Exercices de ci, de là

Cette rubrique est faite à partir des propositions de collègues. Elle accueille bien volontiers des exercices même « modestes » mais un peu curieux imaginés ou rencontrés par les collègues soit dans des livres, soit dans des situations exploitées dans leurs classes. N'hésitez donc pas à nous envoyer les exercices piochés « de-ci de-là » qui vous ont plu ou vous ont intrigués. Nous les accepterons avec plaisir et en particulier ceux qui pourraient être mis à la portée d'élèves du secondaire.

Les propositions d'exercices ou les solutions sont à envoyer par mél à :

bruno.alaplantive@free.fr

ou par courrier à :

Jean Fromentin
17 rue de la Roussille
79000 NIORT

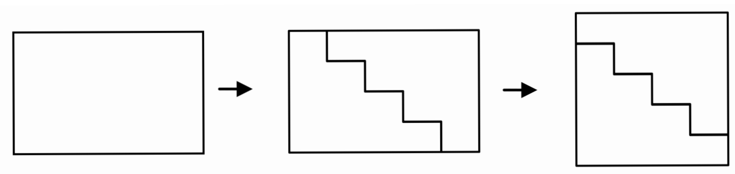
Pour l'envoi des propositions et des solutions, privilégiez, si possible, le courrier électronique. Si vous le pouvez, joignez à votre fichier initial une copie au format PDF pour contrôler en particulier les formules qui sont souvent perturbées d'un logiciel à l'autre. Vous faciliterez ainsi notre tâche. Merci d'avance.

Exercices

Exercice 502-1 à proposer à nos élèves

A. Puzzle : d'un rectangle à un carré

Le principe est celui d'un découpage en escalier comme le montre la figure ci-dessous.

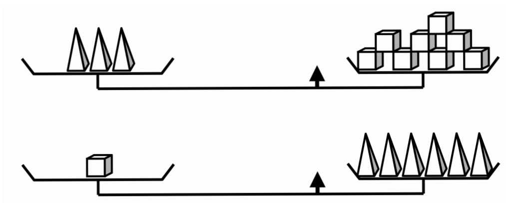


a) Découper en deux morceaux un rectangle de 16,2 cm de long sur 12,8 cm de large pour en faire un carré.
b) Indiquer comment l'on découperait un rectangle de 8192 sur 7938.

B. Balance de Rob……erval

énigme proposée par Sam Loyd

Si une pyramide pèse une livre, combien pèsent les huit cubes ?



C. Tangente *exercice proposé par Catherine Combelles*

Trouver une droite à la fois tangente à la parabole $y = x^2$ et à l'hyperbole $y = \dfrac{1}{x}$.

Exercice 502-2 Géométrie

ABCD est un carré de centre O. Sur le cercle circonscrit, M est un point de l'arc CD. Les segments [MA] et [MB] coupent le côté [CD] en E et F.
Montrer que DE · FC = 2 ([MDE] + [MCF]), où les écritures entre crochets désignent les aires.

Exercice 502-3 *tiré de la compétition mathématique suédoise* 2004-2005

Une fonction f vérifie pour tout nombre réel x, $f(x) + x\,f(1 - x) = x^2$. Déterminer la fonction f.

Exercice 502-4 *proposé par l'équipeMayhem*[1] *d'une revue canadienne*

Résoudre le système $\begin{cases} (a+b+c)d = 420 \\ (a+c+d)b = 403 \\ (a+b+d)c = 363 \\ (b+c+d)a = 228 \end{cases}$, où a, b, c et d sont quatre entiers naturels

Solutions

Exercice 500-1 On n'a pas tous les jours 100 ans *(Heu …, c'est tous les combien déjà ?)*

fig. 0

fig. 1

etc.

La figure 0 correspond à une affiche de 2010. Chaque année l'APMEP se plie en quatre pour promouvoir l'enseignement des maths. Le *pliage* est celui qui correspond aux figures successives.
Démontrer que, mathématiquement parlant, l'affiche du bicentenaire pourrait être la figure 10 ; c'est à dire que la figure 100 est identique à la figure 10.

(1) Mathematical mayhem peut se traduire par chaos mathématique.

Indication : la figure 0 et donc ses suivantes font très exactement 256×256 pixels et le logiciel utilisé « ne fait que » déplacer ceux-ci de manière analogue à chaque étape.

Solution de Michel Lafond (Dijon)

On a un carré composé de $c \times c$ cases, c étant une puissance de 2.
Chaque case est un pixel d'une image (256×256 dans l'exemple).
L'exercice propose une transformation T de l'image, pixel par pixel, avec comme référence un article de J.P. Delahaye. Il faut remonter au numéro 242 de « Pour la Science » et à l'article « Images brouillées, images retrouvées » pour comprendre de quoi il s'agit. En effet les images proposées dans la revue ne permettent pas de bien saisir le processus.
Si j'ai bien compris, la transformation T consiste en un éclatement suivi de rotations.
L'éclatement est réalisé en partageant le carré en « gros pixels » de 2×2 pixels (Voir schéma ci-dessous)
Ensuite, les rotations se font différemment selon le quadrant.

