices ou les solutions sont à envoyer par mél à :

bruno.alaplantive@free.fr

ou par courrier à :

Jean Fromentin
17 rue de la Roussille
79000 NIORT

Pour l'envoi des propositions et des solutions, privilégiez, si possible, le courrier électronique. Si vous le pouvez, joignez à votre fichier initial une copie au format PDF pour contrôler en particulier les formules qui sont souvent perturbées d'un logiciel à l'autre. Vous faciliterez ainsi notre tâche. Merci d'avance.

Exercices

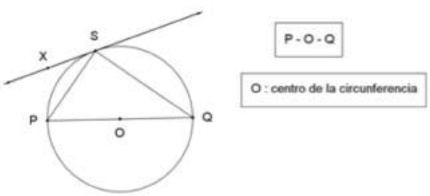
Le thème du dossier de ce numéro 504 m'a incité à vous proposer des exercices de-ci, de là-bas. Le niveau ne dépasse pas la fin de notre secondaire et à ce titre les exercices doivent pouvoir être proposés à nos élèves. Les notations, inhabituelles, se comprennent aisément. Il en va *relativement* de même du texte…

Ne parlant couramment ni la langue de Goethe ni celle de Cervantès, quand j'ai vraiment été pris à défaut, le pourtant très mauvais traducteur de Google a suffi à me faire comprendre les questions. Y répondre n'est plus alors que l'affaire d'une langue internationale : les mathématiques !

Exercice 504-1 español

A. Prueba de Bachillerato – Mayo 2012

Considere la siguiente figura :



De acuerdo con los datos de figura, si XS es tangente a la circunferencia en S y

m∡ QPS=55°, entonces, m∡ PSX es
A) 35° B) 45° C) 55° D) 70°

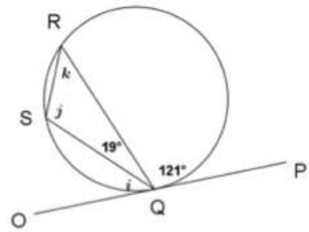
B. Juan Antonio Trejo Peña, Universidad autonoma de Yucatan

- Los pesos de sandías maduras cultivadas en un huerto están distribuidas normalmente con desviación estándar de 1.2 kg. Obtenga el peso medio de las sandías maduras si solo 3% pesa menos de 7.5 kg.
- Una pistola de radar mide la velocidad de los lanzamientos que hacen los pichers de un equipo de beisbol durante un mes de juego. Estos lanzamientos se distribuyen normalmente con velocidad promedio de 85 millas por hora. Cuál es la desviación estándar si el 30% de los lanzadores tiran velocidades superiores a las 92 mi/hr.

Exercice 504-2 english

Everything Maths, Grade 12 Mathematics, Siyavula, Republic of South Africa

A. Find the values of the unknown letters

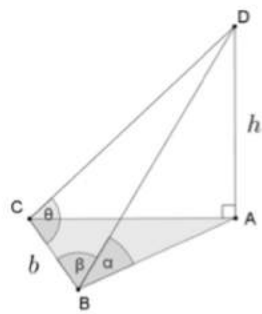


B. D is the top of a tower of height h. Its base is at A.

The triangle ABC lies on the ground (a horizontal plane).

If we have that BC = b, $D\hat{B}A = \alpha$, $D\hat{B}C = \beta$ and $D\hat{C}B = \theta$, show that

$$h = \frac{b \sin\alpha \sin\theta}{\sin(\beta + \theta)}.$$

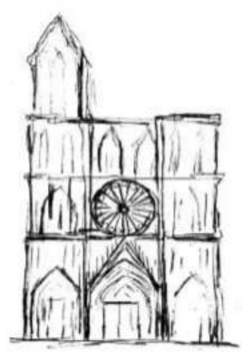


Exercice 504-3 deutsch

Mathematik – Musteraufgaben für Jahrgang 10 (Gymnasium)

Über dem Hauptportal des Straßburger Münsters befindet sich eine gotische Fensterrosette mit dem Durchmesser von 14 m. Ihr unterer Rand ist 28 m über dem Boden.

Die Touristin Jana steht 60 m von dem Hauptportal entfernt und hält ihre Kamera in Augenhöhe von 1,50 m.



