Les mathématiques à l'école des scribes de Mésopotamie

Alice Morales(*), Marcel Morales(**)
& Marc Troudet(***)

Ce texte fait suite aux deux ateliers que nous avons présentés aux dernières Journées Nationales.
Le premier a pour sujet les écoles de scribes et les mathématiques durant la période paléo babylonienne (entre –2000 et –1600), il est relaté dans les paragraphes 1 à 2.
Le second atelier propose l'étude d'un problème d'arpentage typique de cette période, il est résumé dans le paragraphe 3.

Nous remercions Christine Proust (Laboratoire SPHERE) pour ses conseils.

Introduction

La Mésopotamie est située dans la région occupée actuellement par l'Irak et partiellement par l'Iran, son histoire s'étend sur une durée d'environ 4000 ans. La culture mésopotamienne est le fruit de la rencontre de deux peuples : les Sumériens au sud et les Akkadiens au nord. La période la plus riche en documents mathématiques connus à ce jour est la période paléo-babylonienne.

Les traces d'écriture les plus anciennes apparaissent vers –3300 sur des tablettes d'argile trouvées à Uruk, Cité-État du sud de la Mésopotamie et à Suse, Cité-État du pays d'Elam. Bien que contestée par certains assyriologues, la théorie dominante explique la naissance de l'écriture et des mathématiques par les besoins de la comptabilité dans cette région du monde économiquement prospère.

Les premières tentatives de comptage apparaissent sous forme de jetons de formes et tailles diverses ayant une signification uniquement pour les personnes qui interviennent dans la transaction. Dans un souci d'unification des symboles, ils vont être remplacés par des bulles-enveloppes (inspirées des pratiques des bergers) contenant des boules et cônes d'argile (les calculi).
Par la suite, un graphisme élaboré apparaît sur les sceaux cylindriques. Rappelons qu'un sceau cylindrique est un petit cylindre sur lequel est gravé un motif, avec un court texte identifiant son possesseur. Les pictogrammes et idéogrammes du début seront ensuite remplacés par l'écriture cunéiforme.

À ce jour, les archéologues ont trouvé environ un demi-million de tablettes dont la moitié a été traduite. Parmi celles-là, quelques 350 comportent 500 problèmes mathématiques et environ 1300 sont des tables numériques et métrologiques. La plupart des tablettes mathématiques ont été publiées au début du XX^{e} siècle par O.

(*) collège Fernand Léger à Saint Martin d'Hères
(**) Institut Fourier, Université de Grenoble. morales@ujf-grenoble.fr
(***) collège de l'Isle à Vienne

Neugebauer et F. Thureau-Dangin. Toutefois, jusqu'à nos jours, des spécialistes comme J. Friberg, J. Høyrup, C. Proust et E. Robson continuent de traduire et d'étudier d'autres tablettes, ils réinterprètent également les tablettes déjà étudiées.

1. Les écoles de scribes

À la fin du 3e millénaire, sous Sargon d'Akkad (2334-2279), puis pendant la 3e dynastie d'Ur, on observe un effort de standardisation qui porte aussi bien sur les lois et la métrologie que sur les autres instruments de pouvoir : écriture, comptabilité, calendriers. Le rôle des scribes va être fondamental et les écoles de scribes vont se développer durant cette période.

À l'origine, chaque corporation a besoin d'un contremaître qui planifie, dirige le travail et rédige les contrats courants. Le contremaître doit savoir lire, écrire et compter. Son nom est encore propre à chaque corporation. Par la suite, il se spécialise et le nom **dub.sar** (en sumérien), littéralement celui qui écrit sur une tablette, apparaît. Toutefois ce terme reste très général et indique des compétences de niveaux très variés : de la personne « alphabétisée », capable de rédiger un contrat courant ou d'administrer des biens à l'homme de lettres, détenteur et vecteur d'une vaste culture, œuvrant au service du roi ou d'un temple. Les scribes forment une corporation très fermée et transmettent leurs connaissances dans des lieux dédiés : les écoles des scribes ou **edubba** (en sumérien e2-dub-ba = maison des tablettes).

