Exercices de ci, de là

Cette rubrique est faite à partir des propositions de collègues. Elle accueille bien volontiers des exercices même « modestes » mais un peu curieux imaginés ou rencontrés par les collègues soit dans des livres, soit dans des situations exploitées dans leurs classes. N'hésitez donc pas à nous envoyer les exercices piochés « de-ci de-là » qui vous ont plu ou vous ont intrigués. Nous les accepterons avec plaisir et en particulier ceux qui pourraient être mis à la portée d'élèves du secondaire.

Les propositions d'exercices ou les solutions sont à envoyer par mél à :

bruno.alaplantive@free.fr

ou par courrier à :

Jean Fromentin
17 rue de la Roussille
79000 NIORT

Pour l'envoi des propositions et des solutions, privilégiez, si possible, le courrier électronique. Si vous le pouvez, joignez à votre fichier initial une copie au format PDF pour contrôler en particulier les formules qui sont souvent perturbées d'un logiciel à l'autre. Vous faciliterez ainsi notre tâche. Merci d'avance.

Exercices

Exercice 503-1 Daniel Reisz-Auxerre

$2^{\left[(5/2)^{2/5}\right]}$ n'est certes pas égal à e, mais … il s'en faut de moins d'un cent millième comme le montre le logiciel Maxima :

```
(%i1) bfloat(exp(1)-(2^((5/2)^(2/5))));
(%o1) -9.16653390170552b-6
```

Est-ce là pur hasard ou y a-t-il une explication ?.

Exercice 503-2 *proposé par l'équipeMayhem de la revue canadienne Crux Mathematicarum*

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal, on considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des points de coordonnées $(x\,;\,y)$ qui vérifient

$$x^2 + y^2 - 22x - 4y + 100 = 0.$$

Soit P un point de $\mathcal{E}$ pour lequel le rapport $\dfrac{y}{x}$ est le plus grand.

Montrer l'unicité de P et déterminer sa distance à l'origine.

Exercice 503-3 Jean Théocliste – Valence *à proposer à nos élèves*

A.
```
(%i1) A=2*(cos(x)^6+sin(x)^6)-3*(cos(x)^4+sin(x)^4);
(%o1) A=2(sin(x)^6+cos(x)^6)-3(sin(x)^4+cos(x)^4)
(%i2) trigsimp(%);
(%o2) A=-1
```
Prouver de deux façons le résultat ci-dessus, obtenu à l'aide d'un logiciel de calcul formel, dans lequel x désigne un réel quelconque :

1) En considérant la fonction $f : x \mapsto 2\left((\cos x)^6 + (\sin x)^6\right) - 3\left((\cos x)^4 + (\sin x)^4\right)$ définie pour tout réel x.

2) Par un autre moyen.

B. Divergence de la série harmonique

Montrer que pour tout entier naturel n ($n \geq 2$), on a

$$\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}>\frac{3}{n}.$$

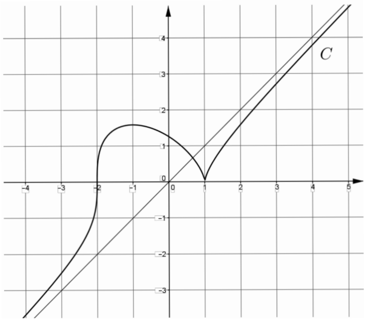
Une preuve de la divergence de la série harmonique commence par

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\ldots$$
$$=1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}\right)+\ldots$$

etc. Terminer la démonstration.

Exercice 503-4 Paul Aubert – Paris

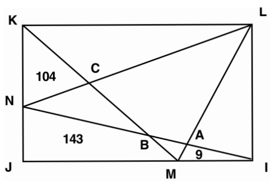
Sur la figure ci-contre, C est la courbe représentative d'une fonction définie par une seule et même formule sur tout l'ensemble $\mathbb{R}$. On peut tenir pour exacts les renseignements que l'on peut lire sur le graphique.
Trouver l'expression de la fonction.



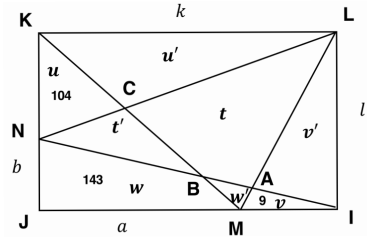
Solutions

Exercice 501-1 Michel Lafond – Dijon

Le rectangle IJKL est partagé en huit domaines (voir figure approximative ci-contre).
On connaît : aire (CNK) = 104, aire (AMI) = 9 et aire (BMJN) = 143.
Déterminer les aires des cinq autres domaines.



Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Michel Lafond (Dijon), Marie-Nicole Gras(Bourg d'Oisans)



Voici la solution de Marie-Nicole Gras.

On pose $k = \mathrm{JL}$, $a = \mathrm{JM}$ et $b = \mathrm{JN}$. On se place dans le repère $\left(\mathrm{J}, \overrightarrow{\mathrm{JI}}, \overrightarrow{\mathrm{JK}}\right)$.

On a alors les équations de droites suivantes :

$$(\mathrm{NI}) : bx + ky = bk \ ; \ (\mathrm{NL}) : -(l-b)x + ky = bk;$$
$$(\mathrm{MK}) : lx + ay = al \ ; \ (\mathrm{ML}) : lx - (k-a)y = al.$$

On en déduit les expressions des coordonnées de A, B et C et en fonction de a, b, k et l :

$$\mathrm{A}\left(\frac{k(al+bk-ab)}{kl-ab+bk};\frac{bl(k-a)}{kl-ab+bk}\right) \ ; \ \mathrm{B}\left(\frac{ak(l-b)}{kl-ab};\frac{bl(k-a)}{kl-ab}\right);$$
$$\mathrm{C}\left(\frac{ak(l-b)}{kl-ab+al};\frac{l(al+bk-ab)}{kl-ab+al}\right).$$

Pour les aires des triangles, on a :

$$\mathrm{Aire}(\mathrm{CNK}) = u = \frac{1}{2}(l-b)x_{\mathrm{C}} = 104 \ ; \ \mathrm{Aire}(\mathrm{CKL}) = u' = \frac{1}{2}k(l-b) - u\,;$$
$$\mathrm{Aire}(\mathrm{AMI}) = v = \frac{1}{2}(k-a)y_{\mathrm{A}} = 9 \ ; \ \mathrm{Aire}(\mathrm{AIL}) = v' = \frac{1}{2}l(k-a) - v\,;$$
$$\mathrm{Aire}(\mathrm{BMJN}) = w = \frac{1}{2}(ay_{\mathrm{B}} + bx_{\mathrm{B}}) = 143 \ ; \ \mathrm{Aire}(\mathrm{ABM}) = w' = \frac{1}{2}kb - v - w\,;$$
$$\mathrm{Aire}(\mathrm{ABCL}) = t = 104 + 143 + 9 = 256 \ ; \ \mathrm{Aire}(\mathrm{BCN}) = t' = \frac{1}{2}al - u - w.$$

On en déduit le système suivant :

$$\begin{cases} 2u(kl-ab+al) = ak(l-b)^2 \\ 2v(kl-ab+bk) = bl(k-a)^2 \\ 2w(kl-ab) = ab(2kl-al-bl) \end{cases}.$$

On pose $a = \alpha k$ et $b = \beta l$ (avec α et β compris entre 0 et 1) et par substitution et comparaison on obtient :

$$\frac{kl}{2} = \frac{u(1-\alpha\beta+\alpha)}{\alpha-2\alpha\beta+\alpha\beta^2} = \frac{v(1-\alpha\beta+\beta)}{\beta-2\alpha\beta+\alpha^2\beta} = \frac{w(1-\alpha\beta)}{2\alpha\beta-\alpha^2\beta-\alpha\beta^2} = \frac{(u+v+w)(1-\alpha\beta)+u\alpha+v\beta}{\alpha+\beta-2\alpha\beta}$$

$$\frac{kl}{2} = \qquad \mathrm{E}_1 \qquad = \qquad \mathrm{E}_2 \qquad = \qquad \mathrm{E}_3 \qquad = \qquad \mathrm{E}_4$$

E_4 étant obtenue par somme des numérateurs et des dénominateurs des trois autres.

On déduit de l'égalité $E_2 = E_3$ que β est racine d'un polynôme P du second degré (après une simplification par β non nul), qui s'écrit, tous calculs faits :

$$\begin{aligned}\mathrm{P} &= v\alpha(1-\alpha)\mathrm{X}^2 \\ &\quad -\left[(v+w)\alpha^3-(3v+2w)\alpha^2+(v+w)\alpha\right]\mathrm{X}+(v+w)\alpha^2-2(v+w)\alpha+w.\end{aligned}$$

On déduit de l'égalité $E_2 = E_4$ que β est racine d'un autre polynôme Q du second degré qui s'écrit, tous calculs faits :

$$\begin{aligned}\mathrm{Q} &= \alpha(1-\alpha)\left[-(u+v+w)\alpha+u+w\right]\mathrm{X}^2 \\ &\quad -\left[u\alpha^3+(-u+2v+w)\alpha^2-(u+v+2w)\alpha+u+w\right]\mathrm{X}+v\alpha.\end{aligned}$$

