La chèvre de Monsieur Seguin en classe de Quatrième

Frédérique Fournier(*)

Ces quelques lignes sont en grande partie constituées des travaux des élèves de la Quatrième2 du collège Pierre Labitrie, que nous remercions vivement pour leur participation très active ! Ce court article fait écho à l'article *Fabriquer des saucisses* de Julien Moreau, à lire dans ce bulletin.

Dans ma classe, pas de saucisses au menu, mais de l'herbe à brouter par une éternelle et sympathique chevrette pour, espérons-le, donner aux élèves des mathématiques à dévorer, de l'école au lycée ! Il s'agit ici pour l'élève de réinvestir les notions d'aires et de distances, et de travailler autour de la communication de ses résultats.

C'est donc avec ces objectifs en tête que je choisis de décliner au niveau Quatrième l'activité présentée par l'IREM Paris Nord, *La chèvre de Monsieur Seguin*(1) ; deux énoncés prennent alors vie et sont distribués au gré de la classe : **l'abreuvoir** et **l'enclos**.

Les voisins de Monsieur Seguin ne sont pas très contents : très régulièrement sa petite chèvre vient brouter leur herbe bien fraîche ! Monsieur Seguin décide donc d'attacher sa chèvre … mais l'attacher à un simple piquet serait trop … simple !

Version 1 : l'abreuvoir

Il choisit donc de l'attacher à l'abreuvoir, long de 5 m et très étroit, placé au milieu de son champ. La longueur de la corde est 2 m, et elle peut coulisser le long de l'abreuvoir.

Au bout d'une semaine, il s'aperçoit que la petite chèvre a très très faim : la gourmande a mangé toute l'herbe qui lui était accessible

Version 2 : l'enclos

Il plante donc 3 piquets dans son champ pour fabriquer un enclos : ces trois piquets sont les sommets d'un triangle rectangle isocèle, dont l'un des côtés de l'angle droit mesure 10 m. Les piquets sont reliés les uns aux autres par trois poutres horizontales

La petite chèvre étant tellement petite , elle peut passer sous les poutres !

Monsieur Seguin l'attache donc au bout d'une corde de 2 m, qui peut coulisser le long des poutres de l'enclos.

Au bout de deux semaines, il s'aperçoit que la petite chèvre a très très faim : la gourmande a mangé toute l'herbe qui lui était accessible.

Quelle est donc l'aire de la surface de gazon brouté par cette petite chèvre qui semble bien gourmande ?

(*) frederique.fournier@sfr.fr

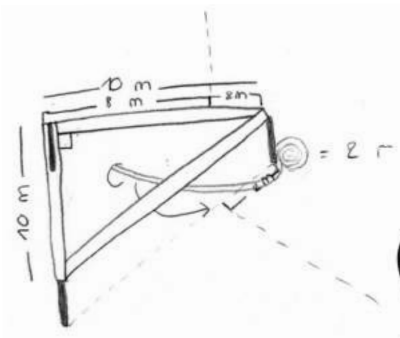
(1) Initialement, cette activité est niveau Sixième. La corde au bout de laquelle se trouve la chèvre, est attachée à un anneau fixé à un mur de la maison de Monsieur Seguin, et il s'agit de tracer la zone accessible à la chèvre.

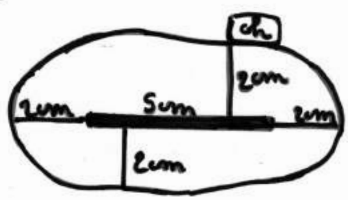
http://www--irem.univ--paris13.fr/site_spip/spip.php?article486

Première séance : (40 min)

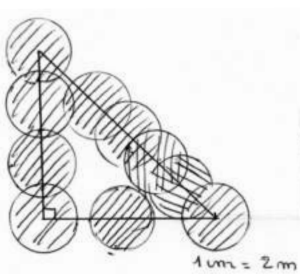
Les élèves sont prévenus : il y a deux problèmes différents, peut-être ont-ils le même que leur voisin, peut-être pas… Les consignes sont données : lecture silencieuse et recherche strictement personnelle pendant 15 min. Pas de questions, ni au professeur, ni au voisin : chacun s'occupe de son problème.
Ils sont également avertis qu'un temps de concertation leur sera ensuite accordé, pendant lequel ils pourront librement échanger et discuter. Temps prévu : 15 min.
S'ensuivra une mise en commun collective (10 min).