Les écoles supposées sont des maisons dans lesquelles les archéologues ont trouvé quantité de tablettes écrites par des écoliers. Ces tablettes sont retrouvées entassées, brisées ou encore utilisées pour combler des sols ou construire des murs. Ces écoles apparaissent au XXIe siècle av. J.C. Les plus célèbres, par le nombre de tablettes trouvées, sont celles de Nippur, Uruk, Sippar, Kish et Mari. Elles datent de l'époque paléo-babylonienne (environ –1800). Dans ces écoles, l'enseignement est organisé en **deux niveaux** :

Au **niveau élémentaire** on apprend : • des syllabaires; • des listes de vocabulaire (classés selon des critères principalement thématiques) ; • des proverbes (premières phrases en sumérien) ; • des modèles de contrats ; • des tables métrologiques (capacités, surfaces) ; • des tables numériques (multiplications, inverses, carrés, cubes).	**Au niveau avancé** on apprend : • des compositions littéraires ; • des calculs numériques ; • des calculs de surfaces et de volumes.

L'enseignement élémentaire très strict, donnant une très grande place à l'apprentissage par cœur, évolue ensuite vers un enseignement laissant davantage de place à l'autonomie au niveau avancé.

Selon C. Proust : « Les conceptions mathématiques de base transmises par les écoles paléo-babyloniennes constituent un ensemble homogène et unifié, mais qui a pu être enseigné selon des méthodes propres à certaines époques ou certaines régions ».

2. Les mathématiques

a) La numération :

Les Mésopotamiens utilisent un système de numération:
- sexagésimal ;
- de position ;
- à virgule flottante.

En écriture cunéiforme, les nombres sont écrits à l'aide de 2 symboles:
- le clou de valeurs 60^n, $n \in \mathbb{Z}$;
- le chevron de valeurs 10×60^n, $n \in \mathbb{Z}$.

b) Les quatre opérations

Il n'existe pas de traces écrites des méthodes mises en œuvre pour effectuer des additions, soustractions et multiplications. En revanche, il subsiste un grand nombre de tables de multiplication que les jeunes scribes devaient apprendre par cœur. La nature des erreurs dans les résultats de certaines multiplications suggère l'usage d'abaques (littéralement tables de poussière) lors des calculs complexes.

Les Mésopotamiens avaient une vision très moderne de la division puisque, pour cela, ils multipliaient par l'inverse du diviseur. Pour cette raison, ils ont construit une table d'inverses, dont on a trouvé un grand nombre d'exemplaires (les inverses n'appartenant pas aux tables étaient calculés par factorisation) qu'ils apprenaient également par cœur.

Enfin, un grand nombre de tables de carrés, cubes et racines carrées nécessaires dans les calculs des surfaces et de volumes ont été retrouvées.

c) La géométrie

Le vocabulaire géométrique est constitué des mots suivants : triangle, carré, rectangle et trapèze (nommé : front de bœuf), cercle, prisme droit (brique ou tas de briques), tronc de prisme, cylindre, longueur, largeur, … Il n'existe pas de mot pour désigner la perpendiculaire. Pour cela, ils utilisent le terme de descendante dans le sens du fil à plomb.

De même, le terme de parallèle ne se rencontre pas mais on parle de la transversale en tant qu'objet géométrique parallèle aux bases d'un trapèze qui le partage en deux trapèzes de même aire. Les côtés des quadrilatères sont nommés fronts et flancs, termes empruntés au monde animal. Suite à une rotation de l'écriture de 90° au XXVIII^{e} siècle av. J. C. les figures ont tourné mais le vocabulaire est resté.
De nombreux problèmes portant sur des calculs d'aires et de volumes, parfois inspirés des problèmes pratiques, mais pas toujours, montrent une grande habilité dans la résolution qui faisait honneur aux scribes.

d) Technique de résolution des problèmes du second degré

La tablette BM 13901 (datée d'environ −1900) est considérée par les spécialistes comme le manuel du second degré. Elle contient 24 problèmes organisés du plus simple au plus compliqué. Les sept premiers sont dédiés à la résolution des équations du second degré du type $ax^2 + bx = c$, les suivants portent sur des systèmes de 2 ou 3 équations du second degré à 2 ou 3 inconnues.

Pendant l'atelier, les participants ont travaillé sur le problème n° 1 de la tablette BM 13901 du point de vue algébrique et géométrique (voir annexe).

