La meilleure et la pire des erreurs de Poincaré

Compte-rendu de la conférence de Cédric Villani à l'ouverture des Journées de Metz, rédigé par Catherine Combelles.

Ce texte a été revu par Cédric Villani et nous l'en remercions.

Une question que l'on pose souvent à un mathématicien est : « À quoi servent les mathématiques ? ». Il y a deux réponses possibles :
Ou bien vous expliquez que les mathématiques sont utiles à décrire le monde, à comprendre le monde, à agir sur le monde : sans mathématiques, pas d'ordinateur, pas de GPS, pas de prévision météorologique, pas de transport en commun. Mais on vous rétorquera aussitôt : « Non, l'important, c'est que les mathématiques sont belles, et élèvent l'esprit».
Ou bien, vous expliquez que les mathématiques sont une activité culturelle proche de l'art, mais il y aura alors toujours quelqu'un pour répondre: « non, l'important, c'est que les mathématiques sont utiles, et que sans mathématiques, il n'y aurait rien… ».
Les mathématiques, c'est donc tout cela à la fois, et ce n'est pas si facile à faire sentir.
Une façon d'expliquer ce que sont les mathématiques, aux jeunes en particulier, c'est de se placer sur un plan historique, comme je vais le faire aujourd'hui.
Je voudrais vous montrer, en parlant d'un mathématicien en particulier, les différentes facettes des sciences mathématiques. Ce mathématicien, ce sera Henri Poincaré, en cette année centenaire de sa mort, d'autant que moi qui dirige l'Institut Henri Poincaré, j'ai pour lui une affection particulière.

Poincaré connaissait toutes les branches de la mathématique et les faisait avancer, il connaissait toutes les branches de la physique et a enseigné à la Sorbonne toute la physique de son temps, il était ingénieur, il est considéré dans beaucoup de pays comme un des philosophes des sciences les plus importants du vingtième siècle, il était membre à la fois de l'Académie des sciences et de l'Académie française, bref, c'était un homme universel. Mais je vais éviter de me lancer dans un panégyrique et vais en parler de façon un peu impertinente en insistant sur ses erreurs, qui vont se révéler très intéressantes.

Poincaré a réfléchi à la sociologie du métier de mathématicien. Il a essayé de faire partager au grand public ce qu'est la recherche en mathématique à travers des ouvrages qui ont eu un grand succès. C'est un de ceux qui ont le plus pensé à la pensée. « *La pensée n'est qu'un éclair au milieu d'une longue nuit. Mais c'est cet éclair qui est tout.* » a-t-il écrit pour conclure *la Valeur de la Science*. Parlons avec lui de la pensée.

Commençons par une biographie sommaire de Jules Henri Poincaré : né en 1854 à Nancy, il connaît dans sa jeunesse l'occupation allemande de 1870. Il en gardera un traumatisme toute sa vie, mais aussi une familiarité avec la langue et la culture

allemande. Et, sa vie durant, il sera en compétition ou en collaboration avec des mathématiciens allemands, la France et l'Allemagne étant à cette époque les deux pays les plus en pointe en mathématiques.
En 1873, Poincaré entre à l'École Polytechnique puis à l'École des Mines et il en sort six ans plus tard avec le titre d'ingénieur des Mines. Il est aussi docteur, et toute sa vie, il va garder la double casquette d'universitaire et d'ingénieur, alors même que c'était interdit. Il devient d'abord assistant professeur à Caen, et deux ans plus tard, grande année dans sa vie, il devient professeur à la Sorbonne, il se marie, et il obtient les premiers grands résultats qui le font connaître sur le plan international. En 1887, il se fait connaître aussi du grand public, en obtenant le prix du roi Oscar II de Suède, dont nous allons reparler. Poincaré sera si connu qu'on a pu écrire un livre, publié à l'été 2012, à partir seulement de ce qui s'est dit de lui dans les journaux.
Il se retrouve mêlé à un débat public houleux en 1899 puis en 1904 quand il devient expert au procès de Alfred Dreyfus : c'est lui qui est envoyé par ses collègues pour démonter les arguments pseudo-mathématiques qui avaient été utilisés pour accabler Dreyfus : un célèbre spécialiste de criminologie tentait de convaincre le jury que Dreyfus avait plagié sa propre écriture. Il se basait sur un savant calcul de probabilité mais Poincaré montra que ses prétendus arguments mathématiques n'avaient aucune valeur.
À partir de 1901, ce sont ses ouvrages qui le rendent célèbre auprès du grand public : il y parle de science en des termes simples et profonds, accessibles à tous. Ce sont *la Science et l'Hypothèse* en 1902, *la Valeur de la Science*, en 1905, et *Science et Méthode*, en 1908.
En 1910, un médecin, le docteur Toulouse, qui enquête sur « la supériorité intellectuelle », l'examine et lui fait subir de nombreux tests, sans trouver rien de particulier : il semble bien que l'inventivité humaine soit insaisissable !
Poincaré meurt en 1912.

Si on examine une carte des lieux où Poincaré a vécu, on constate que ce n'est pas un grand voyageur. Il n'est pas très sportif, il n'est pas très mince, il est plutôt myope ; politiquement, il est un conservateur prudent, rien qui fasse rêver a priori ! Et pourtant, Poincaré fait rêver ses contemporains : pour la seule puissance de son cerveau, il est connu de tous, c'est un héros national et sa mort fait les gros titres des journaux : « la France a perdu son plus grand savant ».

De nos jours, on entend souvent confondre Henri Poincaré avec son cousin Raymond, qui lui, ne fut que président de la République. Les historiens ne sont pas tous d'accord sur le rôle de Raymond Poincaré dans le déclenchement de la première guerre mondiale : a-t-il été un modérateur ou au contraire a-t-il attisé le feu entre la France et l'Allemagne ? Dépassé par les événements, il dut finalement appeler au pouvoir son pire ennemi, Georges Clemenceau. Voici, raconte-t-on, ce que disait de lui Clemenceau, citation peut-être apocryphe, mais bien dans le style du personnage : «Dans la famille Poincaré il y avait beaucoup d'intelligence mais c'est Henri qui a tout pris ».

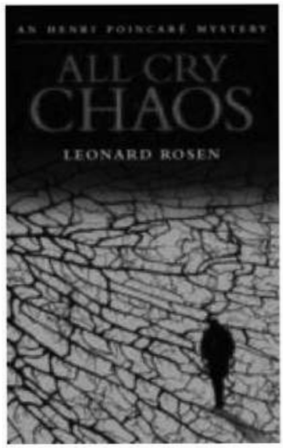
Cent ans après sa mort, qu'évoque pour nous le nom de Poincaré ?

Tout d'abord, l'Institut qui porte son nom : l'institut Henri Poincaré a été fondé peu après la première guerre mondiale. La science française était en ruine, et, en cette période de reconstruction, il fallait fonder des institutions qui rassemblent les gens, qui permettent de relancer les échanges et de faire revenir les scientifiques de l'étranger. La solution trouvée pour les mathématiques, solution intelligente, fut de construire une maison qui servirait de plaque tournante pour des échanges internationaux. Einstein en fut le premier invité de marque et y donna une série de cours, et après lui tous les grands noms de la physique théorique et des mathématiques de l'époque s'y sont succédé, pour donner des cours, discuter, échanger.

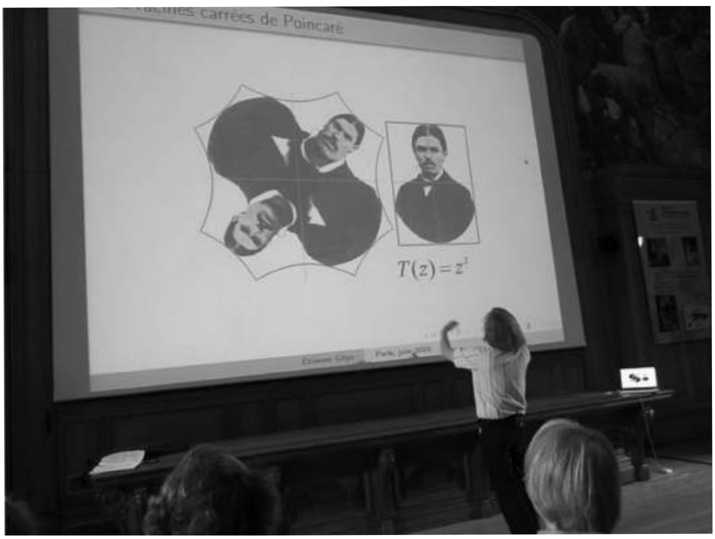
L'Institut Henri Poincaré est passé par la suite par des hauts et des bas. Il a été pendant des décennies le centre où étaient formés les mathématiciens à Paris, il a été abandonné quand l'université de Paris a éclaté après mai 68 puis a été réinvesti par les mathématiciens au début des années 90 et aujourd'hui, il est à nouveau actif. J'en suis le directeur depuis un peu plus de trois ans, le quatrième directeur depuis sa refondation. Il fonctionne selon les mêmes principes qu'à sa fondation, principes un peu radicalisés en prenant exemple sur un institut américain du même genre, le Mathematical Sciences Research Institute de Berkeley : il n'y a pas de chercheurs permanents à l'Institut Henri Poincaré, mais seulement des chercheurs invités. Il y en a plusieurs centaines par an, de l'ordre de 500, venus de tous les continents et de toutes sensibilités mathématiques. Ils y passent des périodes d'une semaine à trois mois, pour des trimestres thématiques, pour des conférences ou pour des colloques, pour discuter de thèmes d'intérêts communs, avec l'idée que si l'on met les gens ensemble, il en sort forcément de bonnes idées. L'Institut a été financé au départ par du mécénat principalement américain, à l'aide de fonds Rockefeller, couplé à des fonds Rothschild français. On y a célébré en 2011 le bicentenaire de la naissance d'Évariste Galois, l'autre grand monstre sacré des mathématiques françaises.