En remplaçant u, v et w par leurs valeurs on obtient :

$$\mathrm{P} = 9\alpha(1-\alpha)\mathrm{X}^2-\left(152\alpha^3-313\alpha^2+152\alpha\right)\mathrm{X}+152\alpha^2-304\alpha+143.$$

$$\mathrm{Q} = \alpha(1-\alpha)(247-256\alpha)\mathrm{X}^2-\left(104\alpha^3+57\alpha^2-399\alpha+247\right)\mathrm{X}+9\alpha.$$

Ces deux polynômes du second degré admettent une racine commune β si et seulement si leur résultant R est nul. On a

$$\mathrm{R} = \alpha(1-\alpha)^4(4\alpha-3)\left(32\alpha^2-28\alpha-13\right)\left(1024\alpha^3-2432\alpha^2+1792\alpha-429\right).$$

$\alpha = \dfrac{3}{4}$ est une racine de R comprise strictement entre 0 et 1. On vérifie facilement que c'est la seule.

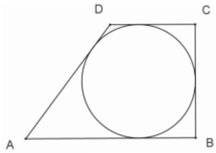
Pour $\alpha = \dfrac{3}{4}$, les calculs montrent que la seule racine commune de P et Q est $\mathrm{X} = \dfrac{1}{3} = \beta$.

On obtient finalement : $kl = 936$; $u' = 208$; $v' = 108$; $w' = 4$ et $t' = 104$.

On a donc montré que quels que soient les réels k et l tels que $kl = 936$, on doit nécessairement prendre $a = \dfrac{3}{4}k$ et $b = \dfrac{1}{3}l$; alors toutes les aires calculées gardent chacune la même valeur donnée ci-dessus, et ce sont les seules qui répondent au problème posé.

Remarque. Michel Lafond et Pierre Renfer ont tous les deux utilisé une application affine qui multiplie la largeur du rectangle par une constante k et divise la longueur du rectangle par la même constante k permettant ainsi de transformer le rectangle en un carré tout en conservant les aires.

Exercice 501-2 Daniel Reisz – Auxerre *à proposer à nos élèves*



A. Un trapèze ABCD est circonscrit à un cercle de rayon 2 cm comme le montre la figure ci-contre.
Le côté [CD] mesure 3 cm et les angles en B et C sont droits.
Calculer l'aire de ABCD.

B. Si les angles d'un triangle ABC sont en progression arithmétique et les côtés en progression géométrique, montrer qu'il est alors équilatéral.

C. Montrer que sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ on a $\sin\sqrt{x} < \sqrt{\sin x}$.

Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Jean Gounon (Chardonnay), Daniel Reisz(Auxerre).

Voici les idées directrices.

A. Jean Gounon.
On nomme O le centre du cercle, I, L et K les points de tangence du cercle avec les côtés [CD], [DA] et [AB]. On montre que les triangles IOD, DOL, LOA et AOK sont semblables. On en déduit que LA = 4 cm et que l'aire de ABCD est égale à 18 cm^2.

B. Pierre Renfer.
L'angle moyen est égal à la moyenne arithmétique des deux extrêmes, alors il vaut π/3. Le côté moyen b est égal à la moyenne géométrique des deux extrêmes b/q et bq. On utilise le théorème d'Al-Kashi et on montre que $q = 1$.

C. Daniel Reisz.

Sur $\left]1;\frac{\pi}{2}\right[$, $\sqrt{x} < x$ et sin est croissante ; alors $\sin\sqrt{x} < \sin x < \sqrt{\sin x}$..

Sur]0 ; 1[, on montre que la fonction $f : x \mapsto \sin\sqrt{x} - \sqrt{\sin x}$ est croissante avec $f(0) = 0$ (pour le signe de la dérivée, l'inégalité $x > \sin x$ est un pré requis nécessaire).

Exercice 501-3 Jean Théocliste – Valence

Calculer la valeur exacte de l'intégrale $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{(\cos x)^2 + 1}{1 - \sin x}\,\mathrm{d}x$.

Solutions : Jean Théocliste (Valence), Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Jean Gounon (Chardonnay), Michel Sarrouy (Mende).

