Quand l'intuition a tout faux

Jean-Paul Delahaye(*)

Ce texte est une version partielle d'un article déjà publié dans la revue Pour la Science, n° 409, Novembre 2011.

Les erreurs de nos jugements spontanés sont parfois étonnantes : le hasard créé par une pièce de monnaie en est l'exemple le plus frappant car tout y semble paradoxal

Les suites de PILE ou FACE obtenues avec une pièce non truquée nous semblent sans grand mystère et nous ne doutons guère des jugements généraux et prédictions statistiques que nous formulons les concernant. Pourtant, une multitude de subtilités sont ignorées de la plupart d'entre-nous, et cette ignorance nous conduit à l'erreur, voire nous ferait perdre de l'argent si nous engagions des paris. Comprendre pourquoi et tirer toutes les leçons des pièges tendus à la raison par ces suites de tirages équitables et indépendants est un travail délicat et difficile comme l'attestent les dizaines d'articles publiés depuis quarante ans sur ce sujet.

Voici un premier exemple de piège. Il a été proposé en 1969 par l'amateur de récréations mathématiques Walter Penney.

On lance une pièce de monnaie (non truquée) autant de fois qu'il le faut jusqu'à obtenir des séquences fixées à l'avance de PILE ou FACE. Par exemple on cherche à obtenir PILE-FACE, notée PF, ou FACE-FACE, FF.

La question posée est : laquelle des séquences PF ou FF a le plus de chances de se présenter en premier, et combien est-il raisonnable de parier sur elle dans une telle compétition ?

Il semble aller de soi de raisonner ainsi.

Raisonnement A. Si on considère deux tirages successifs d'une pièce de monnaie, il y a autant de chances d'obtenir PF que FF et cette probabilité est 1/4. Les deux séquences PF et FF étant équiprobables, chacune a la même probabilité d'être obtenue en premier, et donc, la probabilité que PF survienne avant FF est 1/2. Les deux séquences mises en compétition partent sur des bases égales, et donc, si on me propose de parier, je peux choisir indifféremment l'une ou l'autre et miser 1 euro contre 1 euro.

Pourtant la réalité est bien différente : dans une compétition entre PF et FF la séquence PF gagnera 3 fois sur 4. Il est donc intéressant d'accepter de miser 2 euros

(*) Université des Sciences et Technologies de Lille, Laboratoire d'Informatique Fondamentale de Lille, UMR 8022 CNRS.

pour PF, contre 1 euro en faveur de FF et un pari ne favorisant aucun joueur consiste à miser 3 euros pour PF contre 1 pour FF. Voici la démonstration de ces affirmations.

Raisonnement B. Les deux premiers tirages peuvent être PF, FP, PP, FF et ces quatre débuts possibles sont équiprobables chacun survenant avec une probabilité 1/4. Si c'est FF qui sort, la séquence FF aura gagné la compétition. Dans les trois autres cas, le gagnant sera toujours PF. En effet, dès qu'un P tombe, FF ne peut plus arriver avant PF : tant que des P continuent de tomber personne ne gagne, et dès que F tombe, PF gagne. Si on vous propose le jeu, choisissez PF ; c'est certain : vous gagnerez 3 fois sur 4.

Pour que tout soit bien clair, il faut repérer l'endroit où il y a une erreur dans le raisonnement A. La première phrase du raisonnement A est indubitable. Elle implique d'ailleurs que dans une longue séquence de P ou F tirée avec une pièce de monnaie non truquée, il y aura en moyenne autant de couples PF que de couples FF. L'erreur du premier raisonnement se trouve dans la seconde phrase : « Les deux séquences PF et FF étant équiprobables, chacune a la même probabilité d'être obtenue en premier, et donc, la probabilité que PF survienne avant FF est 1/2 ». En effet, même si les deux séquences sont équiprobables, les relations qu'elles entretiennent l'une avec l'autre, comme le détaille le raisonnement B, ont pour conséquences que dès qu'un P est tombé, FF ne peut plus gagner ce qui entraîne alors que PF sera 3 fois plus souvent la première à apparaître que FF. (*voir sur le site de l'APMEP l'annexe 2 qui illustre ce raisonnement*).

