Fabriquer des saucisses

Julien Moreau

Pour étudier certaines propriétés d'une figure du plan ou de l'espace, on a parfois intérêt à la « gonfler » en lui adjoignant tous les points qui en sont assez proches. Ce que l'on obtient ainsi est une *saucisse de Minkowski*[1]. Plus précisément :

Étant donné une figure F*, nous appellerons h-saucisse de* F *l'ensemble des points situés à une distance inférieure au sens large à h d'au moins un point de* F.

Ces saucisses ne sont pas seulement un outil mathématique pour adultes avertis[2]. On les rencontre dans la vie courante beaucoup plus souvent qu'on ne pourrait croire : une route de largeur L est la $\left(\frac{L}{2}\right)$-saucisse de sa ligne médiane. Et les eaux territoriales[3] d'une île constituent la partie maritime de la h-saucisse de sa côte, h valant ici 22 milles marins.

Elles peuvent être aussi l'occasion d'un travail plaisant avec une classe de collège ou de lycée, à condition de se limiter à des figures simples du plan. On trouvera dans ce bulletin, sous le titre « La chèvre de monsieur Seguin » le compte rendu d'une expérimentation en classe de quatrième, faite par Frédérique Fournier.

(1) Il est à noter que la patrie de Minkowski était l'Allemagne, terre d'élection de la saucisse.
(2) Elles sont à rapprocher notamment de la notion de courbes parallèles du plan et de surfaces parallèles de l'espace. Elles interviennent aussi dans une des définitions de la dimension d'un objet fractal.
(3) Exemple suggéré par Daniel Reisz.

Signalons au passage que, comme toute saucisse qui se respecte, cet article peut se débiter en tranches à servir séparément.

1. Préliminaires

La h-saucisse d'un point A est le disque fermé de centre A et de rayon h. Plus généralement, la h-saucisse d'une figure F est la réunion des disques fermés de rayon h et de centre un point de F.
Pour trouver la h-saucisse d'une figure F, il peut évidemment être utile de rechercher d'abord, étant donné un point M du plan, quel est le point K de F (pas forcément unique) le plus proche de M ; il reste alors à trouver les M tels que MK $\leq h$.

Théorème

Un polygone P (contour et intérieur) et un point M extérieur à P étant donnés, on voit immédiatement qu'un point K de l'intérieur de P ne peut être le point de P le plus proche de M. En effet le segment [MK] coupe le contour de P en au moins un point J, plus proche de M que K. Il en résulte aussitôt la propriété suivante :

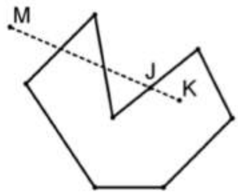

figure 0

(T) *À l'extérieur d'un polygone, la h-saucisse de ce polygone et la h-saucisse de son contour se confondent. Mais, alors que tout point intérieur au polygone appartient à sa h-saucisse, il n'appartient pas forcément à celle de son contour.*

2. La *h*-saucisse d'un segment

Soit dans le plan un segment [AB]. Si l'on fait glisser un point Ω de A à B, le disque fermé de centre Ω et de rayon h engendre la h-saucisse de [AB], dont on voit aussitôt l'allure (figure 1).

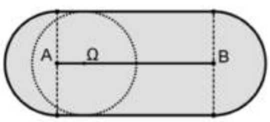

figure 1

Un individu grincheux peut cependant estimer que cette justification fait davantage appel à l'intuition visuelle qu'à un raisonnement digne de ce nom. On peut lui donner satisfaction comme suit.

Recherche du point de [AB] le plus proche de M

Menons les perpendiculaires Δ et Δ′ en A et B au segment. Si M est situé dans la bande délimitée par Δ et Δ′, bords compris, le point de [AB] le plus proche de M est sa projection orthogonale H sur la droite (AB).