Henri Poincaré est aussi le nom d'un prix, attribué tous les trois ans au congrès international de physique mathématique. Ce prix, certainement le plus prestigieux donné en physique mathématique, est attribué aussi bien à des seniors confirmés quasiment légendaires qu'à des juniors extrêmement prometteurs déjà internationalement renommés, avec l'idée que Poincaré, avec sa double casquette de mathématicien et de physicien théoricien, était le personnage idéal pour donner son nom à un prix de physique mathématique. En 2012, il a été attribué à Freeman Dyson et Barry Simon et, pour la première fois, à des femmes : Nalini Anantharaman et Sylvia Serfaty.

Henri Poincaré est le symbole du savant, le sourcil en broussaille, qui se met à griffonner sur la nappe du restaurant quand il a une inspiration soudaine.
Sa perspicacité lui permet de résoudre toutes sortes de problèmes : il a inspiré un roman policier sorti cet été en anglais qui devrait prochainement être traduit en français, « *All cry chaos* » par Leonard Rosen, histoire policière un peu délirante où le détective est un descendant de Henri Poincaré dont les facultés extraordinaires permettent de résoudre l'affaire.



Poincaré a aussi donné son nom à une conjecture célèbre : c'est un énoncé de topologie vieux d'un siècle, sur la forme de tous les univers à trois dimensions bornés possibles. Elle a fait la une des journaux lorsque Grigori Perelman l'a démontrée il y a quelques années. Classée comme la découverte scientifique la plus importante de l'année, ce qui est rarissime en mathématiques, elle reste la découverte mathématique la plus importante du 21^{e} siècle. Nous avons célébré cet événement à l'institut Henri Poincaré, en lien avec le Clay Mathematical Institute en juin 2010, et on y a vu Étienne Ghys, lors d'une conférence grand public, montrer comment élever Henri Poincaré au carré dans le plan complexe !



« Les maths ne sont qu'une histoire de groupes » (Poincaré 1881) : conférence d'Étienne Ghys, le 7 juin 2010.

Une plaque à l'entrée de l'Institut Poincaré montre le grand homme, le regard illuminé. Son portrait est entouré des symboles de ses découvertes les plus célèbres : une représentation de la sphère de dimension trois ; une représentation du flot de Ricci qui permit à Perelman de démontrer la conjecture de Poincaré ; une représentation de l'attracteur de Lorenz, symbole du chaos ; trois sphères qui évoquent le problème des trois corps ; des variations chaotiques des excentricités des planètes du système solaire ; une représentation graphique de ce qu'on appelle les fonctions fuchsiennes, et quelques autres, une représentation de fluides, car Poincaré s'intéressait beaucoup aux problèmes mathématiques liés aux fluides. L'artiste facétieux a mis des points carrés sur les i !

Gondard (2010), bronze, 410 x 500 mm, plaque d'entrée de l'IHP

Citons quelques phrases de Poincaré, toujours bien senties, concises et souvent profondes :
« *Douter de tout ou tout croire, ce sont deux solutions également commodes qui l'une et l'autre nous dispensent de réfléchir.* » écrit-il dans « la Science et l'Hypothèse ».
Il décrit ainsi dans « la Valeur de la Science » l'idéal du chercheur : « *La recherche de la vérité doit être le but de notre activité, c'est la seule fin qui soit digne d'elle* ».
Dans le même ouvrage, il emploie une image fort utile lorsque l'on veut expliquer ce qu'est la démarche scientifique à un non-initié : « *le savant doit ordonner, on fait la science avec des faits comme une maison avec des pierres, mais une accumulation de faits n'est pas plus une science qu'un tas de pierres n'est une maison* ».
Et, parlant plus précisément des mathématiques : « *La mathématique est l'art de donner le même nom à des choses différentes* » dit-il dans « Science et Méthode ».

Poincaré est célèbre pour ce qu'il a dit de l'intuition, en particulier lorsqu'il parle non des objets mathématiques en eux-mêmes mais du processus par lequel on les découvre. « *La faculté qui nous apprend à voir, c'est l'intuition. Sans elle, le géomètre serait comme un écrivain qui serait ferré sur la grammaire, mais qui n'aurait pas d'idée.* »[1]. Pour faire passer un message relatif à sa discipline, il prend une image dans un autre domaine connu de tous.

Voici un texte de Poincaré qui décrit en détail le processus de découverte. Il s'agit d'un épisode célèbre qu'on appelle « l'épisode du marchepied », bien connu en sciences cognitives :

Il est temps de pénétrer plus avant et de voir ce qui se passe dans l'âme même du mathématicien. Pour cela, je crois que ce que j'ai de mieux à faire, c'est de rappeler des souvenirs personnels. Seulement, je vais me circonscrire et vous raconter seulement comment j'ai écrit mon premier mémoire sur les fonctions fuchsiennes. Je vous demande pardon, je vais employer quelques expressions techniques ; mais elles ne doivent pas vous effrayer, vous n'avez aucun besoin de les comprendre. Je dirai, par exemple : j'ai trouvé la démonstration de tel théorème dans telles circonstances ; ce théorème aura un nom barbare, que beaucoup d'entre vous ne connaîtront pas, mais cela n'a aucune importance ; ce qui est intéressant pour le psychologue, ce n'est pas le théorème, ce sont les circonstances.

Depuis quinze jours, je m'efforçais de démontrer qu'il ne pouvait exister aucune fonction analogue à ce que j'ai appelé depuis les fonctions fuchsiennes ; j'étais alors fort ignorant ; tous les jours, je m'asseyais à ma table de travail, j'y passais une heure ou deux, j'essayais un grand nombre de combinaisons et je n'arrivais à aucun résultat. Un soir, je pris du café noir contrairement à mon habitude ; je ne pus m'endormir ; les idées surgissaient en foule ; je les sentais comme se heurter, jusqu'à ce que deux d'entre elles s'accrochassent pour ainsi dire pour former une combinaison stable. Le matin, j'avais établi l'existence d'une classe de fonctions fuchsiennes, celles qui dérivent de la série hypergéométrique ; je n'eus plus qu'à rédiger les résultats, ce qui ne me prit que quelques heures.

Je voulus ensuite représenter ces fonctions par le quotient de deux séries ; cette idée fut parfaitement consciente et réfléchie ; l'analogie avec les fonctions elliptiques me guidait. Je me demandai quelles devaient être les propriétés de ces séries si elles existaient, et j'arrivai sans difficulté à former les séries que j'ai appelées thêta-fuchsiennes.

À ce moment, je quittai Caen, que j'habitais alors, pour prendre part à une course géologique entreprise par l'École des Mines. Les péripéties du voyage me firent oublier mes travaux mathématiques ; arrivés à Coutances, nous montâmes dans un omnibus pour je ne sais quelle promenade ; au moment où je mettais le pied sur le marchepied, l'idée me vint, sans que rien de mes pensées antérieures parût m'y avoir préparé, que les transformations dont j'avais fait usage pour définir les fonctions fuchsiennes sont identiques à celles de la géométrie non-euclidienne. Je ne fis pas la vérification ; je n'en aurais pas eu le temps, puisque, à peine assis dans l'omnibus, je repris la conversation commencée, mais j'eus tout de suite une entière certitude.

(1) Dans *Science et Méthode* (livre 2, chapitre 2).