Le même type de blocage d'une séquence par une autre montre que si on oppose PFF contre FFF, la première gagne 7 fois sur 8 (*voir annexe 3*). Plus généralement encore, si on oppose PF … F (n−1 fois F) à FF … F (n fois F) alors la première séquence gagne $2^n - 1$ fois sur 2^n : il ne faut donc pas hésiter à parier 1000 euros contre 1 euro en choisissant PFFFFFFFFF contre FFFFFFFFFF.

Le petit calcul énumératif suivant ne constitue pas une preuve (elle est dans le raisonnement B !), mais il vous aidera sans ordinateur à accepter l'étrange compatibilité entre les diverses affirmations que nous avons formulées. Considérons les 16 séquences possibles et équiprobables qu'on obtient en opérant 4 tirages.

$$\text{PPPP} \quad \text{PP}\underline{\text{PF}} \quad \text{P}\underline{\text{PF}}\text{P} \quad \text{P}\underline{\text{PF}}\text{F} \quad \underline{\text{PF}}\text{PP} \quad \underline{\text{PF}}\text{PF} \quad \underline{\text{PF}}\text{FP} \quad \underline{\text{PF}}\text{FF}$$

$$\text{FPPP} \quad \text{FP}\underline{\text{PF}} \quad \text{F}\underline{\text{PF}}\text{P} \quad \text{F}\underline{\text{PF}}\text{F} \quad \underline{\underline{\text{FF}}}\text{PP} \quad \underline{\underline{\text{FF}}}\text{PF} \quad \underline{\underline{\text{FF}}}\text{FP} \quad \underline{\underline{\text{FF}}}\text{FF}$$

Parmi les 48 couples obtenus avec ces 16 tirages (chaque suite ABCD de quatre signes contenant les trois couples AB, BC, CD), la séquence FF est présente 12 fois comme la séquence PF, il y a donc bien égalité des fréquences et FF (ainsi que PF) apparaît dans 1/4 des couples.

Concernant la compétition pour savoir qui arrive la première de FF ou de PF, la séquence PF gagne 10 fois (souligné simple) alors que la séquence FF ne gagne que 4 fois (souligné double). Dans les deux cas restants, aucune séquence n'a encore gagné et les tirages doivent donc se poursuivre. Cependant, dans ces deux cas, PF gagnera nécessairement puisque les séquences se terminent par un P ce qui interdit mécaniquement à FF de se présenter avant PF, si les tirages se poursuivent. Au total on trouve donc que PF gagne (en moyenne) exactement 3 fois sur 4.

Si on envisage les autres compétitions entre séquences de longueur 2, les résultats faciles à établir (car résultant de symétrie ou se ramenant à la compétition FF contre PF) sont les suivants :

PP gagne contre PF avec une probabilité 1/2
PP gagne contre FP avec une probabilité 1/4
PP gagne contre FF avec une probabilité 1/2
PF gagne contre FP avec une probabilité 1/2
PF gagne contre FF avec une probabilité 3/4
FP gagne contre FF avec une probabilité 1/2

Le temps moyen d'attente

Malheureusement les cas particuliers que nous venons d'envisager ne nous permettent pas de savoir ce qui se passe quand on oppose deux séquences quelconques, par exemple PFP et FFF. La notion de « temps d'attente moyen » devrait nous aider à mettre nos idées en place. Lorsqu'une séquence S est fixée, on dénomme « temps d'attente moyen de S », le nombre moyen de fois qu'il faut lancer la pièce pour que la séquence S se présente. Par exemple, le temps d'attente moyen de P (ou de F) est 2.

Deux séquences S et S′ de longueur k ont la même probabilité de se produire quand on lance k fois la pièce, et donc elles apparaissent avec la même fréquence quand on lance indéfiniment la pièce. De cela, on a envie d'en déduire que les temps d'attentes moyens de S et de S′ sont les mêmes. Pourtant, comme dans le cas des compétitions entre deux séquences, ce serait une erreur. On montre que le temps d'attente moyen de FF est 6 alors que le temps d'attente moyen de PF est 4 (*voir sur le site de l'APMEP l'annexe 4*).