Der « Sehwinkel" ist der Winkel zwischen oberem Rosettenrand, Auge des Beobachters und unterem Rosettenrand. Berechne den Sehwinkel, unter dem Jana die Fensterrosette sieht.

En supplément je vous propose de calculer la distance à laquelle Jana doit se placer pour avoir le plus grand angle de vue (*pour nos élèves, l'inspecteur de fonction de Geogebra serait indispensable*).

Exercice 504-4 français

Exercice du défi ouvert canadien de mathématiques 2012

Si n est un entier positif, on dit que le n-uplet $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ où chaque x_i est un entier positif est un *super-carré* si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(1) $x_1 > x_2 > x_3 > \dots > x_n$.

(2) La somme $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2$ est un carré parfait pour chaque k entier de 1 à n.

Par exemple, (12, 9, 8) est *super-carré* car 12 > 9 > 8, et chacune des sommes 12^2, $12^2 + 9^2$, et $12^2 + 9^2 + 8^2$ est un carré parfait.

(a) Déterminer toutes les valeurs de t telles que $(32, t, 9)$ soit un *super-carré*.

(b) Trouver un 4-uplet *super-carré* (x_1, x_2, x_3, x_4) avec $x_1 < 200$.

(c) Déterminer s'il existe un 2012-uplet *super-carré*.

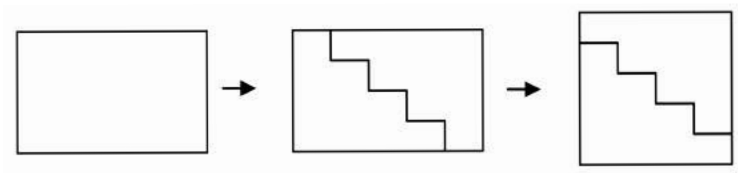
Solutions

J'ai reçu trop « *tardivement* » des réponses de Georges Lion, Odile Simon, L.G Vidiani et Jean-Paul Thabaret, pour les exercices du n° 501 et n'ai pas pu en faire état dans le n° 503. Ce problème est dû au retard dans les dates d'envoi des BV en regard des dates de réunion de la commission. Ce décalage est en passe de se régler et devrait « normalement » vous laisser l'intervalle inter-bulletin ou presque pour vos envois.

Exercice 502-1 à proposer à nos élèves

A. Puzzle : d'un rectangle à un carré

Le principe est celui d'un découpage en escalier comme le montre la figure ci-dessous.

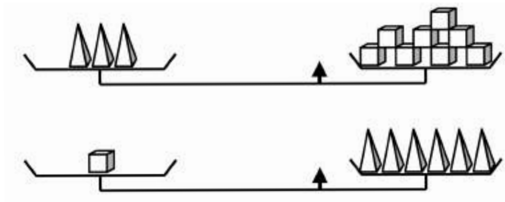


a) Découper en deux morceaux un rectangle de 16,2 cm de long sur 12,8 cm de large pour en faire un carré.

b) Indiquer comment l'on découperait un rectangle de 8192 sur 7938.

B. Balance de Rob……erval
énigme proposée par Sam Loyd

Si une pyramide pèse une livre, combien pèsent les huit cubes ?



C. Tangente *exercice proposé par Catherine Combelles*

Trouver une droite à la fois tangente à la parabole $y = x^2$ et à l'hyperbole $y=\frac{1}{x}$.

Solutions : Jean-Yves Hély (Rennes), Jacques Chayé (Poitiers), Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Albert Marcout (Sainte Savine), Odile Simon (La Prénessaye), Jean-Paul Thabaret (Grenoble), L.G Vidiani (Fontaine les Dijon), Jean Gounon (Chardonnay), Michel Sarrouy (Mende), Raymond Heitz (Piriac).

• Voici les solutions de Jean-Yves Hély.

A. Puzzle

– Rectangle où L = 16,2 cm et ℓ = 12,8 cm. L'escalier possède 9 marches (en comptant la 1ère au niveau du sol) et 8 contremarches. Chaque marche mesure 1,8 cm de large et chaque contremarche mesure 1,6 cm de hauteur.

– Rectangle où $\mathrm{L} = 8\,192$ et $\ell = 7\,938$. On a $\sqrt{8\,192 \times 7\,938} = 8\,064$, $8\,192 - 8\,064 = 128$ et $8\,192 = 128 \times 64$; $8\,064 - 7\,938 = 126$ et $7\,938 = 126 \times 63$. L'escalier aurait 64 marches de largeur 128 et 63 contremarches de hauteur 126.
Remarque : Le nombre de marches dépasse le nombre de contremarches de 1.

