Les problèmes de l'APMEP

Les propositions de problèmes, solutions ou commentaires, sont à envoyer à

Max HOCHART
13, rue des Garennes
63 800 Cournon d'Auvergne
ou
hochartmax@yahoo.fr

Énoncés des nouveaux problèmes

Problème 503–1 (Jean-Pierre Friedelmeyer (Strasbourg))

Démontrer les formules trigonométriques suivantes et en proposer d'autres :

$$\tan\left(\frac{3\pi}{7}\right) - 4\sin\left(\frac{\pi}{7}\right) = \sqrt{7};$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right) + 4\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right) = \sqrt{11};$$

$$\tan\left(\frac{5\pi}{19}\right) + 4\sin\left(\frac{2\pi}{19}\right) - 4\sin\left(\frac{3\pi}{19}\right) + 4\sin\left(\frac{8\pi}{19}\right) = \sqrt{19}.$$

Problème 503–2 (Ghali Lalami (Marrakech))

On fixe un entier naturel $m \geq 2$. Montrer que l'on peut trouver des entiers relatifs $n_1, \ldots, n_{m-1}$ tels que

$$\arctan(m) = \sum_{k=1}^{m-1} n_k \arctan(k)$$

si et seulement si les facteurs premiers de $m^2 + 1$ sont plus petits que $2m$.

Problème 503–3

On considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$, un nombre premier $p \geq 3$ et un sous-groupe fini G du groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ des matrices inversibles de taille n à coefficients entiers. Enfin, $\mathbb{F}_p$ est le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Montrer que l'application naturelle

$$\begin{cases} \mathrm{G} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p) \\ \mathrm{A} \mapsto \mathrm{A} \bmod p \end{cases}$$

est injective.

Solutions des problèmes antérieurs

Problème 495–2

Calculer le déterminant de la matrice $A = (i \vee j)_{1 \le i,j \le n}$ où, pour deux entiers naturels i, $j \in \mathbb{Z}$, le symbole $i \vee j$ désigne le ppcm de i et j.

Réponses de Raymond Heitz (Piriac) et Pierre Renfer (Saint-Georges d'Orques)

Les premières valeurs du déterminant de A sont données ci-dessous :

n	2	3	4	5	6	7	8	9
det(A)	–2	12	–48	960	11520	–483840	3870720	–69672960 .

En notant $i \wedge j$ le pgcd de deux entiers i et j, la formule

$$i \vee j = \frac{ij}{i \wedge j} \qquad 1 \le i, j \le n$$

permet d'écrire

$$A = DBD,$$

où D est la matrice diagonale

$$D = \mathrm{Diag}(1, 2, \ldots, n)$$

et B la matrice

$$B = \left(\frac{1}{i \wedge j}\right)_{1 \le i,j \le n}.$$

Il en découle l'égalité

$$\det(A) = (n!)^2 \det(B).$$

Il reste maintenant à calculer le déterminant de B. On va montrer que

$$\det(B) = \frac{1}{n!} \prod_{p \le n} (1-p)^{\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor},$$

où $\lfloor\ \rfloor$ désigne la fonction partie entière, et où le produit porte uniquement sur les nombres premiers inférieurs ou égaux à n.
Plus généralement, on sait calculer, via la formule d'inversion de Möbius, le déterminant de toute matrice du type

$$B_f = \left(f(i \wedge j)\right)_{1 \le i,j \le n}$$

où f est n'importe quelle application définie sur $\mathbb{N}^*$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. Dans l'exemple ci-dessus, f est la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

On rappelle les résultats suivants(1) : la fonction μ de Möbius est définie pour

(1) Pour plus de détails, le lecteur pourra consulter le livre de Gérald Tenenbaum, « Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres », Cours Spécialisé de la Société Mathématique de France, 1995.