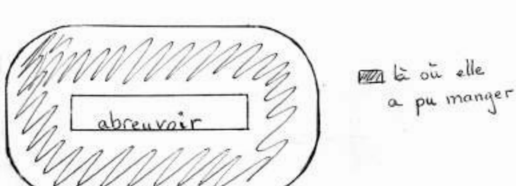
Chaque élève dispose d'une feuille blanche, personnelle, qui fait office de brouillon. Les cinq premières minutes sont silencieuses, toutes entières réservées à la lecture et l'appropriation de l'énoncé. Celui-ci les absorbe. Quelques regards toutefois, inquiets et interrogateurs, sont lancés en direction du professeur, mais celui-ci reste silencieux et leur renvoie un regard confiant et innocent : un abreuvoir, un enclos, une chèvre, oui et alors, un souci ? *Non non …* est la réponse muette qui lui revient. Les yeux se posent à nouveau sur l'énoncé, puis sur la feuille encore vierge, et quelques minutes après, les premières esquisses, les premières idées.
Tous sont lancés, certains ont déjà engagé une démarche abstraite.





Au bout du quart d'heure, il est temps de découvrir le problème de ses voisins, d'échanger, de mettre en commun, de comparer … pour s'aider d'un problème à l'autre et avancer.





Premières questions très hétéroclites :
– comment dessiner le contour de la zone sans tracer tous les disques ?

– pourquoi le contour est droit par endroit ?
– j’ai bien le droit d’utiliser une vraie ficelle ?
– la corde qui coulisse c’est bien comme la leçon sur un point à une distance d’une droite ?

Lors de la mise en commun collective, les questions qui restent sont :
– où commencent précisément tous les arcs de cercle ?
– quelle est la formule de l’aire d’un disque ?

Trois autres questions n’ont pas trouvé de réponse à la fin de la première séance :
a) peut-on choisir une largeur de l’abreuvoir ?
b) l’abreuvoir est « étroit comment » ? il est tellement étroit que lorsqu’on le trace à l’échelle 1/100 il peut être représenté par un segment ?
c) comment calcule-t-on l’aire d’une portion de disque ?

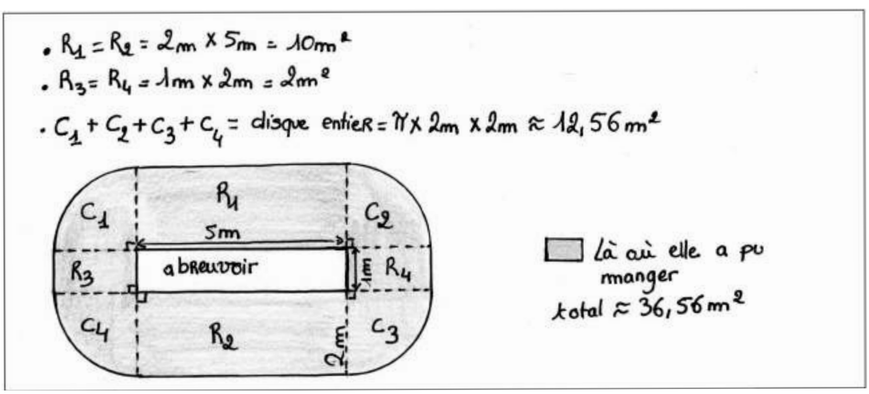
Nous nous séparons sur ces questions, les élèves doivent y réfléchir pour le lendemain.