B. Balance
Un cube pèse 1,5 livre d'où les huit cubes pèsent 12 livres (égalité des moments).

C. Tangente

On écrit l'équation générale d'une tangente à la parabole au point $\mathrm{A}\left(a;a^2\right)$ et l'équation générale d'une tangente à l'hyperbole au point $\mathrm{B}\left(b;\frac{1}{b}\right)$. En écrivant que les deux tangentes sont confondues on trouve $\mathrm{A}(-2;4)$, $\mathrm{B}(-0{,}5;-2)$. La tangente commune a pour équation $y=-4x+1$.

Remarque. Jean-Yves Hély trouve l'idée du puzzle très intéressante et pense que cela devrait faire réfléchir les élèves. Il propose de leur demander de fournir eux-mêmes d'autres exemples afin de voir si un découpage en escalier est toujours possible…

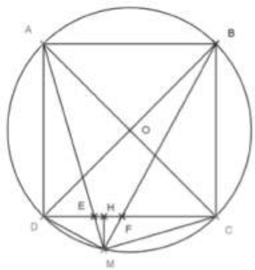
Il demande également ce qu'il se passe dans le cas simple (limite) où $L = 4\,\ell$.

Exercice 502-2 Géométrie

ABCD est un carré de centre O. Sur le cercle circonscrit, M est un point de l'arc CD. Les segments [MA] et [MB] coupent le côté [CD] en E et F.
Montrer que $DE \cdot FC = 2\,([MDE] + [MCF])$, où les écritures entre crochets désignent les aires.

Solutions : Jean-Yves Hély (Rennes), Marie-Nicole Gras (Le Bourg d'Oisans), Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Albert Marcout (Sainte Savine), Marcel Bauval (Versailles), Jean-Paul Thabaret (Grenoble), Michel Sarrouy (Mende), Raymond Heitz (Piriac).

• Voici la solution de Jean-Paul Thabaret.



Choisissons le point M sur le petit arc CD . Si M = C ou M = D, les triangles MDE et MCF sont aplatis et l'égalité proposée est vraie. Supposons donc M distinct de C et de D.
Appelons H le pied de la hauteur issue de M dans le triangle MCD.
Comme M est distinct de C et de D, les distances DE, FC et MH sont non nulles.

Il s'agit de démontrer que $DE \times FC = MH \times (DE + FC)$, autrement dit que

$$\frac{DE+FC}{DE\times FC} = \frac{1}{MH}\text{, ou encore que } \frac{1}{FC}+\frac{1}{DE}=\frac{1}{MH}.$$

Comme $EF \neq 0$, démontrons que $\dfrac{EF}{FC}+\dfrac{EF}{DE}=\dfrac{EF}{MH}$.

Les angles $\widehat{CMF}$ et $\widehat{CAB}$ sont égaux d'après le théorème de l'angle inscrit. Comme $\widehat{CAB} = 45°$, $\widehat{CMF} = 45°$ alors, dans le triangle EMC rectangle en M, la droite (MF) est la bissectrice intérieure de l'angle en M.
Le pied F de cette bissectrice vérifie l'égalité

$$\frac{EF}{FC}=\frac{ME}{MC}\text{ ; donc } \frac{EF}{FC}=\tan\left(\widehat{ECM}\right)$$

Les angles $\widehat{ECM}$ et $\widehat{EMH}$ ayant leurs côtés perpendiculaires sont égaux.
Par suite, $\dfrac{EF}{FC}=\tan\left(\widehat{EMH}\right)$ donc $\dfrac{EF}{FC}=\dfrac{EH}{HM}$.
En raisonnant de la même manière avec le triangle FMD, rectangle en M, on peut démontrer que

$$\frac{EF}{DE}=\frac{HF}{HM}.$$

Des deux égalités précédentes, il résulte que

$$\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{FC}}+\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{DE}}=\frac{\mathrm{EH}}{\mathrm{HM}}+\frac{\mathrm{HF}}{\mathrm{HM}}=\frac{\mathrm{EH}+\mathrm{HF}}{\mathrm{HM}}=\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{HM}}$$

puisque H appartient au segment [EF] ; ce qui est l'égalité attendue.