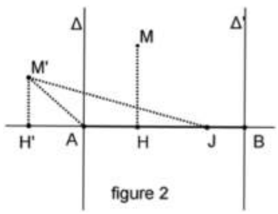

figure 2

Prenons maintenant un point M′ hors de la bande délimitée par Δ et Δ′, par exemple du côté de A, et appelons H′ sa projection orthogonale sur la droite (AB). Un point J étant choisi sur]AB], les points H′, A, J sont dans cet ordre sur la droite. Il en résulte aussitôt que l'on a M′H′ < M′A < M′J. Le point de [AB] le plus proche de M′ est donc A. D'où :

Théorème. *Étant donné dans un plan un point* M *et un segment* [AB], *le point du segment le plus proche de* M *est sa projection orthogonale si elle appartient au segment et sinon l'une des deux extrémités.*

Recherche de la *h*-saucisse de [AB]

Les points de la saucisse situés entre Δ et Δ' sont ceux qui sont situés à une distance de (AB) au plus égale à h ; ils forment donc un rectangle. Les points de la saucisse situés hors de la bande et du côté de A sont les points de cette région situés à une distance de A au plus égale à h ; ils forment donc un demi-disque. Au total la saucisse est bien la région représentée sur la figure 1. On voit aussitôt que, si L désigne la longueur du segment, la saucisse a pour périmètre $2L + 2\pi h$ et pour aire $2hL + \pi h^2$.

Exercice(4)

Une piste d'athlétisme de 10m de large peut être considérée comme la différence ensembliste de deux saucisses d'un même segment long de 80 mètres. Sachant que la longueur du bord intérieur (la « corde ») est de 400 mètres, quelle est la longueur du bord extérieur et quelle est l'aire de la piste ?

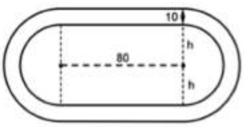

figure 1 bis

3. La *h*-saucisse d'un triangle

Étant donné trois points non alignés A, B, C, nous entendrons par « triangle ABC » l'ensemble formé **du pourtour et de l'intérieur**. Fixons-nous d'abord un point M du plan.

Recherche du point du triangle le plus proche de M

Nous supposons M extérieur au triangle (sinon le point du triangle le plus proche de M est M lui-même). Le travail s'inspire de ce qui vient d'être fait pour un segment. Menons (figure 3) par chacun des trois sommets les demi-perpendiculaires aux côtés qui y aboutissent. On partage ainsi l'extérieur du triangle en trois demi-bandes et trois secteurs angulaires.

Supposons M dans une des demi-bandes, par exemple *z*AB*z′* (cf. figure 3). Soit P un point du triangle. Le segment [MP] coupe la droite (AB) en un point K (qui peut ne pas être sur le segment [AB]). Si H désigne la projection orthogonale de M sur (AB), on a $MP \geq MK \geq MH$, l'égalité $MP = MH$ n'ayant lieu que si P est en H.

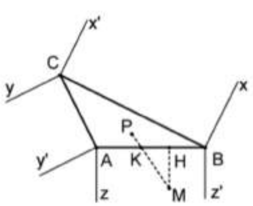

figure 3

Supposons maintenant M dans le secteur angulaire *y′*A*z* (figure 4) et soit P un point du triangle autre que A. Si M, A, P sont alignés, on a évidemment $MA < MP$. Écartons ce cas. Les demi-droites [AM) et [AP) partagent le plan en deux secteurs angulaires dont l'un contient B et l'autre C. L'un des deux a une mesure inférieure à 180°, disons celui qui contient B. L'angle $\widehat{MAP}$ est supérieur à $\widehat{zAB}$, donc obtus et l'on a donc

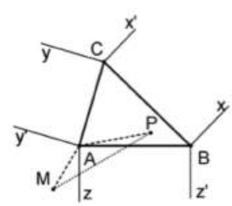

figure 4

(4) Communiqué par Daniel Reisz.

MA < MP. Ainsi le point du triangle le plus proche de M est A.