De retour à Caen, je vérifiai le résultat à tête reposée pour l'acquit de ma conscience.
Je me mis alors à étudier des questions d'arithmétique sans grand résultat apparent et sans soupçonner que cela pût avoir le moindre rapport avec mes recherches antérieures. Dégoûté de mon insuccès, j'allai passer quelques jours au bord de la mer, et je pensai à tout autre chose. Un jour, en me promenant sur une falaise, l'idée me vint, toujours avec les mêmes caractères de brièveté, de soudaineté et de certitude immédiate, que les transformations arithmétiques des formes quadratiques ternaires indéfinies sont identiques à celles de la géométrie non euclidienne.
Étant revenu à Caen, je réfléchis sur ce résultat, et j'en tirai les conséquences ; l'exemple des formes quadratiques me montrait qu'il y a des groupes fuchsiens autres que ceux qui correspondent à la série hypergéométrique ; je vis que je pouvais leur appliquer la théorie des séries thêta-fuchsiennes et que, par conséquent, il existe des fonctions fuchsiennes autres que celles qui dérivent de la série hypergéométrique, les seules que je connusse jusqu'alors. Je me proposai naturellement de former toutes ces fonctions ; j'en fis un siège systématique et j'enlevai l'un après l'autre tous les ouvrages avancés ; il y en avait un, cependant, qui tenait encore et dont la chute devait entraîner celle du corps de place. Mais tous mes efforts ne servirent d'abord qu'à me mieux faire connaître la difficulté, ce qui était déjà quelque chose. Tout ce travail fut parfaitement conscient.
Là-dessus, je partis pour le Mont Valérien, où je devais faire mon service militaire ; j'eus donc des préoccupations très différentes. Un jour, en traversant le boulevard, la solution de la difficulté qui m'avait arrêté m'apparut tout à coup. Je ne cherchai pas à l'approfondir immédiatement, et ce fut seulement après mon service que je repris la question. J'avais tous les éléments, je n'avais qu'à les rassembler et à les ordonner. Je rédigeai donc mon mémoire définitif d'un trait et sans aucune peine. »[2]
Plusieurs points de ce texte sont remarquables et méritent commentaire.
Premier point : Poincaré n'hésite pas à employer des gros mots, comme il dit, des noms barbares et il les emploie sans donner aucune explication. À mon avis, c'est un des éléments qui ont fait le succès de ce texte. Si Poincaré avait essayé d'expliquer les concepts, même en termes extrêmement simples, il aurait perdu une partie de l'auditoire et il aurait demandé de la concentration supplémentaire au lecteur. Si le lecteur est occupé à comprendre ce que sont les séries thêta-fuchsiennes, il sera moins concentré sur le point essentiel du discours de Poincaré : les circonstances de la découverte. C'est la raison pour laquelle il ne donne aucune explication sur ce que sont les séries thêta-fuchsiennes. Et ça marche ! Sans en avoir conscience, j'ai certainement été influencé par ce procédé lorsque j'ai rédigé « Théorème vivant ». J'avais connaissance du texte de Poincaré, et j'ai de même repris les mots techniques sans explication, de sorte que le lecteur se concentre sur le reste : les circonstances.
Un autre point remarquable dans ce texte est la sérendipité, c'est-à-dire le fait d'exploiter astucieusement le hasard. Poincaré travaille sur deux problèmes qu'il pense complètement différents, d'une part les séries thêta-fuchsiennes et d'autre part,

(2) Dans Science et Méthode (chapitre 3)

des questions d'arithmétique et les deux questions n'ont a priori aucun rapport. Et puis, à travers deux illuminations successives, il comprend que ces deux problèmes sont étroitement liés ! C'est un hasard, dû au fait qu'il travaille en même temps sur des questions assez diverses. Mais quand ce hasard se présente, il est capable de l'exploiter. C'est une qualité extrêmement importante pour un chercheur.

Une autre remarque porte sur l'emploi des analogies, en particulier des analogies stratégiques. Poincaré parle de son travail comme le ferait un général d'armée : utilisant les termes de corps de place, de chute, d'assaut, d'ouvrages avancés, il est dans la métaphore guerrière. En effet, classiquement, devant un problème, vous pensez à un plan d'attaque, vous essayez d'identifier la difficulté, vous attaquez de front ou vous essayez de contourner. Ce type d'analogie reproduit assez bien son angoisse lorsqu'il travaille sur un problème.

Dernier commentaire, enfin, sur la structure même de la découverte mathématique et de la création des idées : ce que décrit Poincaré n'est pas du tout un travail acharné où l'on explore méthodiquement toutes les pistes en faisant usage de son expérience. Ce n'est pas non plus un processus où l'on attend que les idées viennent spontanément. C'est une alternance entre l'un et l'autre. On s'imprègne du problème, on identifie les difficultés, puis on change d'activité et une solution se présente, petite ou grande. Cela arrive trois fois dans le texte : trois fois, il raconte comment il se trouve bloqué, et comment la solution survient sans qu'il sache pourquoi. Ce n'est donc ni d'un travail acharné continu, ni d'une simple attente qu'émergent les idées, c'est d'une alternance de l'un et de l'autre.

Même si on n'a aucune idée de ce que sont les transformations arithmétiques des formes quadratiques ternaires indéfinies, on comprend fort bien que l'idée qui survient, lorsqu'il se promène au bord de la mer, n'a rien à voir avec la falaise en elle-même. Il pose ainsi à travers ce récit le problème des facteurs qui influent sur la capacité du cerveau à résoudre le problème. Ces facteurs peuvent être absolument sans rapport avec le problème lui-même : c'est le café, c'est la promenade, c'est la contemplation de telle ou telle œuvre d'art : on l'ignore, parce qu'on ignore comment fonctionne précisément le cerveau, et on parle d'« intuition », mot par lequel on désigne ce qui se passe lorsqu'on ne sait pas comment ça marche.

S'il y a des lycéens dans l'assistance, je conseille une application pratique du texte de Poincaré : si un soir vous êtes coincé à la maison avec un devoir de maths difficile à rendre pour le lendemain et si ce soir là, vous avez prévu une sortie entre copains, vous pouvez tenter le coup auprès de vos parents de dire que vous appliquez la méthode Poincaré, pour résoudre le problème. Ca, c'est pour ce qui est de la méthode de travail.

Mais quand vous vous trompez, vous pourrez aussi expliquer que l'exemple vient d'en haut en citant Poincaré : Poincaré parle des erreurs et je vais commencer avec cette citation qu'il ne faut pas sous-estimer :

« *Un premier fait doit nous étonner, ou plutôt devrait nous étonner, si nous n'y étions si habitués. Comment se fait-il qu'il y ait des gens qui ne comprennent pas les mathématiques ?* »[(3)]. La question semble naïve, mais le raisonnement est subtil :

(3) Dans Science et Méthode, livre 1, chapitre 3.

« *Si les mathématiques n'invoquent que les règles de la logique, celles qui sont acceptées par tous les esprits bien faits ; si leur évidence est fondée sur des principes qui sont communs à tous les hommes et que nul ne saurait nier sans être fou, comment se fait-il qu'il y ait tant de personnes qui y soient totalement réfractaires* ? »[4] Enchaîner des arguments logiques est difficile et demande des efforts, même si une démonstration mathématique est basée sur un enchaînement d'affirmations très simples. C'est si vrai qu'apprendre à enchaîner des arguments logiques est le but essentiel de l'éducation mathématique, tout le reste est accessoire. Et c'est important parce que ce n'est ni facile ni naturel. Nous ne sommes pas biologiquement faits pour enchaîner plusieurs arguments logiques. Nous sommes plutôt faits pour raisonner spontanément en termes d'émotions, en termes d'analogie, en termes de sentiments, parce que c'est extrêmement efficace pour gérer une situation de danger : la peur est beaucoup plus efficace pour échapper au danger que l'évaluation logique des pourcentages de risque ! En outre, il y a des activités que nous avons été sélectionnés biologiquement pour savoir faire : on apprend à parler sans y penser, alors que pour beaucoup, apprendre à faire un raisonnement qui se tient est un obstacle extrêmement difficile, qui demandera beaucoup plus de temps et de patience que d'apprendre à parler. Pourtant, le simple fait de parler demande d'appliquer un grand nombre de règles de grammaire qui ne sont pas moins complexes que les règles que l'on utilise dans un raisonnement mathématique. De même, nous sommes extrêmement compétents comme nos cousins les chimpanzés pour tout ce qui est de l'ordre du politique. Notre cerveau nous permet de comprendre rapidement, facilement, les arguments politiques même s'ils sont complexes. Pour les arguments mathématiques, c'est plus difficile !