Cette surprise va cependant dans le même sens que la précédente surprise quand nous faisions s'opposer FF et PF. Puisque FF apparaît en moyenne plus tardivement dans une suite de lancers que PF, il semble assez naturel que FF se fasse battre par PF quand on cherche à savoir laquelle arrive le plus souvent en premier. Est-ce qu'on peut déduire le 3/4 de tout à l'heure en faveur de PF, des temps d'attente moyens 6 et 4 ? Cela ne semble pas bien clair et si nous voulions chercher une règle nous ne la trouverions jamais, car ici encore il se produit un phénomène inattendu qui contrarie notre intuition et rend illusoire la déduction du 3/4 à partir des temps d'attente moyens. En effet :

– Il se peut très bien que le temps d'attente moyen d'une séquence S_1 soit plus long que le temps d'attente d'une séquence S_2, et que pourtant, dans une compétition entre S_1 et S_2, la séquence S_1 se présente plus souvent avant S_2 que l'inverse.

L'exemple le plus simple connu d'une telle situation paradoxale est donné par les deux séquences S_1 = PFPF et S_2 = FPFF. La séquence S_1 a un temps d'attente de 20, alors que S_2 a un temps d'attente de 18. Pourtant S_1 arrive devant S_2 avec une probabilité de 9/14 = 0,6428.

Déconnexion paradoxale

Les trois notions « fréquence d'apparition », « temps moyen d'attente » et « gagnant d'une compétition entre deux séquences » qu'intuitivement nous lions les unes autres quand nous comparons deux séquences sont en réalité indépendantes !

Résumons la situation *multi-paradoxale* à laquelle nous sommes arrivés :

> *(a) Deux séquences de longueurs égales ont la même probabilité de survenir en un emplacement donné d'une suite infinie de tirages, et donc leurs fréquences moyennes d'apparition sont les mêmes.*
>
> *Pourtant :*
>
> *(b) Il se peut que l'une d'elles survienne plus souvent première que l'autre dans une compétition entre elles.*
>
> *(c) Il se peut qu'elles aient des temps d'attente différents l'une de l'autre.*
>
> *De plus, et cela paraît un comble :*
>
> *(d) Il est possible aussi que celle qui arrive statistiquement le plus tardivement soit, en moyenne, plus souvent devant l'autre quand on les fait concourir l'une contre l'autre.*

Intransitivité

Ce n'est pas tout : les comportements anti-intuitifs des suites de tirages de pile ou face vont encore plus loin.

> *(e) Une séquence plus courte peut perdre dans une compétition qui l'oppose à une séquence plus longue et c'est le cas par exemple quand on oppose PPP et FFPP car la seconde gagne avec une probabilité 7/12.*
>
> *(f) Des séquences peuvent dans une compétition à 4 gagner avec des chances égales (25% de chance chacune), et pourtant dans des compétitions deux à deux être toujours inégales.*

C'est ce qui se produit avec les séquences PPF, PFF, FPP, FFP qui gagnent chacune dans 25% des cas quand on les fait concourir toutes les quatre ensemble, et qui pourtant ne font jamais jeu égal quand on les oppose deux à deux.

> *(g) Il se peut que dans des compétitions deux à deux on obtienne des cycles* S_1 *bat* S_2, S_2 *bat* S_3, …, S_{n-1} *bat* S_n *avec pourtant* S_n *bat* S_1.

Un tel cycle est obtenu avec les quatre séquences citées au-dessus :PPF gagne contre PFF avec une probabilité 2/3

PFF gagne contre FFP avec une probabilité 3/4
FFP gagne contre FPP avec une probabilité 2/3
FPP gagne contre PPF avec une probabilité 3/4

(*voir sur le site de l'APMEP une justification de ces affirmations dans l'annexe 5*).