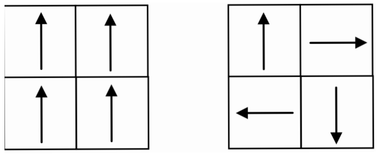
Exemple dans le cas $c = 8$:
Les indices ligne et colonne sont (0, 1, 2, …, 7).

	$jj = 0$		$jj = 1$		$jj = 2$		$jj = 3$	
$ii = 0$	**1**	**2**	3	4	5	6	7	8
	9	**10**	11	12	13	14	15	16
$ii = 1$	17	18	19	20	21	22	23	24
	25	26	27	28	29	30	31	32
$ii = 2$	33	34	35	36	37	38	39	40
	41	42	43	44	45	46	47	48
$ii = 3$	49	50	51	52	53	54	55	56
	57	58	59	60	61	62	63	64

	j=0	j=1	j=2					j=7
$i = 0$	**1**	3			**2**	4		
$i = 1$								
$i = 2$		35				36		
				55				56
	9	11			**10**	12		
		43				44		
$i = 7$				63				64

Les $c^2 = 64$ cases du carré ont été numérotées pour repérage.
Le « gros pixel » en gras dans le carré avant transformation est éclaté comme indiqué à droite.
D'une manière générale, les quatre cases du « gros pixel » (ii, jj) de gauche viennent en (ii, jj) ; $(ii, jj + c/2)$; $(ii + c/2, jj)$ et $(ii + c/2, jj + c/2)$ dans le carré de droite en gardant leur position relative.

Lorsque l'éclatement est réalisé, les quatre quadrants subissent une rotation selon le schéma ci-dessous :



Le programme MAPLE ci-dessous (pour $c = 256$) calcule pour chaque point (i, j) le nombre de transformations T à effectuer pour aboutir de nouveau au point initial.

b0:=256: b1:=b0-1: c0:=b0/2: c1:=c0-1:	b0 : côté du carré
ep:={}:	ep : ensemble des périodes
for i from 0 to b1 do for j from 0 to b1 do	balayage
p:=0: si:=i: sj:=j:	(si,sj) : sauvegarde de (i,j)
for w to 10**9 do p:=p+1:	calcul de la période p de retour du point (i,j)
ii:=floor(i/2): jj:=floor(j/2):	
ri:=i-2*ii: rj:=j-2*jj:	
if ri=0 and rj=0 then ti:=ii+c0*ri: tj:=jj+c0*rj: fi:	
if ri=0 and rj=1 then ti:=jj+c0*ri: tj:=c1-ii+c0*rj: fi:	ancien point (i,j)
if ri=1 and rj=0 then ti:=c1-jj+c0*ri: tj:=ii+c0*rj: fi:	nouveau point (ti,tj)
if ri=1 and rj=1 then ti:=c1-ii+c0*ri: tj:=c1-jj+c0*rj: fi:	
if ti=si and tj=sj then w:=1e9: fi:	c'est terminé pour (i,j)
i:=ti: j:=tj:	sinon on continue
od:	
if member(p,ep)=false then print (si,sj,p): ep:=ep union {p}: fi:	
od:od:	
print (\`ensemble des périodes\`,ep):	
0, 0, 1	Le pixel (0,0) a pour période 1
0, 1, 18	Le pixel (0,1) a pour période 18
1, 1, 9	Le pixel (1,1) a pour période 9
24, 81, 6	Le pixel (24,81) a pour période 6
73, 73, 3	Le pixel (73,73) a pour période 3
ensemble des périodes, {1, 3, 6, 9, 18}	

On constate qu'il n'y a que 5 périodes possibles selon le point initial : 1, 3, 6, 9 ou 18.
Le PPMC de ces périodes étant égal à 18, on en déduit que la figure complète sera reconstituée au bout de 18 transformations.

Puisque $100 \equiv 10 \bmod (18)$ la figure 100 est bien la même que la figure 10.

Remarque :
Dans le programme, le côté c s'appelle b0 et en le faisant varier, on constate que la période de retour de l'image avec $c = 2^k$ est égale à $2k + 2$. Ainsi pour $c = 4$, la période est 6 comme on le constate sur les schémas ci-dessous montrant les 6 transformations successives de « l'image » :

1	**2**	**3**	**4**
5	**6**	**7**	**8**
9	**10**	**11**	**12**
13	**14**	**15**	**16**

1	3	10	2
9	11	12	4
7	15	16	14
5	13	8	6

1	10	15	3
7	16	14	2
12	8	6	13
9	5	4	11

1	15	8	10
12	6	13	3
14	4	11	5
7	9	2	16

1	8	4	15
14	11	5	10
13	2	16	9
12	7	3	6

1	4	2	8
13	16	9	15
5	3	6	7
14	12	10	11

1	**2**	**3**	**4**
5	**6**	**7**	**8**
9	**10**	**11**	**12**
13	**14**	**15**	**16**

Nota.
L'image de l'affiche a été travaillée par le logiciel créé par Philippe Mathieu avec la transformation qui porte le nom de svastika. Les cas particuliers $c = 8$ et $c = 4$ détaillés par Michel Lafond sont également *disséqués* à partir d'une image en quatre couleurs sur des diaporamas disponibles sur le site de l'association.