$n \in \mathbb{N}^*$ par

$$\mu(n)=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad n=1, \\ (-1)^k & \text{si} \quad n \text{ est le produit de } k \text{ nombres premiers distincts,} \\ 0 & \text{si} \quad n \text{ est divisible par un carré parfait (autre que 1).} \end{cases}$$

On fixe désormais une application $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ et l'on définit l'application $g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ par

$$g(n)=\sum_{k|n}\mu(k)f\left(\frac{n}{k}\right),$$

le symbole $k \mid n$ signifiant que l'entier $k \in \mathbb{N}^*$ divise l'entier $n \in \mathbb{N}^*$. On a alors la formule d'inversion suivante : pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f(n)=\sum_{k|n}g(k).$$

Pour le calcul du déterminant de la matrice B_f, on introduit également, pour $i, j \in \mathbb{N}^*$, le symbole $d_{i,j}$ qui vaut 1 si i divise j et 0 sinon. Par définition, la matrice B_f est définie par

$$(B_f)_{i,j}=f(i\wedge j).$$

La formule d'inversion de Möbius donne alors

$$(B_f)_{i,j}=\sum_{k|i\wedge j}g(k)=\sum_{k=1}^{n}d_{k,i}d_{k,j}g(k).$$

Ainsi,

$$B_f={}^t P\Delta_g P,$$

où

$$P=\left(d_{i,j}\right)_{1\le i,j\le n}$$

et

$$\Delta_g=\mathrm{Diag}\left(g(1),\ldots,g(n)\right).$$

Puisque la matrice P est triangulaire, son déterminant vaut 1, et alors

$$\det(B_f)=\prod_{k=1}^{n}g(k)=\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{j|k}\mu(j)f\left(\frac{k}{j}\right)\right). \tag{1}$$

Pour répondre à la question posée, on prend donc $f(x)=\dfrac{1}{x}$. Ainsi, pour un entier $k \in [[1, n]]$ dont la factorisation est

$$k = p_1^{\alpha_1} \dots p_l^{\alpha_l},$$

on peut calculer la somme

$$\sum_{j|k} \mu(j) f\left(\frac{k}{j}\right) = \frac{1}{k} \sum_{j|k} \mu(j) j.$$

Par définition de μ, cette somme vaut

$$\frac{1}{k}\Big(1 - (p_1 + \dots + p_l) + (p_1 p_2 + \dots + p_{l-1} p_l) - \dots + (-1)^l p_1 p_l\Big),$$

soit encore

$$\frac{1}{k} \prod_{s=1}^{l} (1 - p_s) = \frac{1}{k} \prod_{p|k} (1 - p),$$

la lettre p désignant toujours un nombre premier. Ainsi,

$$\det(\mathrm{B}) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \prod_{p|k} (1 - p) = \frac{1}{n!} \prod_{p \le n} (1 - p)^{\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor}.$$

En conclusion,

$$\det\Big((i \vee j)_{1 \le i, j \le n}\Big) = (n!)^2 \det(\mathrm{B}) = n! \prod_{p \le n} (1 - p)^{\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor}.$$

On peut noter que la méthode développée plus haut permet de retrouver le déterminant de Schmidt, à savoir le déterminant de la matrice $(i \wedge j)_{1 \le i, j \le n}$. En prenant $f : x \mapsto x$, la relation (1) donne

$$\det\Big((i \wedge j)_{1 \le i, j \le n}\Big) = \det(\mathrm{B}_{id}) = \prod_{k=1}^{n} \left(\sum_{j|k} \mu(j) \frac{k}{j} \right).$$

Or, classiquement, en notant φ l'indicatride d'Euler,

$$n = \sum_{k|n} \varphi(k),$$

et par inversion

$$\varphi(n) = \sum_{k|n} \mu(k) \frac{n}{k}.$$

Ainsi,

$$\det\Big((i \wedge j)_{1 \le i, j \le n}\Big) = \prod_{k=1}^{n} \varphi(k).$$

Problème 496–3

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que, pour tout réel x,

$$f\big(f(x)\big) + x = 2 f(x).$$

Réponses de Jean-Claude Blanchard (Brunoy), Marie-Laure Chaillout (Épinay sur Orge), Bernard Collignon (Coursan), François Couloigner (Tarbes), François Coulombeau (Riom), Raymond Heitz (Piriac), Paul Péchoux (Valdoie), Pierre Renfer (Saint-Georges d'Orques).