Poincaré continue : « *Comment l'erreur est-elle possible en mathématiques ? Une intelligence saine ne doit pas commettre de faute de logique, et cependant il y a des esprits très fins… qui sont incapables de suivre ou de répéter sans erreur les démonstrations des mathématiques… Est-il nécessaire d'ajouter que les mathématiciens eux-mêmes ne sont pas infaillibles ?* »

On peut croire en effet que vérifier une démonstration est chose facile : il suffit simplement, après tout, d'examiner chaque argument et de le vérifier… Or, ce n'est pas si simple : pour vérifier une démonstration, il faut d'abord avoir une idée de son sens, l'avoir traduite sous forme d'un plan, d'une stratégie, et vérifier ensuite les détails. Poincaré en savait quelque chose, parce que précisément, il lui est arrivé de commettre des erreurs, il en a fait des petites et des grosses, et nous allons parler de quelques grosses erreurs de Poincaré.

Parfois, Poincaré a été accusé injustement d'avoir fait des erreurs. L'exemple le plus célèbre peut être présenté comme une erreur de communication. Voici ce qu'il écrit dans *la Valeur de la Science* : « *Il n'y a pas d'espace absolu ; ces deux propositions contradictoires : " la Terre tourne " et " la Terre ne tourne pas " ne sont donc pas cinématiquement plus vraies l'une que l'autre. Affirmer l'une, en niant l'autre, au sens cinématique, ce serait admettre l'existence de l'espace absolu.* »

On comprend bien aujourd'hui ce que veut dire Poincaré : plus d'un siècle après

(4) *ibid*.

l'invention de la relativité, on sait qu'il n'y a pas dans l'espace un référentiel unique et que le choix d'un référentiel est un choix arbitraire. Comme dit notre collègue astronome Jacques Laskar, « moi, je n'ai aucun problème à fixer la Terre au centre de mon référentiel et à dire que le Soleil tourne autour. » C'est une question de convention. Mais ce texte est destiné au grand public, et Poincaré avait mis la barre un peu haut ! La presse en fit ses gros titres : « un savant français a fait une découverte, Galilée avait tort, la Terre ne tourne pas, etc. »
Imaginons le courrier des lecteurs, les ingénieurs furieux, les jeunes filles en larmes : « Tout ce qu'on m'a appris est faux ! ». La polémique fut terrible !
Ce n'était qu'une erreur de communication ; en revanche, sur ces mêmes problèmes d'astronomie, en 1887, il fit vraiment une erreur qui allait passer à la postérité, lors d'un travail sur le problème des trois corps utilisant les équations de la dynamique.

Pour comprendre le contexte de ce problème, faisons un retour en arrière dans un des problèmes de physique mathématique les plus célèbres qui soit. Il débute par les lois de Kepler, qui décrivent au début du 17^{e} siècle, les orbites des planètes. Kepler découvre par l'observation que les orbites sont des ellipses dont le soleil est à un des foyers. Admirons ici la double nature de la mathématique : son utilité pour résoudre de manière simple un problème que l'humanité se pose depuis qu'elle sait observer les planètes, la question de leur trajectoire, et tout à la fois, la beauté de cette figure simple, l'ellipse, connue depuis l'antiquité grecque pour ses propriétés géométriques et esthétiques élémentaires.
C'est le moment, dans l'histoire de l'humanité, où on a la vision la plus pure, la plus régulière du système solaire : ce n'est pas par accident si c'est cette vision qu'on apprend encore dans les lycées, c'est à la fois beau et facile à énoncer.
La première loi dit que la trajectoire est une ellipse, la deuxième loi est la loi des aires : le mouvement des planètes n'est pas du tout à vitesse uniforme, mais c'est l'aire balayée par le segment joignant la planète au soleil qui varie uniformément. Cela implique que la planète se déplace plus vite quand elle est plus proche du Soleil. La troisième loi relie la période ou durée de l'année, au demi-grand axe de l'ellipse, qu'on peut considérer comme une valeur moyenne de la distance entre la planète et le soleil. Ces deux grandeurs sont reliées par une relation d'une magnifique simplicité : le carré de l'une est proportionnel au cube de l'autre. C'est à la fois beau et efficace !
On peut comparer dans un tableau les durées des années planétaires, exprimées en années terriennes et les demi-grands axes, exprimés en prenant celui de la Terre pour unité. Si on élève au carré les nombres d'une colonne, on retrouve les cubes des nombres de l'autre. C'est magnifique et on se dit qu'il y a vraiment un ordre dans le système solaire.
Ecoutons Voltaire commenter ces relations, car Voltaire était passionné par la science. C'est lui qui a œuvré pour que Newton soit traduit en français, et il a préfacé l'édition française des *Principia* dans une traduction française améliorée, établie par la marquise Emilie du Châtelet.
Il s'intéressait beaucoup à l'histoire des sciences, il avait même des prétentions à en faire puisqu'il a rédigé un mémoire sur la propagation du feu.

Voici ce que dit Voltaire de Kepler, pour qui il a beaucoup d'admiration :
« *Kepler, qui trouva cette proportion, était bien loin d'en trouver la raison. Moins bon philosophe qu'astronome admirable, il dit que le soleil a une âme, non pas une âme intelligente, mais une âme végétante, agissante : qu'en tournant sur lui-même il attire à soi les planètes; mais que les planètes ne tombent pas dans le soleil, parce qu'elles font une révolution sur leur axe. En faisant cette révolution, dit-il, elles présentent au soleil tantôt un côté ami, tantôt un côté ennemi : le côté ennemi est repoussé; ce qui produit le cours annuel des planètes dans les ellipses.*
Il faut avouer, pour l'humiliation de la philosophie, que c'est de ce raisonnement si peu philosophique, (traduisez “ si peu rationnel ”) *qu'il avait conclu que le soleil devait tourner sur son axe ; l'erreur le conduisit par hasard à la vérité.* »
« *Kepler ajoute* (…) *que la masse du soleil, la masse de tout l'éther, et la masse des sphères des étoiles fixes, sont parfaitement égales ; et que ce sont les trois symboles de la Très-Sainte Trinité.* »(5)

Toujours en rapport avec le thème de cette conférence, on constate ici le rôle de l'erreur : un grand scientifique peut avoir des démarches tout à fait irrationnelles.
Newton en est un autre exemple bien qu'il soit le symbole même, la figure emblématique de toute la science.
Les *Principia Mathematica* sont un ouvrage révolutionnaire dans lequel Newton développe l'idée que des équations différentielles permettent de prédire le mouvement des objets physiques qui nous entourent. Il développe le concept de force : la force gravitationnelle exercée entre deux corps est proportionnelle au produit des masses, divisé par le carré de la distance entre les deux corps.
Newton écrit les équations du système solaire, les mêmes qu'on utilise de nos jours : le produit de la masse par l'accélération est égal à la somme des forces exercées par les autres corps. Et avec cette seule loi, il parvient à retrouver les trois lois de Kepler. Voici encore la beauté et l'efficacité des mathématiques : là où Kepler avait besoin de trois lois, Newton se contente d'une seule. Il a conscience que son travail est révolutionnaire et il va attendre 1680 pour le publier, alors qu'il a découvert la force gravitationnelle vers 1665. Il traite le problème des deux corps, retrouvant l'ellipse de Kepler par un raisonnement très complexe. Il est très fier de cette découverte, et en même temps un peu effrayé, parce qu'il n'y a pas de solution explicite au problème des trois corps. En effet, puisque la gravitation est universelle, elle s'applique aussi entre les planètes, et pas seulement entre le soleil et chaque planète. Le mouvement de la Terre est influencé par Jupiter, par Mars, par Vénus, etc. Mais alors, comment faire ? Les trajectoires ne sont plus des ellipses, rien n'indique que le mouvement reste périodique, et c'en est fini de la simplicité du beau système de Kepler. En outre, aucune loi n'interdit les évènements catastrophiques et Newton comprend bien que rien n'empêche deux planètes de se heurter un jour ou l'autre.
C'est la naissance du problème de physique mathématique peut-être le plus ancien et le plus célèbre : la stabilité du système solaire. Étant données les équations mathématiques du système solaire par exemple dans le modèle newtonien, peut-on

(5) Dans *Elémens de philosophie de Newton* partie 3, chapitre 2.

assurer qu'il est stable, c'est-à-dire, va-t-il rester immuablement tel qu'on le connaît ? Ou est-ce qu'un jour une catastrophe va se produire ? Peut-être Uranus va-t-elle être éjectée, peut-être Mercure tomber dans le soleil, peut-être la Terre cogner Mars ? Que peut-on prédire ?