L'étude dans leur ensemble des problèmes énoncés sur ces tablettes, d'un point de vue algébrique et géométrique, demande d'abord de surmonter les difficultés du vocabulaire et de la pensée mathématique babylonienne. Elle met en lumière les astuces dont faisaient preuve les scribes. Cependant, il ne faut pas perdre de vue que l'interprétation de ces textes anciens, en l'absence de leurs auteurs, est un problème récurrent en l'histoire des mathématiques. En particulier, il faut éviter tout anachronisme. Le savoir-faire mésopotamien a traversé les âges comme l'attestent les écrits anciens grecs (voir l'œuvre d'Héron d'Alexandrie) ou arabes (voir l'abrégé d'algèbre d'Al Khwärizmi au IXe siècle et Ibn cAbdūn au Xe siècle).

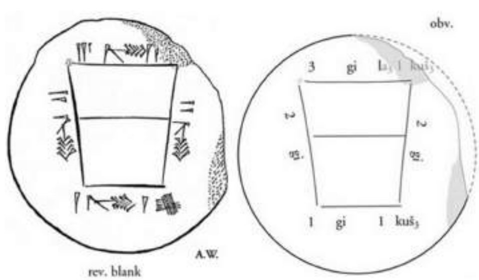
Les activités et exercices conçus et expérimentés en classe par le groupe Histoire des Maths de l'IREM de Grenoble sont consultables au portail de l'IREM.

3. Un exemple de géométrie : l'affinité orthogonale au service de l'arpenteur

a) Comment partager un trapèze en deux parties de même aire ?

Ce problème d'arpentage typique apparaît bien avant la période paléo babylonienne. La tablette IM 58045 datant du IIIe millénaire av. J.C. présente déjà un trapèze ainsi partagé. Sur cette tablette le scribe a noté uniquement les longueurs des côtés de la figure. On trouve en particulier comme longueurs des deux bases 7 coudées et peut-être 17 coudées, en système sexagésimal [la valeur 17 coudées (2 gi 5 coudées) n'est pas certaine car la tablette est endommagée].

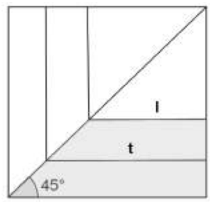
Ces deux valeurs nous interpellent. En effet, les mésopotamiens connaissaient des triplets de nombres nommés « trapézoïdaux » (proches des triplets pythagoriciens) tels que (7 ; 13 ; 17), où 13 est la longueur du segment qui partage un tel trapèze en deux figures de même aire.



Les tablettes que nous avons étudiées utilisent la formule $t^2 = \dfrac{L^2 + l^2}{2}$ où t est la longueur de la transversale et L et l celles des deux bases.

C'est le cas sur la tablette YBC 4675 où une démonstration est donnée ci-dessous, dans le cadre de l'exemple traité. Notons toutefois que cette dernière peut être transposée dans d'autres situations, ce qui lui confère un caractère général. En fait, la démarche consistant à exposer une méthode à partir d'un exemple précis a perduré pendant des millénaires et ce jusqu'à l'introduction du symbolisme algébrique aux environs du XVIe siècle.

Voici donc la preuve d'après la méthode de la tablette YBC 4675.



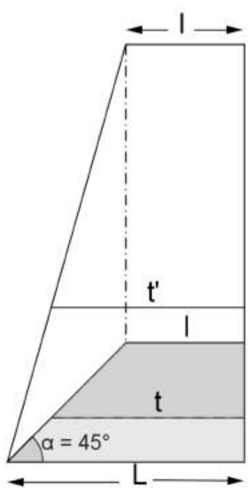
$t^2 = L^2 - 2\,A$.

$t^2 = l^2 + 2\,A$.

Et par addition :

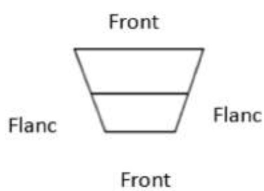
$2t^2 = L^2 + l^2$.

Par affinité orthogonale, cette formule reste vraie :

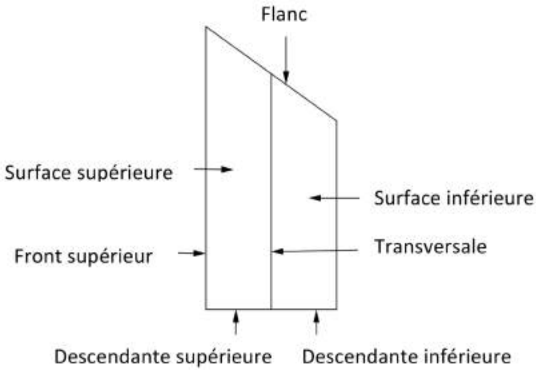


b) Vocabulaire utilisé

Les tablettes que nous étudions portent toutes sur le partage d'un trapèze, « front de bœuf ».