La *h*-saucisse du triangle ABC

Ce préliminaire étant réglé, il en résulte aussitôt que la *h*-saucisse du triangle s'obtient en le bordant par trois rectangles de largeur h et trois secteurs circulaires de rayon h, conformément à la figure 5.

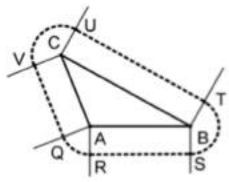

figure 5

Aire et périmètre de la *h*-saucisse

On voit sur la figure 5 que si l'on effectue sur le secteur circulaire QAR la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$ et sur le secteur circulaire SBT la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$, on obtient avec le secteur circulaire UCV un disque complet de rayon h. Il en résulte que, si l'on appelle l le périmètre et S l'aire du triangle, le périmètre de la saucisse est $L = l + 2\pi h$ et son aire est $\Sigma = S + lh + \pi h^2$.

N.B. : il n'est pas nécessaire d'avoir étudié les translations ni les vecteurs ; on peut se contenter de dire qu'on peut faire glisser le secteur QAR, par exemple, le long de [AC] jusqu'à amener A en C. Ce genre d'appel à l'intuition n'a rien de scandaleux, mais au contraire prépare l'introduction en forme des notions en question.

4. La *h*-saucisse du pourtour d'un triangle

Reprenons le triangle ABC. Nous le désignerons par T et son pourtour par Π. On sait, de par le théorème (T) du § 1, que les parties de la *h*-saucisse du pourtour Π de T et de la *h*-saucisse T extérieures au triangle sont identiques. Reste à voir ce qui se passe à l'intérieur de T.

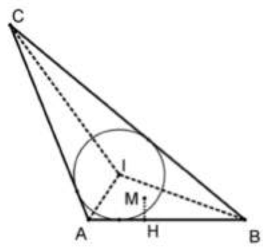

figure 6

Soit I le centre du cercle inscrit. Partageons T en trois : les triangles IAB, IBC, ICA. Il est bien connu que la bissectrice d'un secteur angulaire xOy le partage en deux : les points qui sont plus proches de Ox que de Oy d'une part, les points qui sont plus proches de Oy que de Ox d'autre part.

Limitons-nous pour l'instant aux points du triangle IAB, par exemple. D'après le résultat qui vient d'être rappelé, ils sont plus proches de la droite (AB) que des droites (BC) et (CA). Prenons un point quelconque M du triangle IAB. Comme les angles $\widehat{ABI}$ et $\widehat{BAI}$ sont aigus (le premier vaut $\frac{1}{2}\widehat{ABC}$, le second $\frac{1}{2}\widehat{BAC}$), la projection orthogonale H de M sur (AB) est située entre A et B. Il en résulte que le point du pourtour du triangle ABC le plus proche de M est H.

Mais, dans le triangle IAB, le point le plus éloigné de (AB) est le sommet opposé I.

Si on désigne par r le rayon du cercle inscrit dans T, on a donc $MH \leq r$, l'égalité n'ayant lieu que si M est en I.

Il résulte de ce qui précède que, pour tout point M intérieur à T, la distance de M au point de H qui en est le plus proche est au plus égale à r et que l'égalité n'est obtenue que si M est en I.

Si donc nous nous donnons h supérieur à r au sens large, la h-saucisse du pourtour du triangle T contient tout l'intérieur de ce triangle ; c'est donc aussi la h-saucisse de T lui-même.

Prenons maintenant $h < r$ et voyons ce qui se passe dans le triangle IAB, par exemple. Pour tout point M de ce triangle, le point de Π le plus proche de M est sa projection orthogonale sur (AB). Les points du triangle IAB situés dans la saucisse sont donc ceux qui sont à une distance de (AB) au plus égale à h. D'où la figure 7.