Nous avons donc affaire à un paradoxe de non-transitivité : notre intuition nous souffle que chaque séquence possède une force propre qui lui permet de se présenter en tête devant une autre séquence, et que donc, si S_1 est plus forte que S_2 et S_2 plus forte que S_3 alors nécessairement S_1 est plus forte que S_3. C'est une illusion, car une séquence peut-être « forte » devant une seconde et « faible » devant une troisième. En sport, et dans les problèmes d'élection, ce genre de choses se produit aussi (*note : l'article original contient une présentation de l'algorithme de Conway, algorithme qui donne les probabilités de gain pour n'importe quelle paire de séquences en compétition*).

Corriger les fausses simplicités

L'annexe 1 relative aux graphes d'état, ainsi que les autres annexes (consultables sur le site), tentent d'expliquer comment mener les calculs permettant de vérifier tout ce qui vient d'être affirmé. L'examen attentif de ces méthodes affine notre compréhension et corrige nos jugements spontanés dont l'inadéquation est flagrante. En relisant le raisonnement B présenté plus haut et en le comprenant, on finit par accepter que PF gagne contre FF et que finalement … cela n'aurait pas dû nous étonner. La méthode des graphes d'états (*voir annexe 1*) conduit à saisir clairement pourquoi PPF bat par exemple PFF. Plus généralement, elle permet de visualiser le rapport de force entre séquences, et de comprendre (et de calculer) que ce rapport se construit à partir de la structure des deux séquences, et qu'une séquence ne possède pas de force propre indépendante des compétitions à laquelle on la soumet.

Connaître la fréquence de survenue d'une séquence S_1 et son temps moyen d'attente ne suffit pas pour prédire sa force quand elle sera confrontée une autre séquence S_2, car cette force se décide face à S_2 et est spécifique de la compétition particulière S_1 contre S_2, contrairement à ce que notre jugement premier nous faisait croire. L'explication de l'inadéquation de nos appréciations spontanées est sans doute à rechercher dans l'expérience que nous avons des nombreuses situations où la force d'un concurrent dans une compétition provient d'une aptitude qu'il possède en propre (par exemple en course à pied, son aptitude à aller vite) et qui n'est pas liée aux adversaires qu'il affronte.

Bibliographie

• Ed Pegg, *How to Win at Coin Flipping*, november 2010 :
http://blog.wolfram.com/2010/11/30/how-to-win-at-coin-flipping/

• Raymond Nickerson, *Penney Ante : Counterintuitive Probabilities in Coin Tossing*, The UMAP (Undergraduate Mathematics and Its Applications) Journal, 28, 523-532, 2007.

• Daniel Felix, *Optimal Penney Ante Strategy via Correlation Polynomial Identities*, The Electronic Journal of Combinatorics, 13-1, R35, 2006.

• Mark Andrews, *Anyone for a Nontransitive Paradoxe ? The Case of Penney Ante*, 2004.

• Stanley Collings, *Coin Sequence Probabilities and Paradoxes*, Bulletin of the Institute of Mathematics and its Applications, 18, 227-232, 1982.

• Leonidas Guibas, Andrew Odlyzko, *String Overlaps, Pattern Matching, and Nontransitive Games*, Journal of Combinatorial Theory, A30-2,183-208, 1981.

• Martin Gardner, *On the Paradoxical Situations that Arise From Nontransitive Situations*, Scientific American, 120-125, oct 1974.

• Walter Penney, *Problem 95: Penney-ante*, Journal of Recreational Mathematics 2, p 241, 1969.

(nous ajoutons à cette bibliographie: Arthur Engel, *Processus aléatoires pour les débutants* ; ed.Cassini, avril 2011).

Annexe 1. La méthode des graphes d'état

On dessine un graphe dont les nœuds sont tous les débuts possibles de l'une des séquences en compétition. On relie les nœuds N au nœud N′ si N est le début de N′.

Grâce à ce graphe, on calcule les probabilités des différentes situations, lancer après lancer en opérant un suivi de la probabilité que chaque nouveau tirage fait avancer sur le graphe. On va détailler la mise en œuvre de la méthode à propos des séquences PF et FF (*figure ci-dessous*).