Ce trapèze peut être partagé par une « transversale », c'est-à-dire une parallèle aux bases, en deux trapèzes de même aire. Le terme « transversale » signifie pour les babyloniens : horizontale. De plus, ils ne concevaient la perpendiculaire, qu'ils appelaient « descendante », qu'au sens étymologique du terme (direction du fil à plomb : la verticale).
Suite à une rotation de 90° au XXVIII^{e} siècle av. J. C. de l'écriture sur les tablettes, la figure a aussi tourné mais une partie du vocabulaire a perduré.

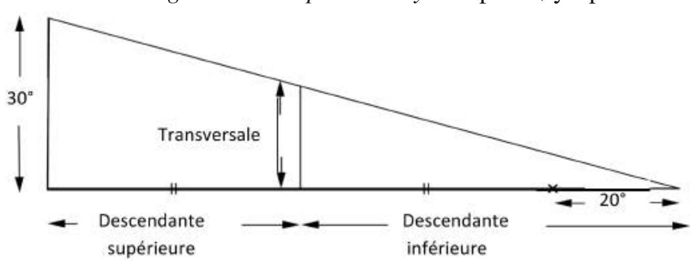


Le système de numération mésopotamien est le système sexagésimal de position à virgule flottante.
Nous adoptons les notations translittérées de F. Thureau-Dangin, à savoir :
- l'unité est notée en degrés,
- les puissances positives de 60 sont notées avec des accents graves,
- les puissances négatives de 60 sont notées avec des accents aigus.

Par exemple : 7`2°5´ = 7 × 60 + 2 + 5/60.

c) Étude de la tablette VAT 8512

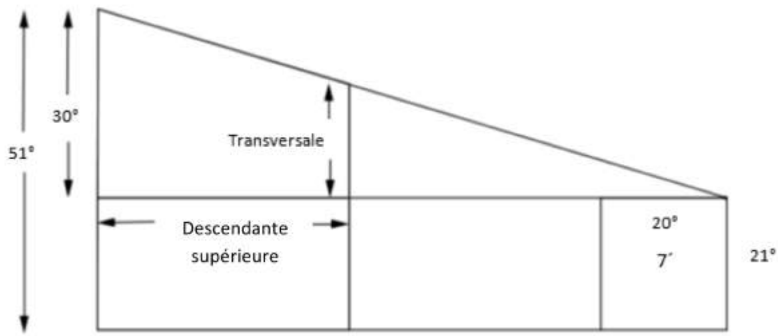
Cette tablette fait partie d'un ensemble de tablettes d'arpentages comme VAT 8389 et VAT 8391 (collection du musée de Berlin). Elle provient vraisemblablement du sud d'Uruk (A. Goetze, MCT p. 149). Elle date de l'époque paléo-babylonienne (≈ −1800).Voir aussi *L'algèbre au temps de Babylone* par Høyrup J.



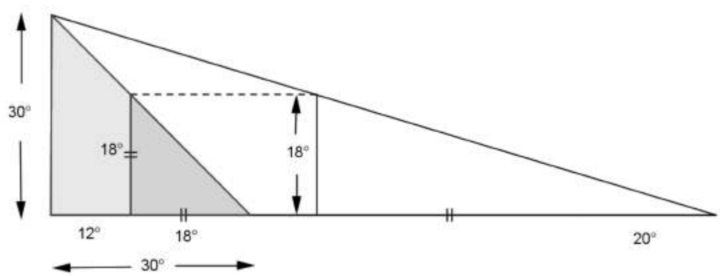
Il s'agit d'un triangle supposé rectangle, ce qui est d'ailleurs confirmé par les calculs, dont un côté perpendiculaire mesure 30°.
La descendante inférieure dépasse la descendante supérieure de 20°.
La transversale le partage en deux parties de telle sorte que la différence entre les

deux aires soit 7`.
On cherche les longueurs de la transversale, de la descendante supérieure et de la descendante inférieure ainsi que l'aire de chaque surface.
En s'appuyant sur la traduction du texte par F. Thureau-Dangin, les participants à l'atelier ont suivi étape par étape la résolution du problème proposée par le scribe.