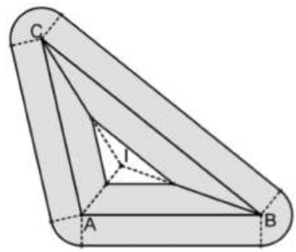

figure 7

5. La *h*-saucisse d'un arc de cercle

On a besoin ici de quelques préliminaires.

Variation de la distance d'un point mobile sur un cercle à un point fixe du plan

On se donne un cercle C de centre O et de rayon R, un point fixe M du plan (M $\neq$ O) et un point P de C. La demi-droite [OM) coupe C en U et son prolongement le coupe en V. On suppose que P n'est ni en U ni en V. Le cercle Γ de centre M passant par P recoupe C en un point P′. Le point V est extérieur à Γ, car MV = MO + OV = MO + OP, et MO + OP > MP.

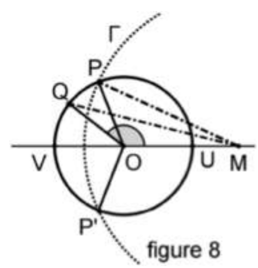

figure 8

Donc tout l'arc PVP′ de C, ensemble des points Q tels que $\widehat{MOQ} > \widehat{MOP}$, est extérieur à Γ. Ainsi les points Q de C tels que $\widehat{MOQ} > \widehat{MOP}$ sont aussi tels que MQ > MP.

Théorème

Quand un point P *décrit un cercle* C, *sa distance à un point fixe* M *distinct du centre* O *du cercle est d'autant plus grande que l'angle* $\widehat{MOP}$ *(angle non orienté, compris entre 0 et 180°) est plus grand.*

N.B. : Avec de grands élèves, il est plus rapide de remarquer que le résultat découle immédiatement de la formule d'Al Kashi : $MP^2 = OM^2 + R^2 - 2OM \cdot R\widehat{MOP}$.

Recherche du point d'un arc de cercle le plus proche d'un point donné

On se donne un arc de cercle de centre O, de rayon R, d'extrémités A et B. On se donne en outre un point M du plan autre que O.

Si la demi-droite [OM) coupe l'arc en un point U, ce point est strictement plus proche de M que tout autre point du cercle et a fortiori de l'arc (figure 9 a).

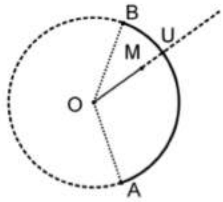

figure 9 a

Prenons maintenant un point M tel que la demi-droite [OM) coupe le cercle en un point U situé hors de l'arc AB et soit V le point diamétralement opposé à U.

Premier cas : V *est sur l'arc* AB *(figure 9 b).*

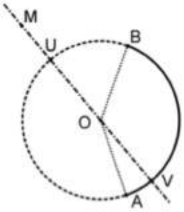

figure 9 b

Lorsqu'un point P décrit le cercle en partant de U, la distance MP augmente jusqu'à ce que P soit en U, puis diminue lorsque P revient jusqu'en U. Il en résulte que le point de l'arc AB le plus proche de M est l'un des deux points A et B.

*Second cas :*V *n'est pas sur l'arc* AB *(figure 9 c).*

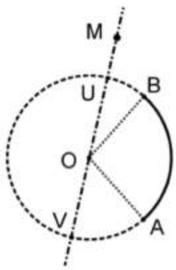

figure 9 c

L'arc AB est alors tout entier inclus dans un des demi-cercles déterminés par U et V ; on peut toujours supposer que les points V, A, B, U sont dans cet ordre sur ce demi-cercle. Le point de l'arc AB le plus proche de M est alors B. Résumons : *Si la demi-droite* [OM) *coupe l'arc* AB*, le point de cet arc le plus proche de* M *est le point d'intersection ; si la demi-droite* [OM) *ne coupe pas l'arc* AB*, le point de cet arc le plus proche de* M *est* A *ou* B.

Recherche de la *h*-saucisse de l'arc

Les demi-droites [OA) et [OB) partagent le plan en deux secteurs angulaires : celui qui contient l'arc AB, que nous appellerons S, et son complémentaire, que nous appellerons S′.