Remarque. Les manières d'aborder cet exercice ont été multiples : repérage, trigonométrie et tangentes, puissance d'un point par rapport à un cercle, aires.

Exercice 502-3 *tiré de la compétition mathématique suédoise* 2004-2005

Une fonction f vérifie : pour tout nombre réel x, $f(x) + x\,f(1-x) = x^2$. Déterminer la fonction f.

Solutions : Daniel Văcaru (Pitești, Roumanie), Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Albert Marcout (Sainte Savine), Odile Simon (La Prénessaye), Jean-Paul Thabaret (Grenoble), L.G Vidiani (Fontaine les Dijon), Michel Sarrouy (Mende), Raymond Heitz (Piriac).

• Voici la solution de Daniel Văcaru.

En considérant $x \mapsto 1-x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, on obtient :

$$\begin{aligned} f(1-x)+(1-x)\cdot f\left[1-(1-x)\right]&=(1-x)^2 \\ \Leftrightarrow f(1-x)+(1-x)\cdot f(x)&=1-2x+x^2 \end{aligned} \tag{1}$$

Mais on a

$$f(x)+x\,f(1-x)=x^2,\quad \forall x\in\mathbb{R} \tag{2}$$

En multipliant par $-x$ les deux membres de la relation (1), on obtient

$$-x\cdot f(1-x)+\left(-x+x^2\right)f(x)=-x+2x^2-x^3 \tag{3}$$

En tenant compte des relations (2) et (3), on obtient

$$\left(x^2-x+1\right)\cdot f(x)=-x^3+3x^2-x,\quad \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow f(x)=\frac{-x^3+3x^2-x}{x^2-x+1},\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

On vérifie que cette fonction est bien solution.

Exercice 502-4 *proposé par l'équipeMayhem d'une revue canadienne*

Résoudre le système $\begin{cases}(a+b+c)d=420\\(a+c+d)b=403\\(a+b+d)c=363\\(b+c+d)a=228\end{cases}$, où a, b, c et d sont quatre entiers naturels

Solutions : Jean-Yves Hély (Rennes), Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Odile Simon (La Prénessaye), Marcel Bauval (Versailles), Jean-Paul Thabaret (Grenoble), Michel Sarrouy (Mende), L.G Vidiani (Fontaine les Dijon), Vincent Thill, Raymond Heitz (Piriac).

• Voici la solution de Marcel Bauval.

Soit $s = a + b + c + d$, $(s - d)d = 420$, $(s - b)b = 403$, $(s - c)c = 363$, $(s - a)a = 228$.
On remarque $403 = 13 \times 31$.

b	1	13	31	403
$s - b$	403	31	13	1
s	404	44	44	404

L'équation $d^2 - 404d + 420 = 0$, dont le discriminant n'est pas un carré, n'a pas de racine entière.
Donc $s \neq 404$.

Par contre les équations $d^2 - 44d + 420 = 0$, $c^2 - 44c + 363 = 0$, $a^2 - 44a + 228 = 0$ ont respectivement pour discriminant réduit 8^2, 11^2, 16^2.

a	b	c	d
6 ou 38	13 ou 31	11 ou 33	14 ou 30

$a = 6$, $b = 13$, $c = 11$, $d = 14$ donne $a + b + c + d = 44$.

C'est la seule solution car tout autre choix aboutit à $a + b + c + d > 44$.

• Jean-Yves Hély propose également la solution qui suit.

En ayant numéroté les équations dans l'ordre du système,

[1] − [2] donne $(a + c)\ (d - b) = 17$. Comme $a + c \neq 1$, on obtient $a + c = 17$ et $d - b = 1$.

[3] − [4] donne $(b + d)\ (c - a) = 135$, ce qui implique $a < c$. On a alors $9 \leq c < 17$.

On peut écrire $(a + b + d)c = 1 \times 363 = 3 \times 121 = 3 \times 11 \times 11 = 33 \times 11$.

La seule valeur possible pour c est $c = 11$. On en déduit $a = 6$.

D'après [3], $b + d = 27$.

Comme $d - b = 1$ on obtient $d = 14$ et $b = 13$.

Le seul quadruplet possible est $(a, b, c, d) = (6, 13, 11, 14)$.

On vérifie que la solution trouvée convient.