Première étape : construction d'un rectangle de côtés 20° et 21° afin que son aire soit égale à 7`.
En prolongeant les côtés du rectangle on obtient un trapèze. Ce dernier est partagé alors en deux trapèzes de même aire en prolongeant la transversale existante. Il est alors facile de calculer les longueurs de deux transversales à l'aide de la formule $t^2 = \dfrac{L^2 + l^2}{2}$.



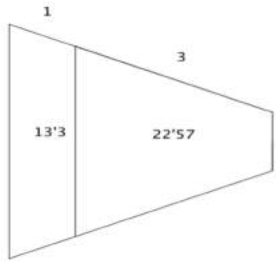
Deuxième étape : Le scribe considère un triangle rectangle isocèle (réduction par affinité orthogonale du triangle initial) partagé par une transversale de même longueur que celle du triangle initial, calculée précédemment. Après avoir calculé la différence des aires de cette figure, il détermine le coefficient d'affinité qui lui permet de passer du petit triangle à celui du problème.
Il peut alors calculer les longueurs et les aires demandées.



d) Tablette Str 367

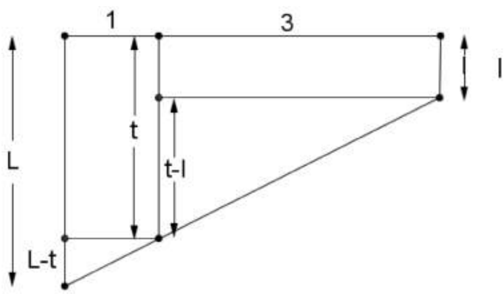
Cette tablette traite également du problème d'un trapèze partagé par une transversale en deux trapèzes dans des proportions 1/3.
Les aires des surfaces créées sont données.

Cette tablette provient également du sud et elle est de l'époque paléo-babylonienne. La figure ci-contre est donnée dans le texte il est énoncé :
« J'ai additionné ce dont le front supérieur excède la transversale avec ce dont la transversale excède le front inférieur : 36. »
On cherche les longueurs de la transversale, de la descendante supérieure et de la descendante inférieure.



Nous pouvons supposer que le trapèze est rectangle. Sur la figure du scribe, le trapèze semble isocèle, toutefois les résultats sont indépendants de la forme du trapèze à condition que la transversale soit parallèle aux bases.

Notons A_1 l'aire du trapèze supérieur, A_2 l'aire du trapèze inférieur, L et l les longueurs respectives des fronts supérieur et inférieur et t la longueur de la transversale.
Nous avons : $A_1 = 13`3$, $A_2 = 22`57$ et $(L - t) + (t - l) = 36$ donc $L - l = 36$.
Le scribe considère un trapèze dont le flanc supérieur mesure 4 et il est partagé dans le rapport 1/3.



Considérons cette nouvelle figure et notons A'_1 et A'_2 les aires correspondantes. Il apparaît un petit triangle rectangle de côtés $L - t$ et 1, réduction par un facteur 3 d'un grand triangle rectangle de côtés $t - l$ et 3. Nous avons : $(t - l) = 3 \times (L - t)$, d'où :

$$(L - t) + (t - l) = (L - t) + 3 \times (L - t) = 4 \times (L - t) = 36,$$

soit encore :

$$L - t = \frac{36}{4} = 9 \text{ et } t - l = 3 \times 9 = 27.$$

Le scribe calcule la différence entre l'aire du trapèze supérieur et le tiers de l'aire du trapèze inférieur du trapèze initial.

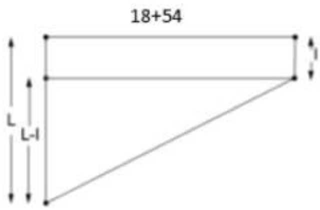
$$A_1 - \frac{A_2}{3} = 13`3 - 22`57/3 = 13`\ 3 - 22`57 \times 20' = 13`3 - 7`39 = 5`24.$$

D'autre part, dans la figure réduite nous avons

$$A'_1 - \frac{A'_2}{3} = \frac{L+t}{2} - \left(\frac{l+t}{2} \times 3\right) : 3 = \frac{L-l}{2} = \frac{36}{2} = 18.$$

Il veut alors calculer le rapport de l'affinité orthogonale qui permet de passer du trapèze initial au trapèze réduit, soit $5`24 \times ? = 18$, ou encore $2`42 \times ? = 9$.
En utilisant les tables numériques mémorisées, il trouve que $2`42 \times 3'20'' = 9$.
$3'20''$ est donc le rapport d'affinité qui permet de passer du trapèze initial au trapèze réduit.
Or, l'inverse de $3'20''$ est 18, 18 est donc le rapport d'affinité qui permet de passer du trapèze réduit au trapèze initial.
Il peut alors déterminer les longueurs respectives des deux flancs, soit 18 et 54.