Prenons d'abord un point M de S. Le point de l'arc le plus proche de lui est le point U, intersection de l'arc et de la demi-droite [OM). M est dans la saucisse si et seulement si $MU \leq h$. Si $h < R$, la portion de la saucisse incluse dans S est donc l'intersection avec S de la couronne circulaire de centre O, de rayon inférieur $R - h$ et de rayon supérieur $R + h$. Si $h \geq R$, la portion de la saucisse incluse dans S est l'intersection avec S du disque fermé de centre O et de rayon $R + h$.

Partageons maintenant S′ en deux par la médiatrice de [AB]. Appelons S'_A le morceau qui contient A, S'_B le morceau qui contient B. Quand M est dans S'_A, le point de l'arc le plus proche de M est A. Les points de la saucisse situés dans S'_A sont donc les points du disque fermé de centre A et de rayon R situés dans ce secteur. Même chose pour S'_B.

Nous donnons ci-dessous les différents aspects possibles :

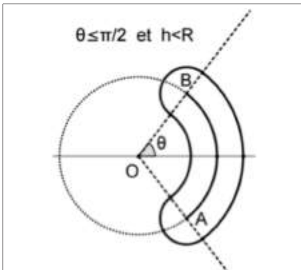

figure 10 a

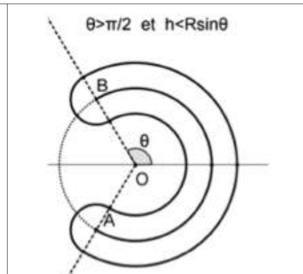

figure 10 b

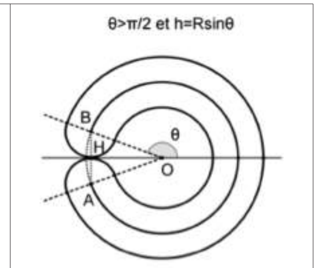

figure 10 c

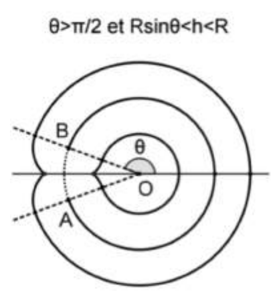

figure 10 d

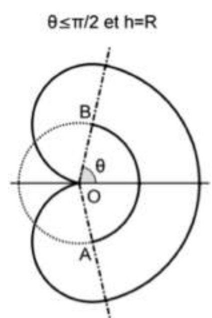

figure 10 e

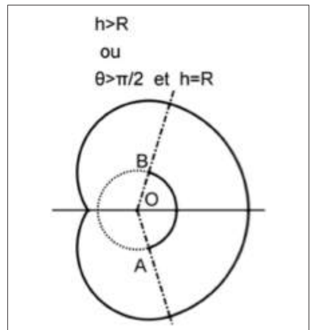

figure 10 f

Trois remarques pour finir

▪ Si on prend comme arc AB un demi-cercle $\left(\theta = \dfrac{\pi}{2}\right)$, le problème est notablement simplifié, avec trois cas de figure seulement.

▪ Si on se limite au cas de la figure 10 a (ou 10 b), le calcul du périmètre et de l'aire de la saucisse ne pose aucun problème. On trouve respectivement $2\mathrm{L} + 2\pi h$ et $2h\mathrm{L} + \pi h^2$, où L est la longueur de l'arc AB, c'est-à-dire les mêmes formules que celles trouvées pour la saucisse d'un segment.

▪ Une étude expérimentale est aisée si l'on dispose d'un logiciel de géométrie dynamique permettant de faire varier les paramètres R, h, θ. On trouvera sur le site de l'APMEP une illustration faite par Marc Roux. Elle a été réalisée avec le logiciel GeoGebra qui, par parenthèse, est à la fois gratuit, puissant et d'usage facile.