Quand on regarde ce problème où tous les corps interviennent en même temps, ils sont certes tous soumis à la loi de la gravitation, mais il y en a qui sont plus égaux que d'autres, au sens où ils n'ont pas tous la même masse : les petites planètes, le système intérieur, comme on dit, ressemblent à la Terre, leur masse est du même ordre de grandeur, mais si on examine une grosse planète comme Jupiter, on change tout à fait d'échelle : La Terre toute entière tiendrait dans l'ouragan qui sévit à la surface de Jupiter. Au passage, on remarque la puissance de la formule de Newton : la même loi mathématique s'applique à tous les corps, même à des corps qui sont hors de portée de notre imagination par leur taille, même si l'on parvient à concevoir ce qu'est la Terre.

Mais Jupiter soi-même est minuscule par rapport au soleil, qui pourtant n'est pas une étoile particulièrement grosse. Ainsi, les planètes ne vont pas peser lourd dans l'équation face au soleil. C'est bien pour cela que les lois de Kepler sont presque vérifiées, il y a en gros un rapport mille entre la masse du soleil et la masse totale des planètes.

Si on regarde les choses comme le système de Kepler plus une perturbation qui prend en compte l'interaction de Newton, cette petite perturbation en taille relative, qu'on va appeler epsilon comme il se doit parce qu'elle est petite, est de l'ordre d'un millième. Cette petite perturbation n'en reste pas moins un peu inquiétante et au bout de mille ans, elle devrait avoir un effet très significatif. Or pourtant, il y a mille ans, le système solaire devait être à peu près comme on le connaît. On possède des observations du système solaire assez précises sur plusieurs siècles, on peut constater qu'il n'a guère bougé. Newton imagine alors dans un texte un peu obscur que quelque chose se superpose à ses équations : « *Le sort aveugle ne pourrait jamais faire se mouvoir les Planètes toutes semblablement dans des Orbes concentriques, à quelques erreurs minimes près, qui auraient pu provenir des Actions mutuelles des Planètes l'une sur l'autre, et qui sont destinées à augmenter, jusqu'à ce que ce système ait besoin d'une reformation.* »

Ce texte n'est pas très clair, surtout si on le compare à la clarté des textes de Poincaré. L'interprétation classique qui en est faite est que Newton n'a pas suffisamment confiance dans ses équations pour décrire le système solaire : il pense qu'une main divine bienveillante vient remettre le système solaire en ordre quand il y en a besoin, soit qu'il se superpose de manière continue, soit que de temps en temps, quand le système est trop déréglé, un petit coup de baguette magique vienne remettre les astres dans le droit chemin ! Ce texte eut des répercussions littéraires puisque ce fut le début d'une controverse entre Newton et Leibnitz dans laquelle Voltaire mit aussi son grain de sel.

Un siècle plus tard, on a fait des progrès en mathématiques, et interviennent Laplace, Lagrange et Gauss. Ils développent des techniques mathématiques destinées à évaluer de manière précise l'impact des perturbations, et l'échelle de temps sur

laquelle elles vont jouer. Ce fut toute une histoire : Euler se trompa, de même que Lagrange, et Laplace fut le premier à obtenir de bons résultats. Il montra que sur une échelle de temps de l'ordre de $1/\varepsilon^2$, et non pas de $1/\varepsilon$, il y a stabilité du système marquée par l'invariance des grands axes : les distances des planètes au soleil restent à peu près inchangées sur une durée de l'ordre de $1/\varepsilon^2$.
Avec $1/\varepsilon^2$, on atteint des durées de l'ordre du million d'années et c'est la première fois dans l'histoire de l'humanité qu'on a une prédiction à long terme sur le système solaire, qui va très au delà de tout ce que l'on possède comme archives astronomiques ! La théorie se révélait meilleure que les observations : on a coutume de dire que si la théorie ne coïncide pas avec les observations, c'est la théorie qui est fausse, mais dans ce cas, c'étaient les observations qui ne collaient pas à la théorie et la théorie avait raison. En effet, on savait que Jupiter se rapprochait du soleil au cours des siècles, on avait des archives sur plusieurs siècles montrant un lent mouvement de Jupiter vers la Terre, inexorable, alors qu'au contraire Saturne s'éloignait de la Terre, de manière qui semblait tout aussi inexorable. Mais les calculs de Laplace montrèrent que Jupiter se rapproche de la Terre sur une période d'environ 900 ans, puis s'écarte sur une période d'environ 900 ans, puis se rapproche à nouveau sur 900 ans, et ainsi de suite et que globalement, le système reste stable sur une durée de l'ordre du million d'années. C'est un résultat absolument remarquable d'autant que Laplace montre que la seule loi de Newton suffit à expliquer toutes les observations astronomiques connues à l'époque : on constate ici la puissance du formalisme mathématique. C'est le début d'une doctrine importante sur le plan philosophique comme sur le plan scientifique : le déterminisme laplacien fondé sur l'idée que si l'on connaît l'état du monde à l'instant t, on peut le prédire à tous les instants qui suivront.

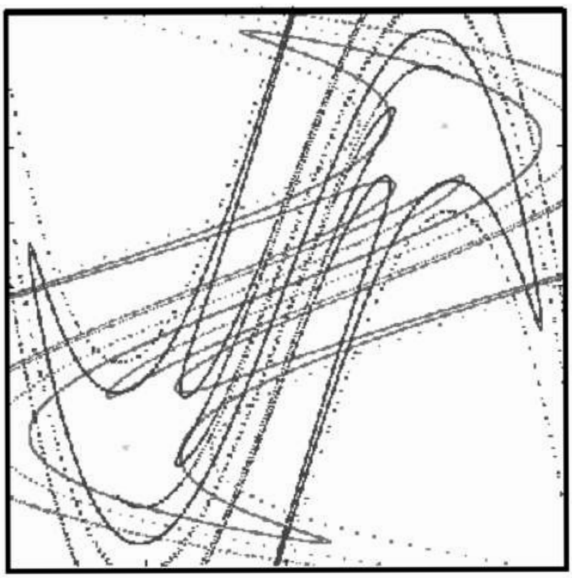
Et maintenant revenons à Poincaré ; il intervient dans cette histoire lorsqu'il relève un défi proposé dans le cadre d'un concours lancé par le roi Oscar II de Suède, à l'instigation du mathématicien suédois Mittag–Leffler : Poincaré se propose de s'attaquer au problème de la stabilité du système solaire, mais sur une échelle de temps encore plus grande : milliard d'années plutôt que million. Le problème est beaucoup plus difficile, et nécessite de nouvelles méthodes. Poincaré trouve de nouvelles méthodes et le manuscrit qu'il envoie, de façon anonyme selon la règle du concours, est truffé d'idées nouvelles. Le jury est ébloui, tout le monde reconnaît en Poincaré l'auteur du mémoire, et il gagne le prix haut la main.
Qu'a-t-il démontré ? Il a travaillé sur le problème des trois corps, un modèle réduit du système solaire : le soleil et deux planètes, dont l'une est de masse ridicule par rapport à l'autre. Poincaré parvient à montrer que le système est stable sur une très grande durée. Il gagne le prix, et le résultat est bien vulgarisé dans les journaux de l'époque, qui détaillent pourquoi c'est un indice en faveur de la stabilité du système solaire.
Mais c'est seulement le début de l'histoire : l'article est publié dans Acta Mathematica, la revue de Mittag-Leffler. Or voici que l'assistant de Mittag-Leffler chargé de la publication de l'article, le jeune mathématicien Lars Phragmen, fait remarquer avec grande déférence à Henri Poincaré que son manuscrit comporte plusieurs problèmes. Poincaré revoit et complète l'article, apporte des corrections et

renvoie une nouvelle version de son manuscrit, bien plus détaillée. Mais Poincaré y réfléchit encore, et se rend un jour compte que tout est faux, tout est complètement faux ! Il y a à la base une erreur de débutant, un problème d'intersection de courbes qui ne peuvent se couper en dimension 2 mais le pourraient très bien en dimension 3. Or il a fondé son résultat sur le fait que si les deux courbes ont un point commun, c'est qu'elles sont confondues. Il se rend compte que la question de l'intersection de ces courbes est en réalité très compliquée. Une des courbes est un comportement dans des temps très négatifs, l'autre dans des temps très positifs pour caricaturer, et ces intersections correspondent en gros à des solutions stables. Si les deux courbes sont confondues, ça veut dire que la situation est stable et la question de la stabilité dépend de ces intersections.

Lorsque Poincaré comprend son erreur, l'article a déjà été publié et envoyé partout dans le monde. Mittag-Leffler ne se démonte pas : il rapatrie tous les articles sous un prétexte futile et passe au pilon cette première édition. Poincaré règle tous les frais, ce qui lui coûtera plus cher que le montant du prix. Puis Poincaré réfléchit et en analysant son erreur, il met le doigt sur le point vraiment important : combien ces intersections homoclines sont compliquées à repérer.