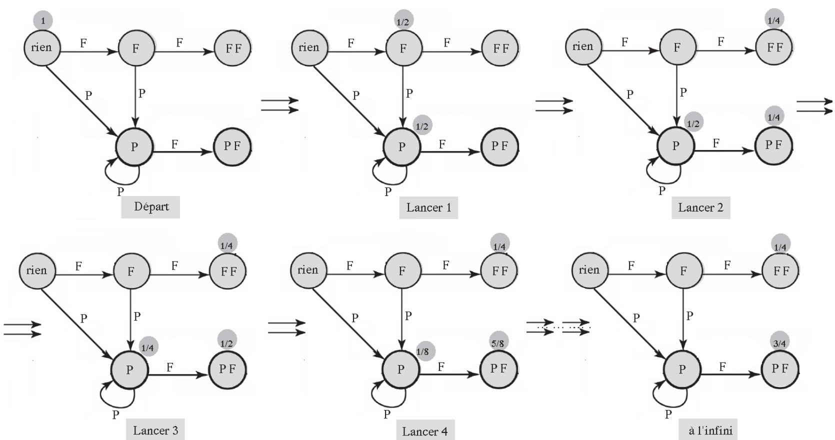
• Au départ, il n'y a aucun P ou F connu : avec une probabilité de 1, nous nous trouvons dans l'état « rien ».

• Après un lancer, le 1 du départ s'est séparé en deux fois 1/2, qui se trouvent sur les états P et F. Cela signifie qu'après un lancer, on a une chance sur deux d'être dans l'état P et autant pour l'état F.

• Après le second lancer, la probabilité 1/2 de l'état F s'est scindée en deux fois 1/4. Le premier 1/4 a été se placer sur FF qui maintenant est donc marqué par 1/4. L'état P a donné la moitié de sa valeur à l'état PF (donc marqué maintenant par 1/4) et l'autre moitié de sa valeur à lui-même, ce qui en additionnant avec le 1/4 qui vient de l'état F donne une probabilité de 1/2 pour PF. Ces marques correspondent aux probabilités qu'on a, après deux lancers, de se trouver dans les états notés sur le graphe.

La circulation des probabilités marquées sur les nœuds du graphe se poursuit selon les mêmes règles : chaque valeur est coupée en deux et va vers les nœuds voisins en suivant les flèches. Cela donne ainsi, lancer après lancer, les probabilités de se trouver dans un état ou un autre. Bien sûr quand une probabilité arrive sur l’une des séquences en compétition, elle n’en bouge plus. Bien sûr aussi, lors de ces calculs et quelle que soit l’étape la somme de probabilités placées sur les nœuds marqués vaut 1.

Dans le cas de cette compétition, il est clair que le 1/4 de FF ne changera plus, et que les 3/4 restants vont petit à petit arriver sur PF, qui à l’infini sera donc marqué par 3/4.

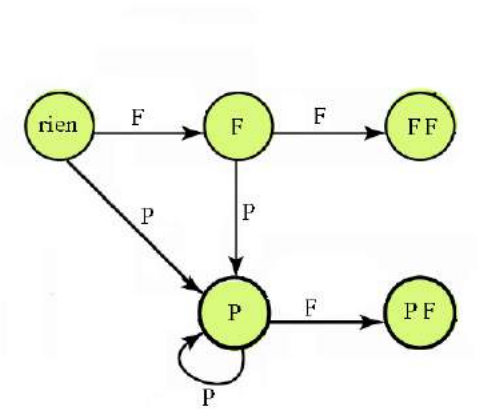


L’état du graphe à l’infini indique les probabilités respectives de gain des séquences PF et FF : 1/4 et 3/4.

Dans les cas plus compliqués, l’étude de la circulation des probabilités d’un nœud à l’autre devient difficile à suivre. Cependant, elle se ramène à un problème classique d’algèbre linéaire qu’on sait parfaitement traiter, et donc la méthode des graphes d’état est générale.