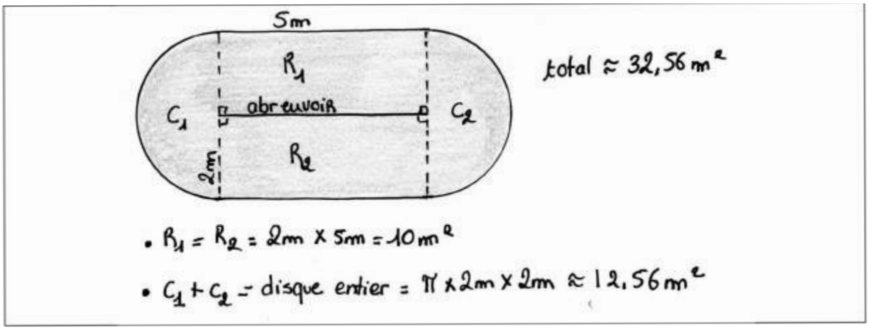
Deuxième séance : (1 heure)

Lorsque nous nous retrouvons, les élèves apportent des réponses :
– on peut choisir une largeur de l’abreuvoir (largeur choisie par défaut : 1 m) ;
– l’abreuvoir peut être représenté par un segment : s’il mesure 50 cm de large dans la réalité, sur notre plan il mesurera 0,5 cm, donc l’épaisseur d’un trait de crayon ;
– un élève a trouvé et recopié : « l’aire d’un secteur de cercle est proportionnelle à son angle d’ouverture. ». Le lien est fait avec demi-disque (ouverture 180°), quart de disque (ouverture 90°), huitième de disque (ouverture 45°)…

Les élèves se mettent en binôme et rédigent une solution.
À ce stade, tous ont, au moins dans leur tête, la construction précise, c’est-à-dire avec les limites des arcs de cercle, de la zone dans laquelle la chèvre peut brouter.

L’étape des calculs est alors lancée …en binômes.





L’étape des découpages aussi !

La dernière étape est la comparaison par problème des calculs et des résultats obtenus.
Concernant le problème de l’enclos, deux méthodes différentes pour l’aire de la zone intérieure à l’enclos sont proposées (voir annexes 1 et 2).
Les deux conduiront au même résultat. OUF !!!

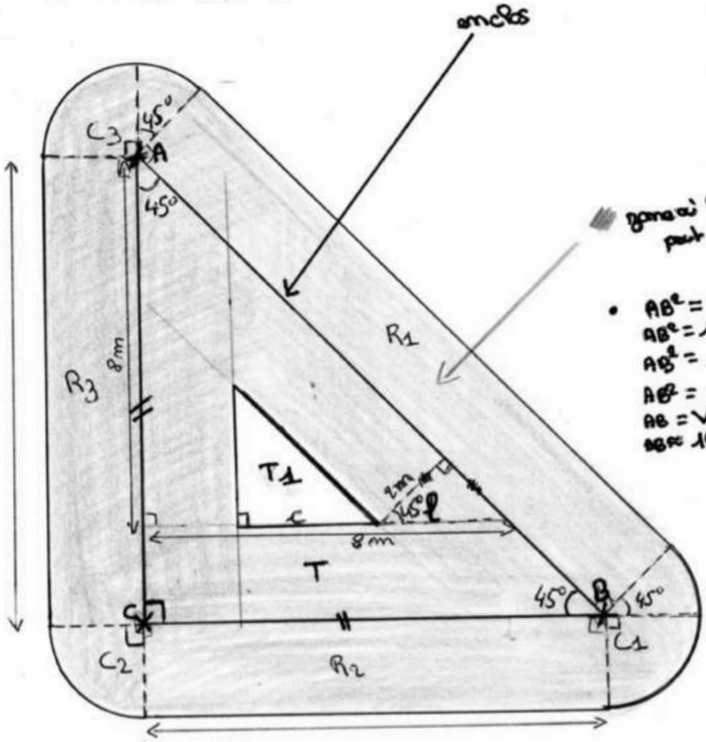
Chaque binôme s’assure alors de ses propres résultats et complète si besoin sa démarche (unités d’aires, formules, …) afin de mieux la rédiger.

Pour conclure brièvement, je dirais que les élèves se sont bien emparés du problème. Ils ont mené les travaux à leur terme, se sont concertés et sont revenus à deux reprises sur leur production pour la rendre plus lisible. Les binômes attelés au problème de l’abreuvoir, ont pris, seuls, la décision de vérifier, en sus de leurs propres calculs, ceux liés aux abreuvoirs qui n’avaient pas les mêmes dimensions que le leur.
Le mot de la fin sera laissé à Antoine, (problème de l’enclos) à qui il manquait deux malheureux petits calculs pour finaliser son travail : « Je peux emporter la feuille pour finir chez moi ? ».