« *Que l'on cherche à se représenter la figure formée par ces deux courbes et leurs intersections en nombre infini dont chacune correspond à une solution doublement asymptotique, ces intersections forment une sorte de treillis, de tissu, de réseau à mailles infiniment serrées ; chacune de ces courbes ne doit jamais se recouper elle-même, mais elle doit se replier elle-même d'une manière très complexe pour venir couper une infinité de fois toutes les mailles du réseau. On sera frappé de la complexité de cette figure, que je ne cherche même pas à tracer.* »(6)

Voici le genre de figure que l'on obtient sur un ordinateur :



(6) *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, chapitre 33.

C'est, pour la première fois, la mise en évidence de l'imprédictibilité de trajectoires déterministes due à la sensibilité aux conditions initiales, l'un des piliers de la théorie du chaos : il est très difficile de prédire le comportement du système, car cela demande l'analyse d'une infinité d'intersections extrêmement proches les unes des autres ; un tout petit changement dans les conditions initiales peut faire que l'on n'est pas sur l'intersection mais juste à côté, avec une possibilité de divergence. On appelle cela de nos jours « l'effet papillon » : dans certaines équations, une toute petite variation, comme le battement d'une aile de papillon sur l'atmosphère, peut provoquer plus tard de grands changements. On arrive à l'opposé du déterminisme laplacien : une équation déterministe pour décrire le mouvement ne suffit pas à prédire l'avenir du système si on n'est pas capable de dire exactement ce qu'est la condition initiale. Et comme, dans la pratique, on n'en sera jamais capable, on ne peut plus prédire ce qui se passe sur le long terme.

On l'oublie souvent, l'autre français à l'origine de cette connaissance de la sensibilité aux conditions initiales est Jacques Hadamard, contemporain de Poincaré.

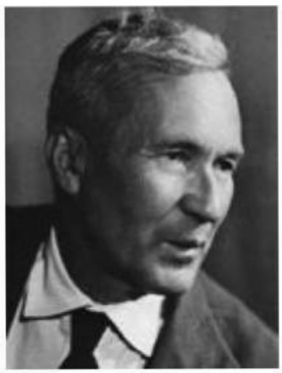
« … *On sera frappé de la complexité de cette figure, que je ne cherche même pas à tracer. Rien n'est plus propre à nous donner une idée de la complication du problème des trois corps et, en général, de tous les problèmes de dynamique où il n'y a pas d'intégrale uniforme*. » poursuit Poincaré. C'est la naissance de la théorie des systèmes dynamiques avec aussi des outils quantitatifs pour prédire ce qui va se passer mais en changeant de point de vue.

La théorie du chaos va continuer son chemin.

Le météorologiste Lorenz[7] écrit des équations donnant un modèle simplifié de l'atmosphère : il a là aussi trouvé du chaos, avec la même sensibilité aux conditions initiales, et l'impossibilité de décrire avec précision l'évolution du système. Pendant toute la première moitié du 20e siècle, le paradigme selon lequel les phénomènes qui nous entourent sont régis par le chaos va avoir un grand succès. Tout ce qui est possible va avoir lieu un jour ou l'autre mais on est incapable de prédire quand. On peut tout au plus donner la probabilité de tel ou tel comportement : c'est la fin de la stabilité.

Mais voici que dans les années 50, intervient un nouveau mathématicien extraordinaire : Kolmogorov.

1954 : c'est le centenaire de la naissance de Poincaré, c'est aussi l'année où Alan Turing se suicide. En 1954 donc, Kolmogorov démontre un nouveau théorème qui surprend tout le monde et qui laisse supposer que finalement, Poincaré s'est trompé dans son analyse du système solaire. Ce théorème, d'influence considérable, marque le début de ce qu'on appelle la théorie KAM (Kolmogorov-Arnold-



Andreï Kolmogorov (1903–1987)

(7) Edward Lorenz (1917-2008), météorologiste à l'origine de la théorie du chaos, à ne pas confondre avec le physicien Hendrik Lorentz, pionnier de la relativité.

Moser), qui mélange de manière très audacieuse les équations déterministes et les probabilités, précisément dans la façon dont on traite les conditions initiales. Kolmogorov montre que si l'on perturbe un système « complètement intégrable », par exemple le système de Kepler, et qu'on choisit une configuration initiale au hasard, alors, avec une très forte probabilité, on reste sur une trajectoire confinée, une trajectoire stable. On voit ici le rôle subtil des probabilités. On a pu penser pendant un temps que ce théorème s'appliquait au système solaire, et que Poincaré avait eu tort, mais en réalité, il va s'avérer que la perturbation est un terme beaucoup trop gros pour appliquer la théorie KAM .

Ce théorème fut pourtant une révolution ; il a changé la façon de voir aussi bien des mathématiciens que des physiciens. Il montrait pour la première fois que dans un système, tout ce qui est possible ne va pas forcément se produire. Le système peut très bien se réguler pour ne jamais atteindre des états désordonnés. C'est le début d'un champ important des mathématiques, en soi.

Parlons du rôle des probabilités, et de ce que veut dire tirer un nombre au hasard, et on va examiner le genre de problème subtil qui apparaît avec Kolmogorov, mathématicien connu par ailleurs pour son axiomatisation des probabilités.

Prenons un nombre au hasard entre 0 et 1 selon la loi uniforme. Cela signifie que la probabilité de tomber entre a et b est égale à $b - a$. La probabilité de tomber sur un nombre rationnel est bien sûr nulle. On sait que les nombres rationnels sont en quantité dénombrable alors que les irrationnels sont en quantité non dénombrable. Pourtant, les nombres rationnels sont denses. On voit ici le côté contre-intuitif des probabilités.

On sait qu'on peut approcher n'importe quel réel par des rationnels, aussi près qu'on veut. Mais il y a des nombres réels qui s'approchent mieux que d'autres par des rationnels. Pour approcher un irrationnel par des rationnels, on peut utiliser le développement décimal, mais il y a des façons de faire plus astucieuses et rapides. Et tout dépend du nombre que l'on examine : il y a des nombres faciles à approcher, et d'autres difficiles à approcher. On appelle diophantien un nombre tel que si on essaie de l'approcher par une fraction p/q, l'erreur est au minimum un multiple d'une puissance de $1/q$.

Définition : Un nombre irrationnel α est diophantien s'il existe une constante $C > 0$ et un exposant $r \geq 2$ tels que pour tout rationnel p/q ($q > 0$) on a l'inégalité

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{C}{q^r}.$$

On voit que pour un tel nombre, si l'on veut une bonne approximation, on devra prendre un très grand dénominateur. Ces nombres diophantiens sont très nombreux : ils forment un ensemble de probabilité 1, autant que les irrationnels, et ce sont eux, en un certain sens, qui sont détectés par le théorème de Kolmogorov. À un nombre diophantien correspond en un certain sens une configuration stable. À un non diophantien, correspond une configuration qui peut conduire à une explosion. Les instables sont denses, impossible de faire le tri, et il faut donc une précision infinie pour détecter les situations stables. On a tout à la fois une forte probabilité que la

situation soit stable et l'impossibilité, sauf précision infinie, de prédire la stabilité d'une situation donnée.
Examinons un petit problème proposé par Étienne Ghys, pour faire sentir ce qu'il peut y avoir comme mathématique derrière.
Considérons une fonction u, 2π-périodique et de moyenne nulle, et demandons-nous que dire des sommes $u(\alpha) + u(2\alpha) + \ldots + u(\mathrm{N}\alpha)$. Cette somme reste-t-elle bornée ? Imaginons que $u(\alpha)$ représente la perturbation dans la trajectoire d'une planète après un tour, cette somme représente la somme des perturbations après N tours. Les perturbations vont-elles s'annuler ou s'empiler ? S'il existe des résonances dans le système solaire, par exemple si 3 tours d'une planète donnée valent exactement 5 tours d'une autre, on a idée que tous les 15 tours, la perturbation va aller dans la même direction et accroître la somme.
Comment résoudre ce problème ? On développe en série trigonométrique la fonction u : $u(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} u_n \exp(2\mathrm{i}\pi n x)$.
Cette série converge-t-elle ? Ça dépend des coefficients de u, mais on va supposer que ces coefficients sont à décroissance rapide, (cela signifie précisément que pour tout entier k, il existe une constante $\mathrm{C}_k > 0$ telle que : $|u_n| < \mathrm{C}_k |n|^{-k}$) de sorte que la série converge.
On va alors essayer de résoudre une équation auxiliaire astucieuse, en écrivant u comme une différence : pour tout x, $u(x) = v(x + \alpha) - v(x)$.
Pour trouver la fonction v, on cherche son développement en série de Fourier :

$$v(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} v_n \exp(2\mathrm{i}\pi n x).$$

$$v(x+\alpha) - v(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \left(\exp(2\mathrm{i}\pi n\alpha) - 1\right) v_n \exp(2\mathrm{i}\pi n x).$$