Il est amusant de noter que la circulation des probabilités dans le graphe d’état fonctionne selon un principe identique à celui utilisé par le moteur de recherche Google pour attribuer des notes *PageRank* aux pages internet, notes qui déterminent les rangs d’affichage des pages quand vous soumettez une requête. Au départ, une note égale est attribuée à chaque page ; à chaque étape de redistribution, cette note est fractionnée et passe aux pages citées (ce qui permet aux pages souvent citées d’avoir de bonnes notes). Quelques itérations —et non pas une infinité— de ce procédé de redistribution du PageRank conduisent à une valeur approchée satisfaisante de la valeur de notoriété d’une page. Ce procédé itératif peut se paralléliser facilement et fonctionne donc même avec des milliards de pages à noter.

Annexe 2
(Quand l'intuition a tout faux)



Grâce à ce graphe, on calcule les probabilités des différentes situations, lancer après lancer en opérant un suivi de la probabilité que chaque nouveau tirage fait avancer sur le graphe.

• Au départ, il n'y a aucun P ou F connu : avec une probabilité de 1, nous nous trouvons dans l'état "rien".

• Après un lancer, le 1 du départ s'est séparé en deux fois 1/2, qui se trouvent sur les états P et F. Cela signifie qu'après un lancer, on a une chance sur deux d'être dans l'état P et autant pour l'état F.

• Après le second lancer, la probabilité 1/2 de l'état F s'est scindée en deux fois 1/4. Le premier 1/4 a été se placer sur FF qui maintenant est donc marqué par 1/4. L'état P a donné la moitié de sa valeur à l'état PF (donc marqué maintenant par 1/4) et l'autre moitié de sa valeur à lui-même, ce qui en additionnant avec le 1/4 qui vient de l'état F donne une probabilité de 1/2 pour PF. Ces marques correspondent aux probabilités qu'on a, après deux lancers, de se trouver dans les états notés sur le graphe.

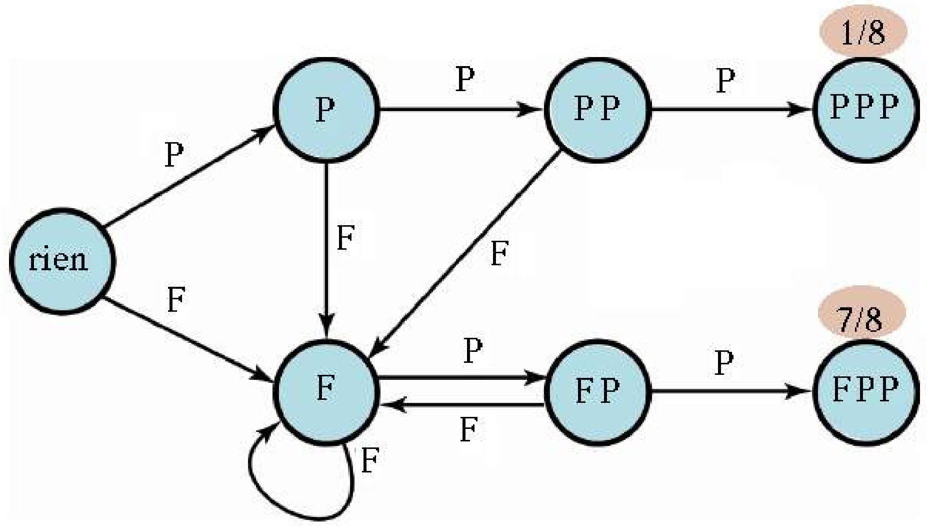
La circulation des probabilités marquées sur les nœuds du graphe se poursuit selon les mêmes règles : chaque valeur et coupée en deux et va vers les nœuds voisins en suivant les flèches. Cela donne ainsi, lancer après lancer, les probabilités de se trouver dans un état ou un autre. Bien sûr quand une probabilité arrive sur l'une des séquences en compétition, elle n'en bouge plus. Bien sûr aussi, lors de ces calculs et quelle que soit l'étape la somme de probabilités placées sur les nœuds marqués vaut 1.