Voici la solution de Jean Théocliste.

$$\underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{(\cos x)^2+1}{1-\sin x}\,\mathrm{d}x}_{\mathrm{I}} = \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{1-(\sin x)^2}{1-\sin x}\,\mathrm{d}x}_{\mathrm{I}_1} + \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{1}{1-\sin x}\,\mathrm{d}x}_{\mathrm{I}_2}$$

$$\mathrm{I}_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{1-(\sin x)^2}{1-\sin x}\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}(1+\sin x)\,\mathrm{d}x = [x-\cos x]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} = -1+\frac{\pi}{2}.$$

Pour le calcul de I_2 : $1-\sin x = \left(\cos\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\sin\frac{x}{2}\right)^2 - 2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} = \left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)^2$.

Or $\cos a - \sin a = \sqrt{2}\cos\left(a+\frac{\pi}{4}\right)$, alors

$$\mathrm{I}_2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{1}{2\left(\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)^2}\,\mathrm{d}x = \left[\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} = 1-0 = 1.$$

Finalement, en ajoutant les deux résultats, on obtient :

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{(\cos x)^2+1}{1-\sin x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

Remarque. Jean Gounon considère la fonction F définie sur $\left]-\frac{\pi}{2},0\right[$ par

$$\mathrm{F}(u) = \int_{u}^{0}\frac{(\cos x)^2+1}{1-\sin x}\,\mathrm{d}x.$$

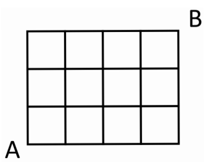
L'intégrale demandée est égale à $\lim\limits_{u\to-\frac{\pi}{2}}\mathrm{F}(u)$ ...

Quarte du pied, escarmouche, coupe, feinte... ?

Hé ! là donc : multiplication par la quantité conjuguée, primitive sans problème, puis limite en $-\frac{\pi}{2}\ldots$

Je quarte du pied, j'escarmouche,
je coupe, je feinte...
Hé ! là donc
À la fin de l'envoi, je touche

Exercice 501-4 *pioché dans les 36èmes olympiades mathématiques espagnoles*

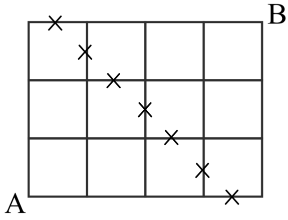


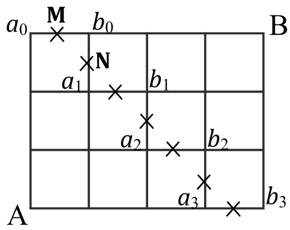
Sur le réseau quadrillé ci-contre formé de 12 carrés, une personne P se déplace de A à B ; une personne Q, de B à A.

Elles partent au même instant et vont à la même vitesse en suivant un trajet le plus court possible. À chaque intersection elles choisissent entre les chemins possibles avec une même probabilité.
Quelle est la probabilité que P et Q se croisent en chemin ?

Solution : Michel Lafond (Dijon).

Les 2 personnes ont la même vitesse. Donc si elles se rencontrent, c'est à mi-chemin. Comme le trajet est de 7 unités, la rencontre a lieu à 3,5 unités de A ou B, soit en un des 7 points cochés ci-dessous :





Une demi-unité avant la rencontre, P se trouve en l'un des quatre points a_k et Q se trouve en l'un des quatre points b_k.

Les couples favorables sont (a_0, b_0) , (a_1, b_0), (a_1, b_1), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_2), (a_3, b_3).

La probabilité que P se trouve en a_k est $\frac{1}{8}\mathrm{C}_3^k$ (idem pour Q).

Donc la probabilité qu'il y ait rencontre en M est le produit de : $\frac{1}{8}$ (P se trouve en a_0), $\frac{1}{8}$ (Q se trouve en b_0), $\frac{1}{2}$ (Q se dirige vers M), soit $\frac{1}{128}$.

La probabilité qu'il y ait rencontre en N est le produit de : $\frac{3}{8}$ (P se trouve en a_1), $\frac{1}{8}$ (Q se trouve en b_0), $\frac{1}{2}$ (P se dirige vers N), $\frac{1}{2}$ (Q se dirige vers M), soit $\frac{3}{256}$.

On procède de même pour les autres points et cela donne une probabilité de rencontre de :

$$\frac{1}{128}+\frac{3}{256}+\frac{9}{256}+\frac{9}{256}+\frac{9}{256}+\frac{3}{256}+\frac{1}{128}=\frac{37}{256}.$$

Remarque : Si on note P_n la probabilité dans les mêmes conditions que dans l'exercice, mais avec un carré de $n \times n$ carreaux, alors $\mathrm{P}_n = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\mathrm{C}_n^k}{2^n}\right)^2 = \frac{1}{2^{2n}}\mathrm{C}_{2n}^n$, équivalent à $\frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ si n est grand, d'après la formule de Stirling.