D'où en identifiant les coefficients :

$$v_n = \frac{u_n}{\exp(2\mathrm{i}\pi n\alpha) - 1}.$$

Ces coefficients nous fournissent une fonction v … à condition que la série converge. Pour qu'elle converge, il faut déjà qu'elle soit bien définie, et donc que les dénominateurs ne soient pas nuls. Il est donc nécessaire que α ne soit pas rationnel. (Si $\alpha = \frac{p}{q}$, alors, $2\mathrm{i}\pi q\alpha = 2\mathrm{i}\pi p$ et $\exp(2\mathrm{i}\pi q\alpha) - 1 = 0$).
Mais même si α n'est pas rationnel, il ne faut pas que les dénominateurs $\exp(2\mathrm{i}\pi q\alpha) - 1$ deviennent trop petits, ce qui rendrait très grands les coefficients v_n.
On impose donc une condition diophantienne sur α : si α est diophantien, il s'approche mal par des rationnels et les dénominateurs restent suffisamment grands. Plus précisément, on montre que $\exp(2\mathrm{i}\pi q\alpha) - 1$ est minoré par l'inverse d'une puissance de n, et on en déduit que les coefficients v_n sont alors eux aussi à décroissance rapide : la série converge et la fonction v est alors bien définie.

Alors, la somme $u(\alpha) + u(2\alpha) + \ldots + u(N\alpha)$ devient une somme télescopique, les termes en v s'annulant deux à deux, sauf le premier et le dernier :

$$u(\alpha)+u(2\alpha)+\ldots+u(N\alpha)=v((N+1)\alpha)-v(\alpha).$$

Il s'ensuit que notre série reste bornée pour tout N, et le problème est résolu :
On a établi que pour tous les α diophantiens, la somme $u(\alpha) + u(2\alpha) + \ldots + u(N\alpha)$ reste bornée uniformément en N : ce petit exercice donne ainsi un aperçu des raisons pour lesquelles les nombres diophantiens sont importants et de ce qui se cache derrière ce théorème de Kolmogorov.
Ce théorème a fait sensation, on a cru que Poincaré s'était trompé, et que le système solaire était finalement stable.
Mais Jacques Laskar et quelques autres, dans les années 80, ont réhabilité la vision de Poincaré : ils se sont lancés dans la simulation numérique du système solaire sur des dizaines de millions d'années. Ce n'est pas une entreprise facile, et sans de bonnes méthodes numériques, on n'a aucune chance de réussir. Laskar a passé du temps à transformer les équations de Newton en un système simplifié comportant 150 000 termes, simplifié parce qu'il portait sur les orbites : les orbites évoluent lentement. Il a montré que le système est peu prédictible au-delà de 10 millions d'années, et tout à fait imprédictible au-delà de 60 millions d'années (article de l'été dernier.) Une conclusion de Laskar est que l'on peut très bien avoir des catastrophes : on peut en calculer la probabilité, elle est de l'ordre du pour cent sur quelques milliards d'années. On ne peut donc pas prévoir la stabilité du système solaire (Poincaré aurait été ravi !). Il y a des possibilités de collision entre Mercure et Vénus, entre Mars et la Terre, …
Laskar a montré récemment que l'effet papillon est vraiment présent dans le système solaire, et le principal facteur limitant la prédiction s'avère être dans la ceinture d'astéroïdes : le principal facteur identifié à ce jour, ce sont Cérès et Vesta, deux astéroïdes dont la masse est de l'ordre du milliardième de celle du soleil. Si l'on déplace Cérès vers Vesta de quelques centimètres à l'instant t, 60 millions d'années plus tard, il en résultera des changements importants dans la position de Vénus ou de la Terre. Impossible donc de prédire la situation du système solaire dans 60 millions d'années. Et avec des accents assez proches de ceux de Poincaré, Laskar dit que c'est effrayant, mais en même temps rassurant d'un point de vue mathématique : il est impossible de prédire l'avenir à plus de 60 millions d'années, mais on peut faire des simulations et calculer des probabilités de ce qui risque de se passer.
Remarquons que Laskar, dans cette étude, a utilisé l'ordinateur de manière importante : l'ordinateur est la technologie qui, au vingtième siècle a fait le plus vite progresser la science, et qui a évolué le plus rapidement, avec un gain d'environ mille milliards entre les premiers modèles et ceux qu'on utilise aujourd'hui. On sait que sur leur berceau se sont penchés de grands mathématiciens, comme Shannon, le père de la théorie de l'information, Von Neumann ou Alan Turing.
Revenons sur Alan Turing : il est bien connu pour ses travaux en cryptographie, qui ont permis aux Alliés de percer les codes secrets allemands pendant la seconde guerre mondiale, leur assurant un avantage considérable dans la bataille navale sous-marine.

C’est aussi le premier à avoir eu en tête le plan d’un ordinateur de manière moderne, à avoir développé les modèles théoriques mathématiques d’ordinateur, à s’être intéressé à l’intelligence artificielle, à avoir fondé la morphogénèse. Il est connu aussi pour sa fin tragique : il s’est suicidé après le traitement hormonal qu’on lui a imposé pour soi-disant « guérir » son homosexualité. C’est le moment de s’en souvenir en cette année du centenaire de sa naissance. (Pour boucler la boucle, Turing meurt l’année du centenaire de la naissance de Poincaré.) Ne manquez pas l’exposition « Poincaré-Turing », si vous passez dans la région parisienne en novembre.

Ces deux mathématiciens sont complémentaires : Turing avec l’idée qu’on peut calculer les choses de façon précise et robuste, et Poincaré qui pense qu’il faut les comprendre qualitativement. Ce sont les deux piliers sur lesquels s’est appuyé Laskar : ordinateurs d’un côté et théorie qualitative de l’autre.

Je voudrais insister sur le rôle du hasard dans la théorie du chaos, le rôle des probabilités et, quelque chose de beaucoup moins connu que la sensibilité aux conditions initiales, le fait qu’on puisse faire des prédictions statistiques.

« *C’est grâce au hasard, c’est-à-dire grâce à notre ignorance que nous pouvons conclure*. » écrit Poincaré. Ça paraît bizarre !

« *Vous me demandez de vous prédire les phénomènes qui vont se produire. Si, par malheur, je connaissais les lois de ces phénomènes, je ne pourrais y arriver que par des calculs inextricables et je devrais renoncer à vous répondre ; mais, comme j’ai la chance de les ignorer, je vais vous répondre tout de suite. Et, ce qu’il y a de plus extraordinaire, c’est que ma réponse sera juste*. » ajoute-t-il. Ça semble extravagant, mais on va comprendre : il y a des situations où l’aléatoire nous mène à une certitude. Il faut changer de point de vue. Lorenz l’avait bien compris. En même temps qu’il parlait de l’effet papillon, il pensait que si cela rendait imprédictible le fait qu’il y ait un ouragan ici ou là, en revanche, ça ne modifiait pas la fréquence d’apparition des causes.

« *J'avance l'idée qu'au fil des années les petites perturbations ne modifient pas la fréquence d'apparition des événements tels que les ouragans : la seule chose qu'ils peuvent faire, c'est de modifier l'ordre dans lequel ces événements se produisent*. » disait Lorenz.

Revenons en arrière sur cette question du hasard, des probabilités et de la statistique. La statistique est une branche des mathématiques qui s’est développé tard, et c’est normal parce que c’est compliqué, c’est même complètement contre-intuitif. Parler du hasard, c’est justement parler de ce qu’on ne peut pas prédire : il a donc fallu de gros efforts conceptuels pour prédire le hasard !

Dans les années 1700, Jacques Bernoulli pose le problème des statistiques.

Dans les années 1730, Abraham de Moivre observe la fameuse loi gaussienne. Cette loi, avec sa célèbre courbe en cloche semblable à la représentation graphique de e^{-x^2}, donne un profil universel pour décrire les fluctuations des erreurs dans de nombreux systèmes.