Dans le cas de cette compétition, il est clair que le 1/4 de FF ne changera plus, et que les 3/4 restants vont petit à petit arriver sur PF, qui à l'infini sera donc marqué par 3/4.

L'état du graphe à l'infini indique les probabilités respectives de gain des séquences PF et FF : 1/4 et 3/4.

Annexe 3
(Quand l'intuition a tout faux)

La séquence PPP perd contre FPP



Annexe 4

(Quand l'intuition a tout faux)

Surprise pour le temps d'attente moyen

Au cours d'une succession de jeters d'une pièce, le temps d'attente moyen de FF est 6 alors que le temps d'attente moyen de PF est 4. Cela semble paradoxal si l'on considère que ces deux séquences ont même probabilité d'apparition, c'est-à-dire ¼.

En voici l'explication.

Temps d'attente de la séquence P.

- Une fois sur 2 on obtient P dès le premier tirage (temps d'attente = 1). Dans le calcul de la moyenne du temps d'attente, 1 a un poids de 1/2.
- Une fois sur 4 on a le début FP, et le temps d'attente a donc été 2. Dans la moyenne, on a donc 2 avec un poids 1/4.
- Une fois sur 8 on a le début FFP. Dans la moyenne, on a donc 3 avec un poids 1/8 ; etc.

Le temps d'attente moyen de P est donc la somme de la série :

$1/2 + 2 \bullet 1/4 + 3 \bullet 1/8 + 4 \bullet 1/16 + \ldots$, que l'on peut calculer, et qui vaut 2.

Mais voici une autre méthode qui présente deux avantages ; elle évite le calcul de la somme d'une série, et son principe s'étend à d'autres cas :

Soit t ce temps d'attente moyen de P. Une fois sur deux, le temps d'attente est 1 car P vient tout de suite. Une fois sur deux, ce temps est $1+t$ car on obtient F, et que tout repart donc à zéro. On a donc $t = 1/2 + (1/2)(1+t)$, qui conduit à $t = 2$.

Temprs d'attente de la séquence F. Soit T ce temps d'attente. En envisageant les deux possibilités pour le premier tirage :

T = (1/2) (Temps d'attente moyen de FF si le premier tirage a donné F) +
(1/2) (Temps d'attente moyen de FF si le premier tirage a donné P)

Le temps d'attente moyen de FF quand le premier tirage a donné P est bien sûr une unité de plus que le temps d'attente moyen de FF, car quand on a obtenu P en premier on a perdu un coup : le P obtenu ne sert à rien et ne servira pas. Le second terme de la somme est donc (1/2)(1+T).

Pour le premier terme, on écrit :

Temps d'attente moyen de FF si le premier tirage a donné F =
(1/2) (Temps d'attente moyen de FF si le premier tirage a donné F et le second a donné F)
+
(1/2) (Temps d'attente moyen de FF si le premier tirage a donné F et le second P).

La première grande parenthèse vaut évidemment 2. Quant à la seconde, en raisonnement comme précédemment, on voit qu'elle vaut (2+T). En regroupant ce que nous venons d'obtenir, on a : $T = (1/2)((1/2)(2) + (1/2)(2+T)) + (1/2)(1+T)$, ce qui, après résolution, donne $T = 6$.

Temps d’attente de la séquence PF. Soit T’ ce temps. Par la même méthode, on trouve :

T' = (1/2) (temps d'attente moyen de PF si le premier tirage a donné P) +
(1/2) (temps d'attente moyen de PF si le premier tirage a donné F)
= (1/2) (1+ temps d'attente moyen de F)+ (1/2) (1+T')
= (1/2) (1+2) + 1/2 + T'/2