Cette question a suscité des réponses étonnamment variées, utilisant de la géométrie, des suites arithmétiques, de la densité, de la topologie, etc. Faute de place, je ne vais pas présenter toutes les approches possibles. Dans toute la suite, pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on définit $f^0 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ et $f^{n+1} = f \circ f^n$. Si de plus f est bijective, on note $f^{-n} = (f^{-1})^n$.

Les lecteurs commencent par montrer qu'une solution continue f de l'équation fonctionnelle est bijective. L'injectivité est aisée : si deux réels x, y vérifient $f(x) = f(y)$, alors $f(f(x)) = f(f(y))$ puis

$$x = 2f(x) - f(f(x)) = 2f(y) - f(f(y)) = y.$$

La surjectivité en découle : puisque l'application f est continue et injective sur un intervalle, elle est strictement monotone. La relation

$$\frac{1}{2}\left(f \circ f + \mathrm{id}_{\mathbb{R}}\right) = f$$

montre que f est strictement croissante. Donc f admet une limite (éventuellement infinie) en $+\infty$, et aussi en $-\infty$. Mais aucune de ces limites ne peut être finie : par exemple, si

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} l < +\infty,$$

alors

$$x = 2f(x) - f\left(f(x)\right) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 2l - f(l),$$

ce qui est absurde. Ainsi, f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

L'équation fonctionnelle peut alors s'écrire (en testant en $f^{-1}(x)$) sous la forme suivante :

$$f + f^{-1} = 2\mathrm{id}_{\mathbb{R}}, \qquad (2)$$

relation symétrique montrant que f^{-1} vérifie aussi l'équation fonctionnelle.

Reprenons l'équation fonctionnelle, modifiée ainsi :

$$f^2 - f = f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}}.$$

En composant (à droite !) par f^k pour $k \in \mathbb{Z}$, on obtient

$$f^{k+2} - f^{k+1} = f^{k+1} - f^k.$$

Donc, pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$f^{k+1} - f^k = f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}}.$$

En prenant un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et en sommant pour $k \in [[0, n-1]]$, on obtient

$$f^n - \mathrm{id}_{\mathbb{R}} = n(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}}).$$

Appliquée à f^{-1}, on obtient

$$f^{-n} - \mathrm{id}_{\mathbb{R}} = n(f^{-1} - \mathrm{id}_{\mathbb{R}})$$

Mais, d'après (2), $f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}} - f^{-1}$, donc

$$f^{-n} - \mathrm{id}_{\mathbb{R}} = -n(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}}).$$

Ainsi,

$$f^{n} - \mathrm{id}_{\mathbb{R}} = n(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}}) \quad (n \in \mathbb{Z}). \tag{3}$$

François Coulombeau conclut alors très vite : il note $h = f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, l'application f^n est croissante (puisque f l'est). Prenons deux réels $x < y$. Alors

$$0 \leq f^n(y) - f^n(x) = y - x + n(h(y) - h(x)).$$

Pour $n > 0$, cela impose

$$-\frac{y-x}{n} \leq h(y) - h(x),$$

et, en faisant tendre n vers $+\infty$,

$$0 \leq h(y) - h(x).$$

Mais pour $n < 0$, cela impose

$$-\frac{y-x}{n} \geq h(y) - h(x),$$

et, en faisant tendre n vers $-\infty$,

$$0 \geq h(y) - h(x).$$

Finalement, l'application $h = f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ est constante, ce qui signifie que f est une translation. Réciproquement, il est clair que les translations conviennent.

Marie-Laure Chaillout fixe deux réels $x \neq y$ et introduit, pour $n \in \mathbb{N}$, les taux d'accroissement

$$t_n = \frac{f^{n+1}(x) - f^{n+1}(y)}{f^n(x) - f^n(y)}$$

Ces expressions sont bien définies (par injectivité de f) et toutes strictement positives (par croissance stricte de f). L'équation fonctionnelle

$$f^2 = 2f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$$

donne alors la relation

$$t_{n+1} = 2 - \frac{1}{t_n}, \tag{4}$$

soit encore

$$t_{n+1} - t_n = -\left(t_n - 2 + \frac{1}{t_n}\right) = -\frac{(t_n - 1)^2}{t_n} \leq 0. \tag{5}$$

La suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, minorée par 0 et décroissante, converge. La relation (5) montre que la limite est 1. Puisque la suite décroît,

$$t_1 \geq 1,$$

c'est-à-dire que

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \geq 1.$$

Mais puisque f^{-1} vérifie également la même équation fonctionnelle, pour deux réels $a \neq b$, on a

$$\frac{f^{-1}(a)-f^{-1}(b)}{a-b} \geq 1$$

En testant en $a = f(x)$ et $b = f(y)$, on obtient

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq 1.$$

Finalement, pour $x \neq y$,

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = 1.$$

ce qui prouve également que la fonction f est une translation.

Jean-Claude Blanchard, **François Couloigner** et **Paul Péchoux** modifient l'équation fonctionnelle ainsi :

$$f(f(x)) - f(x) = f(x) - x.$$

En posant encore $h = f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$, on obtient

$$h(f(x)) = h(x),$$

soit encore

$$h(x + h(x)) = h(x).$$

En itérant le processus, une récurrence donne

$$h(x) = h(x + nh(x)) \qquad (x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}). \tag{6}$$

On va voir que h est alors monotone puis constante, ce qui conclura. Si h n'est pas monotone, l'ensemble

$$\Omega = \left\{ \frac{h(x)-h(y)}{x-y} \middle| x \neq y \right\}$$

est un intervalle (par continuité de l'application $(x,y) \mapsto \dfrac{h(x)-h(y)}{x-y}$ sur le convexe $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x > y\}$), contenant des valeurs strictement négatives (puisque h n'est pas croissante) et des valeurs strictement positives (puisque h n'est pas décroissante).

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ assez grand, $-\frac{1}{n}$ est dans Ω : il existe $x \neq y$ tels que

$$\frac{h(x)-h(y)}{x-y} = -\frac{1}{n}$$

donc

$$x + nh(x) = y + nh(y).$$

Or ceci est impossible, puisque

$$h(x) = h(x + nh(x)) = h(y + nh(y)) = h(y),$$

alors que x et y sont différents. Ainsi, h est monotone, donc admet des limites (éventuellement infinies mais l'on va voir que non) en $+\infty$ (disons A) et en $-\infty$ (disons B). Pour tout réel x tel que $h(x) \neq 0$, on peut faire tendre n vers $+\infty$ dans la relation

$$h(x) = h(x + nh(x)),$$

ce qui prouve que A et B sont finis et, selon le signe de $h(x)$, on obtient la relation $h(x) = h(\mathrm{A})$ ou $h(x) = h(\mathrm{B})$. La fonction continue h prend au plus trois valeurs, donc est bien constante.

L'argument précédent est dû à **Jean-Claude Blanchard**. **François Couloigner** utilise la densité dans $\mathbb{R}$ de $\mathrm{N}h(x) - \mathrm{N}h(y)$ lorsque $h(x)$ et $h(y)$ sont incommensurables, tandis que **Paul Péchoux** utilise le résultat suivant : si u et u' sont deux suites arithmétiques, de raison r, r' avec $0 < r' < r$, on peut trouver deux termes consécutifs de u' compris entre deux termes consécutifs de u. Cette idée est finalement très proche de l'approche géométrique retenue par **Pierre Renfer** qui utilise l'invariance du graphe de f par la transvection $(x,y) \mapsto (y,-x+2y)$ et qui itère ce phénomène pour aboutir à une contradiction si le graphe de f n'est pas une droite.

Pierre Renfer signale que sans l'hypothèse de continuité, il existe d'autres solutions. Il donne l'exemple de l'application qui laisse fixes les irrationnels et transforme tout rationnel r en $r + 1$.

Marie-Laure Chaillout signale que l'équation fonctionnelle plus générale

$$af(f(x)) + bf(x) + cx = 0$$

a fait l'objet d'une étude dans le Journal de la Société des Agrégés.

Pour une très belle étude du cas général, je renvoie à l'article de **Hervé Pépin** dans le numéro 2008-1 de la RMS, pages 92 à 100.