Un mot de Buffon et son expérience de l'aiguille. Cette question mêle géométrie et probabilité. Si on laisse tomber un grand nombre de fois une aiguille sur un parquet, et que ce dernier est composé de planches parallèles de largeur égale à la longueur de l'aiguille, Buffon nous dit que la proportion de cas où l'aiguille traverse une rainure sera environ égale à $2/\pi$, en gros 2/3 ; le nombre π est l'indice du côté géométrique du problème. C'est une histoire qui fascine beaucoup de gens, y compris en dehors du cercle des mathématiciens. Je me souviens d'un colloque multidisciplinaire où un philosophe expliquait qu'on avait ainsi pu calculer les nombreuses décimales du nombre π qui ornent une salle du Palais de la Découverte. Par politesse, j'ai évité de faire remarquer qu'il aurait fallu pour cela faire travailler la population de la Terre toute entière beaucoup plus longtemps que l'âge de l'univers. Car, si la convergence est sûre, elle est lente ! En effet, on peut aussi prédire la vitesse de convergence, à travers le théorème central-limite. Ce théorème est difficile, conceptuellement délicat, à mon avis le plus marquant de tous les théorèmes mathématiques. Il vous dit à la fois que, quand vous lancez une pièce en l'air n fois, les fluctuations sont de l'ordre de l'inverse de la racine carrée de n, et, en même temps, qu'elles adoptent un profil gaussien. Le premier à avoir apporté une démonstration correcte de cela fut Laplace. Il mit longtemps à l'établir, c'était un des théorèmes les plus difficiles de l'époque. De nos jours encore, on a trouvé des preuves plus simples, mais qui semblent toujours miraculeuses. Ce théorème garde des éléments de mystère, il illustre parfaitement la phrase de Poincaré : « *Faire des mathématiques, c'est donner le même nom à des choses différentes.* » Car cette fluctuation gaussienne se retrouve partout : fluctuation des cours d'eau, sondages politiques, taille des individus.

Ainsi, dans un sondage effectué classiquement sur 1000 personnes, une fluctuation inférieure à 3% n'est pas significative, alors que la moindre variation de 1 ou 2% est parfois commentée en détail par la presse ! J'ai tenté un article dans Le Monde mais sans succès, car les commentaires ont continué par centaines sur du simple bruit statistique. C'est certainement le plus utile de tous les théorèmes dans la vie de tous les jours, mais c'est en même temps un théorème conceptuellement délicat, à la démonstration difficile.

Quetelet, en 1846, popularise la loi des causes accidentelles. Il est le premier à appliquer ces résultats aux sciences humaines, et à faire remarquer par exemple que, lorsqu'on examine la répartition du nombre de crimes dans une ville, les fluctuations suivent une loi gaussienne. D'ailleurs, il se pose des questions sur le libre-arbitre humain en prenant conscience qu'on est capable de prédire combien de crimes vont se produire dans une ville.

Francis Galton a une jolie phrase sur cette loi tyrannique qui s'applique partout : « *Je ne connais presque rien d'aussi apte à impressionner l'imagination que la forme merveilleuse d'ordre cosmique exprimée par la loi de fréquence des erreurs. Cette loi aurait été personnifiée par les Grecs et déifiée s'ils l'avaient connue.* » Et il ajoute cette belle formule : « *C'est la loi suprême de la déraison.* »

Chaque fois qu'on a un grand nombre de phénomènes totalement imprédictibles, on est dans une bonne situation pour obtenir un résultat statistique et plus le phénomène

sera individuellement imprédictible, plus on a de chance que ça se passe bien. L'imprédictibilité chaotique d'une trajectoire donnée va de pair avec une bonne prédictibilité statistique. On peut le constater par exemple sur la question des marches aléatoires.
Prenons l'exemple du marcheur ivre, qui sort d'une soirée très arrosée. Il se dirige au hasard sur une grille, il avance pas à pas de façon aléatoire dans une des quatre directions possibles. Va-t-il retrouver sa maison qui est un point donné du quadrillage ? On peut montrer que oui, mais le temps moyen nécessaire est infini, donc je ne vous recommande pas de tenter l'expérience. En dimension 3, ça ne marcherait pas, c'est le problème du poisson ivre ; lui a seulement environ une chance sur trois d'arriver à bon port. On ne sait pas ce que sera le pas suivant du marcheur ivre, et cependant, on peut prédire statistiquement ce qui va se passer.

Ces idées difficiles ont diffusé dans le monde scientifique et en particulier en physique, pendant le deuxième tiers du 19^{e} siècle, avec Maxwell et Boltzmann, les pères de la physique statistique. C'était une véritable révolution conceptuelle, pas moins importante que celle qu'on connut par la suite avec la mécanique quantique. On a expliqué les phénomènes en partant du point de vue que l'univers est fait d'un très grand nombre de particules en appliquant les lois probabilistes. Cette avancée a mêlé les progrès de la statistique et les progrès de la physique sur un problème complexe : la question de l'irréversibilité. Pourquoi les choses vieillissent-elles, pourquoi le temps s'écoule-t-il toujours dans la même direction ? Derrière cela, apparaît l'équation de Boltzmann, équation à la fois très belle et très utile qui modélise les gaz raréfiés sous l'hypothèse du chaos moléculaire. On l'utilise en particulier en aéronautique pour modéliser un écoulement de l'air autour de l'aile d'un avion, en atmosphère raréfiée. Cette équation est obtenue en modélisant les molécules par des boules qui se cognent de façon totalement désordonnée. C'est l'hypothèse chaotique de Boltzmann. On ne cherche pas une réponse individuelle mais une réponse statistique sur la répartition des vitesses et des positions. L'équation comporte deux termes : un terme traduisant le mouvement en ligne droite des particules quand elles ne se cognent pas, en application des lois de Galilée, et un terme traduisant les modifications dues aux chocs. C'est une équation déterministe, qui permet de prédire l'évolution statistique. C'est une des équations décrivant les milieux continus qui nous entourent, qui passent d'une description microscopique du monde à une description statistique macroscopique. Pour aucune de ces équations, on n'est parvenu vraiment à nos fins mathématiquement. Les problèmes sont très difficiles, et comportent des problèmes ouverts parmi les plus célèbres quand on étudie les équations aux dérivées partielles. Ainsi, l'équation de la chaleur proposée par Fourier n'est toujours pas établie rigoureusement à partir de considérations microscopiques. C'est une pierre énorme dans le jardin de la physique mathématique.
Boltzmann fait une découverte révolutionnaire : il montre à partir de son équation que l'entropie, qui mesure le désordre, augmente de manière irréversible. C'est prédictif et c'est pratique. Prenons une boîte séparée par une cloison en deux

compartiments, mettons du gaz dans l'un des compartiments et supprimons la cloison. « La nature a horreur du vide », et on a l'impression que le vide aspire le gaz qui se répand dans la boîte toute entière. Boltzmann explique cependant que le vide n'exerce aucune force particulière, mais que le gaz va dans la configuration la plus désordonnée possible. Une analogie serait la cour d'école : les enfants d'abord sagement rangés en rang dans un coin de la cour vont se répandre partout de façon indépendante pour jouer en petits groupes à des jeux variés et vont rapidement occuper toute la cour.

La flèche du temps est la tendance universelle à aller vers l'état le plus désordonné qui soit. Cet état le plus désordonné est décrit par la fameuse courbe en cloche de la loi gaussienne.

Poincaré n'était pas convaincu par l'argumentation de Boltzmann. La théorie de Boltzmann entrait en contradiction avec un théorème de Poincaré qui permet de prouver que, dans l'expérience de la boîte, un jour viendra où le gaz tout entier reviendra dans la moitié initiale, retrouvant sa position de départ.

Boltzmann a répondu, faisant remarquer

- qu'il faut attendre de très nombreuses fois l'âge de l'univers pour y parvenir, durée de temps si grande qu'elle rend invalides les lois physiques,
- que son résultat est d'ordre probabiliste.

Il s'ensuivit une discussion assez délicate, laissant Poincaré peu convaincu : « *Le problème est tellement compliqué qu'il est impossible de le traiter avec une complète rigueur. On est obligé de faire quelques hypothèses simplificatrices. Sont-elles légitimes, sont-elles même conciliables entre elles, je ne le crois pas. Il n'est pas besoin d'un long examen pour se défier d'un raisonnement où les prémices sont en contradiction au moins apparente avec la conclusion, où l'on trouve en effet la réversibilité dans les prémices et l'irréversibilité dans la conclusion. Ainsi, on n'est pas arrivé à tourner la difficulté qui nous occupe et il est peu probable qu'on y parvienne jamais.* »(8) Mais il ne faut jamais dire « on ne pourra jamais »! Car Lanford, un siècle après Boltzmann, a démontré précisément ce que Poincaré pensait impossible : un passage rigoureux des équations microscopiques de Newton à l'équation de Boltzmann, avec un formalisme probabiliste. Si Poincaré s'était trompé, c'est que ce théorème est très subtil, il reste le théorème le plus célèbre de la physique statistique hors équilibre, même s'il n'est pas encore aussi général qu'on le voudrait. Il montre bien la coexistence entre des comportements individuels extrêmement chaotiques bien que déterministes et réversibles, et une prédiction statistique à l'échelle macroscopique établissant l'irréversibilité.

(8) *Revue de métaphysique et de morale*, année 1887, p. 537 dans « le mécanisme et l'expérience ».