Puis, pour calculer L et l il passe au calcul d'aires.
Pour cela, il remarque que la figure initiale est formée de : un triangle rectangle de côtés $1`12$ (= 18 + 54) et $L - l$, et d'un rectangle de côtés $1`12$ et l.



Notons T_1 et T_2 les aires respectives de ces deux figures.
On sait que la somme des aires de la figure initiale est : $A_1 + A_2 = 13`3+22`57=36`$, donc $T_1 + T_2 = 36`$.
Or,

$$T_1 = \frac{L-t}{2} \times 1`12 = \frac{36}{2} \times 1`12 = \frac{36}{2} \times 1`12 = 18 \times 1`12 = 21`36$$

et

$$T_2 = 36 - 21`36 = 14`24.$$

Par ailleurs $T_2 = 1`12 \times l$ d'où :

$$l = \frac{14`24}{1`12} = 14`24 \times \frac{1}{1`12} = 14`24 \times 50'' = 12$$

(le front inférieur).

Il finit les calculs : comme $L - l = 36$, on a $L = 36 + 12 = 48$ (le front supérieur), et comme $t - l = 27$ nous avons $t = 27 + 12 = 39$ (la transversale).

e) Conclusion

Bien que la géométrie ne semble pas occuper une place privilégiée dans les mathématiques babyloniennes, les trois tablettes présentées prouvent que les scribes ont été amenés à développer des procédures complexes mais à la fois simples et élégantes pour résoudre les problèmes pratiques des arpenteurs. L'affinité orthogonale est un cas particulier d'une procédure plus générale de réduction –agrandissement des figures, pratiquée à l'époque paléo-babylonienne dans le cadre de problèmes de surfaces et de volumes. L'utilisation des triangles semblables, la méthode de la fausse position ou le « couper-coller » étaient également fort appréciés des scribes.

Pendant l'atelier nous avons distribué les textes originaux d'après la traduction de F. Thureau-Dangin.

On trouvera sur le site de l'APMEP, sur la page du BV 504, des annexes à cet article : les traductions en français de deux tablettes : la VAT 8512 et la Str 367 d'après Thureau-Dangin et Jens Høyrup, et la résolution du problème n° 1 de la BM 13901.

Bibliographie

Bottéro J., *À l'aube de notre culture*, Découvertes Gallimard, Paris, 1994.

Djebbar A., *L'algèbre arabe, Genèse d'un art, collection culture scientifique*, Vuibert, 2005.

Duvilliers B., *Sur les traces de l'homo mathematicus*, Éditions Ellipses, 1999.

Friberg J., *A Remarkable Collection of Mathematical Texts*, Notices of the AMS, Volume 55, N° 9, 2008.

Glassner J.J., *Écrire à Sumer*, Univers historique, Éditions Seuil, 2000

Grand –Pierre V., *Histoire de la Mésopotamie*, Folio histoire inédit, Éditions Gallimard 2010.

Høyrup Jens. Lengths, Widths, *Surfaces (A Portrait on Old Babylonian Algebra and Its Kim)*. Springer, 2002.

Neugebauer O., *Les sciences exactes dans l'antiquité*, Éditions Actes Sud, 1990.

Proust C., *Brève chronologie de l'histoire des mathématiques en Mésopotamie*. http://www.math.ens.fr/culturemath/

Proust C., *Le calcul sexagésimal en Mésopotamie*, http://www.math.ens.fr/culturemath/

Proust C., *La multiplication babylonienne : La part non écrite du calcul*. Revue d'histoire des mathématiques, 6 (2000), p. 293–303.

Proust C., *Tablettes mathématiques paléo-babyloniennes de la collection Hilprecht*. (Texte und Materialen der Frau Professor Hilprecht Collection vol. 8, Harrassowitz Verlag, Leipzig.)

Proust C., *Problèmes de partage : des cadastres à l'arithmétique*, http://www.math.ens.fr/culturemath/

Thureau-Dangin F., *Textes mathématiques babyloniens*, Brill, Leyde, 1937.