Une autre transformation dite photomaton partage également en 4 mais sans adjoindre de rotation. En voici un exposé.

Étude de la transformation du photomaton : Jean-Raymond Delahaye (Grenoble)

1. Définition de la transformation

L'image initiale est formée de 2^{16} carrés élémentaires (pixels).

On la décompose en 2^8 groupes de 4 carrés.

Chaque groupe est « éclaté » de la façon suivante : on rassemble les carrés situés dans l'angle « supérieur gauche » de chaque groupe dans le quart « supérieur gauche » de l'image résultante en conservant leurs positions relatives. On procède de la même façon pour les trois autres carrés de chaque groupe. L'image initiale est donc transformée de façon bijective en une image de même taille composée de 4 carrés de 2^8 pixels, chacun de ces 4 carrés paraissant être une image réduite de l'image initiale, mais composés, en fait, de pixels différents. On itère ensuite cette transformation.

Cette méthode s'étend immédiatement à toute image de $2n$ lignes et $2p$ colonnes.

2 Étude dans le cas d'une image dont les nombres de lignes et de colonnes sont respectivement égaux à 2n et 2p.

Chaque carré élémentaire de l'image est alors repéré par le couple (i,j) où $0 \leq i \leq 2n - 1$ et $0 \leq j \leq 2p - 1$, le carré en haut à gauche ayant pour coordonnées $(0,0)$.
On note x_0 le numéro de colonne d'un carré élémentaire de l'image de départ et x_k le numéro de la colonne dans laquelle il se trouve après k itérations. Les numéros de

lignes sont notés de même y_0 et y_k.

– Déplacement des colonnes.
Il est clair que si $x_k = 2i + 1$, alors $x_{k+1} = n + i$ et si $x_k = 2i$ alors $x_{k+1} = i$.
On en déduit que, pour tout entier k, $2x_{k+1} \equiv x_k\ (2n - 1)$.
En combinant ces relations, on déduit que pour tout entier k, $2^k x_{k+1} \equiv x_0\ (2n - 1)$.
Le déplacement des lignes suit évidemment les mêmes règles, on retrouve donc des propriétés analogues pour les y_k.

– Condition sur k pour que l'image à l'étape k soit identique à l'image initiale.
Il est nécessaire et suffisant que toutes les colonnes et les lignes retrouvent leurs places initiales, c'est-à-dire que, pour les colonnes, pour tout x_0 de $\{0, \ldots, 2n - 1\}$, $2^k x_0 - x_0$ soit divisible par $2n - 1$.
De manière évidente, il suffit que $2k - 1$ soit divisible par $2n - 1$.
Cette condition est nécessaire, il suffit de donner à x_0 la valeur 1.
De même pour les lignes.
La condition nécessaire et suffisante pour que l'image à l'étape k soit identique à l'image initiale est donc : « $2n - 1$ et $2p - 1$ sont des diviseurs de $2^k - 1$ ».

– Cas où l'image contient 2^a lignes et 2^a colonnes.
La condition s'écrit : $2^{a+1} - 1$ est un diviseur de $2^k - 1$.
La condition est vérifiée si $2^{a+1} = 2^k$ c'est-à-dire $k = a + 1$ et c'est la plus petite valeur de k qui convient.
Dans le cas d'une image 256×256, $a = b = 8$, on retrouve donc pour la première fois l'image initiale après 9 itérations.
À noter que $k = 18$ convient aussi, puisque $2^{18} - 1 = (2^9 - 1)(2^9 + 1)$, de même tout multiple de k.

– Cas général.
Le petit théorème de Fermat dit que si d est un nombre premier et c un entier naturel non divisible par d, alors $c^{d-1} - 1$ est divisible par d.
Ici $c = 2$ et $d = 2n - 1$, on en déduit donc que $2^{(2n-1)-1}$ - 1 est divisible par $2n - 1$.
Ce qui démontre que, si $2n - 1$ et $2p - 1$ sont premiers, alors $k = 2n - 2$ convient pour les colonnes et $k = 2p - 2$ convient pour les lignes, $k = \mathrm{PPCM}(2n - 2{,}k2p - 2)$ est alors une solution.
Ce n'est cependant pas nécessairement la plus petite comme le montre le résultat dans le cas d'un image de 2^a lignes et 2^a colonnes.