Annexe 1 : Calcul par différence d’aires

- $\ell^2 = 2^2 + 2^2 = 4 + 4 = 8$
  $\ell = \sqrt{8} \approx 2,8$

- $c \approx 8 - (2 + 2,8) \approx 3,2$



zone où la chèvre peut brouter

- $AB^2 = AC^2 + BC^2$
  $AB^2 = 10^2 + 10^2$
  $AB^2 = 100 + 100$
  $AB^2 = 200$
  $AB = \sqrt{200}$
  $AB \approx 14,1\,m$

- $C_1 + C_2 + C_3 =$ disque entier $= \pi \times 2\,m \times 2\,m \approx 12,56\,m^2$

- $R_2 = R_3 = 10\,m \times 2\,m = 20\,m^2$

- $R_1 \approx 14\,m \times 2\,m \approx 28\,m^2$

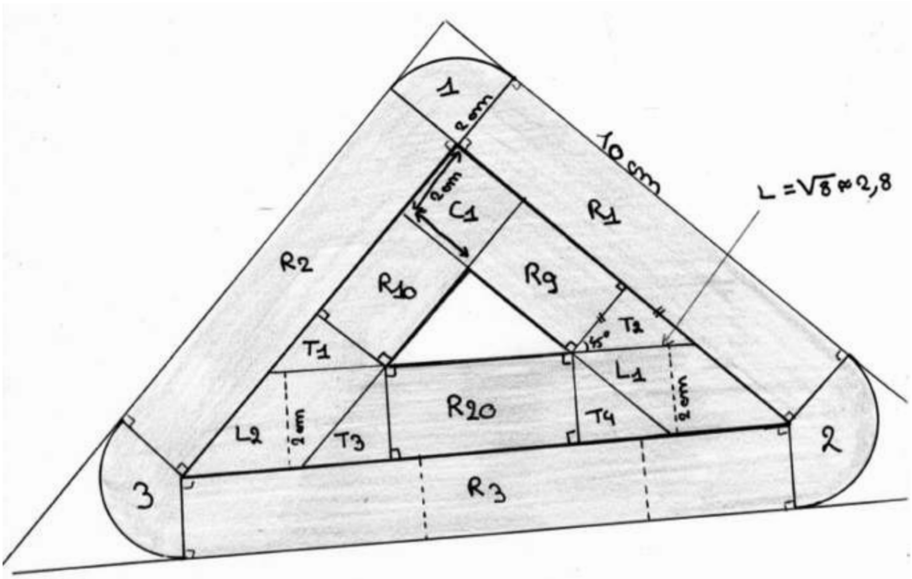
$\boxed{\text{Total} \approx 125,44\,m^2}$

- $T_1 \approx \dfrac{3,2\,m \times 3,2\,m}{2} = 5,12\,m^2$

- Aire $ABC = \dfrac{10\,m \times 10\,m}{2} = 50\,m^2$

- $T = 50\,m^2 - 5,12\,m^2 = 44,88\,m^2$

Annexe 2 : Calcul par sommes d'aires



$\mathcal{C}_{123} = R^2 = 2^2 \times \pi = 4 \times \pi \approx 12,56$ 12,56 cm²

$R_1 = R_2 = 10 \times 2 = 20$; $R_1 + R_2 = 40$ 40 cm²

$R_3 = 14,2 \times 2 = 28,4$ 28,4 cm²

$C_1 = 2 \times 2 = 4$ 4 cm²

$L_1 = L_2 = 2,8 \times 2 = 5,6$ 11,2 cm²

$T_1 = T_2 = 2 \times 2 / 2 = 2 = T_3 = T_4 = 2$ 8 cm²

$R_9 = R_{10} = 2 \times 3 = 6$ 12 cm²

$R_{20} = 2 \times 4,5 = 9$ 9 cm²

$\mathcal{A} = 12,56 + 40 + 28,4 + 4 + 11,2 + 8 + 12 + 9 = 125,16$

Le résultat est environ 125,16 m²