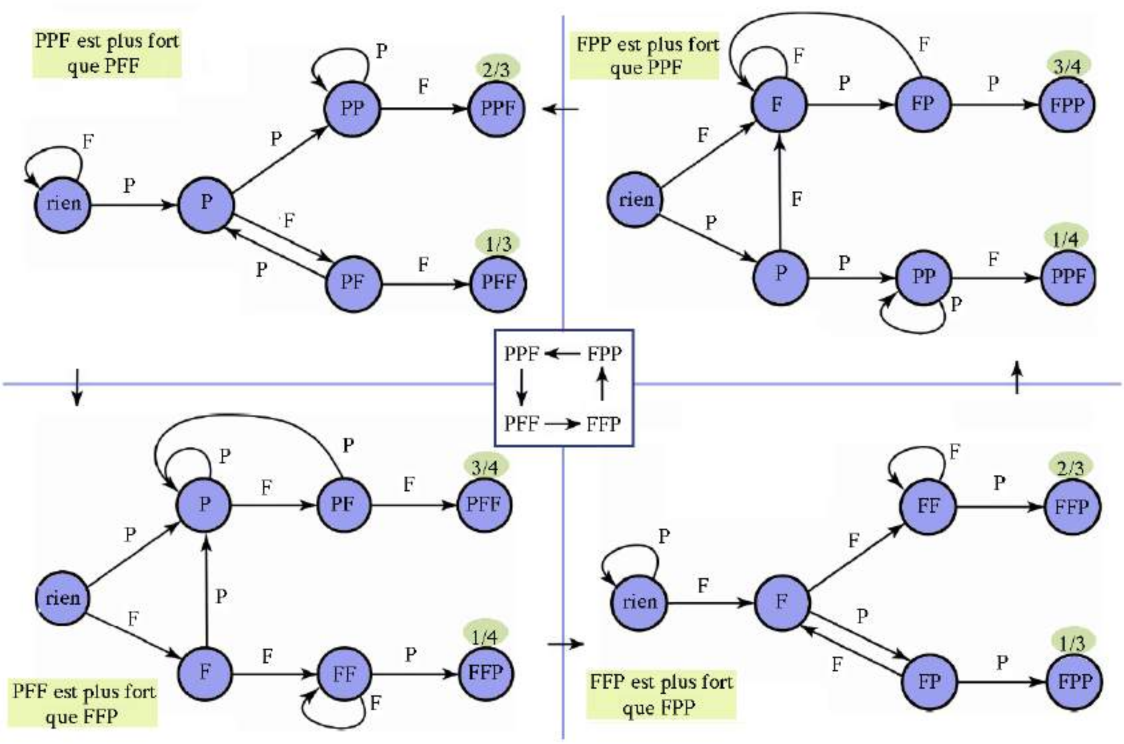
On en tire T' = 4.

Annexe 5

(Quand l'intuition a tout faux)

La non transitivité de la relation de force

L'examen des quatre graphes d'état correspondant aux compétitions PPF—PFF, PFF—FFP, FFP—FPP, FPP—PPF indique qu'à chaque fois la première séquence bat la seconde : nous avons donc un cycle paradoxal.



Le 2/3 en faveur de PPF contre PFF se justifie de la manière suivante en utilisant la méthode du graphe d'état. Au départ on place 1 sur le nœud ***rien.*** On suit ce que devient ce 1, lancer après lancer. Malgré la flèche du nœud ***rien*** vers lui-même, toute la probabilité 1 se retrouve à la limite sur le nœud P. Celui-ci distribue 1/2 à PP qui finit par l'envoyer sur PPF. Le nœud P distribue aussi 1/2 à PF, qui en envoie la moitié (c'est-à-dire 1/4) à PFF. Le 1/4 que PF renvoie à P sera renvoyé pour moitié (1/8) à PP et pour moitié à PF, qui en enverra la moitié à PFF (1/16), etc. Le nœud PFF au total recevra donc 1/4 + 1/16 + 1/64 +... = 1/3 (somme des termes d'une suite géométrique). Bien sûr tout le reste, c'est-à-dire 2/3, arrive sur PPF.

Le résultat 3/4 en faveur de PFF quand il est opposé à FFP est plus facile encore à justifier, puisque le nœud FF ne reçoit que 1/4 en tout.

Les deux autres graphes d'états sont identiques aux deux premiers à des changements de noms près, et donc se ramènent aux deux premiers. Le cycle est entièrement justifié.