

# Notions de géométrie tropicale

Jean Lefort

La géométrie tropicale a émergé dans les années 1970 à partir des travaux de Bergman sur les variétés algébriques. Le nom de « tropical » a été donné par des informaticiens français en référence au pays d'adoption d'Imre Simon (1943 - 2009), informaticien brésilien d'origine hongroise qui a beaucoup travaillé ce sujet. Depuis le début du XXI<sup>e</sup> siècle, ce domaine des mathématiques a énormément progressé, passant de l'informatique et de la logique à diverses géométries (algébrique, symplectique, ...) ainsi qu'à la combinatoire et à la théorie des graphes. Récemment la géométrie tropicale a fait son apparition en cristallographie et en biologie quantitative.

Il n'est pas fréquent de rencontrer un sujet mathématique faisant l'objet de tant de recherches actuelles et qui est accessible, au moins dans ses prémices, à un lycéen, par exemple dans un club mathématique<sup>(1)</sup>. C'est le cas de la géométrie tropicale et le texte ci-après veut en montrer les bases et son application pour les courbes algébriques planes afin de donner aux professeurs que cela intéresse les éléments essentiels permettant d'expliquer l'intérêt de cette partie des mathématiques.

## 1. Un semi-corps

Tout professeur de mathématique sait ce qu'est un corps. Comme Monsieur Jourdain ... il a utilisé un semi-corps quand il travaille dans  $\mathbb{R}^+$ . Un semi-corps est donc un ensemble  $E$  muni de deux opérations, une addition notée  $\oplus$  qui est définie interne, associative, commutative et qui possède un élément neutre,  $e$ , (il ne manque que l'existence de l'opposé pour avoir un groupe et par suite la soustraction n'existe pas) et d'une multiplication notée  $\odot$  qui donne une structure de groupe à  $E - \{e\}$  et qui est distributive par rapport à l'addition.

Le semi-corps qui intervient en géométrie tropicale se déduit de  $\mathbb{R}$  par l'adjonction de l'élément  $-\infty$ . Nous noterons  $\mathbb{T} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  et nous munirons  $\mathbb{T}$ , dit ensemble tropical, d'une addition qui n'est autre que le maximum :  $a \oplus b = \max(a, b)$  et d'une multiplication qui n'est autre que l'addition ordinaire  $a \odot b = a + b$ . Notons que si la soustraction, comme opération opposée à l'addition  $\oplus$  n'existe pas, on utilise néanmoins des nombres négatifs tel que  $(-2)$  qu'on placera systématiquement entre parenthèses pour ne pas être tenté par un signe moins.

Nous laissons au lecteur le soin de démontrer que  $(\mathbb{T}, \oplus, \odot)$  est bien un semi-corps avec  $-\infty$  comme élément neutre de l'addition et la propriété  $-\infty \odot a = -\infty$  pour tout  $a$ . De plus :

---

(\*) jlefort.apmep@wanadoo.fr

(1) En 2008-2009, des élèves de 3<sup>ème</sup> d'un collège de Gap ont travaillé sur ce thème dans le cadre de Math-en-Jeans (on notera toutefois qu'ils utilisent la notion de minimum au lieu du maximum). Voir à l'adresse :

[http://mathenjeans.free.fr/adh/articles:2009/Gap\\_2009/GeometrieTropicale\\_Gap\\_2009.pdf](http://mathenjeans.free.fr/adh/articles:2009/Gap_2009/GeometrieTropicale_Gap_2009.pdf)

- $a \oplus a = a$ , c'est-à-dire que l'addition est idempotente,
- $0 \odot a = a$  car 0 est l'élément neutre de la multiplication,
- la multiplication est commutative.

**Remarques :** Comme tout domaine de mathématiques en voie de développement, les notations ne sont pas tout à fait unifiées. Dans de très nombreux textes de référence l'addition et la multiplication sont tout simplement notées respectivement par + et par la juxtaposition. La lecture d'un tel texte demande alors une gymnastique de l'esprit peu pratique pour le néophyte. Une autre source d'ambiguïté vient du fait que dans certains textes on trouve que  $x$  signifie  $1 \odot x$  c'est-à-dire  $[1 + x]$  plutôt que  $0 \odot x = [0 + x] = x$ .

Je noterai systématiquement entre crochets la traduction dans  $\mathbb{R}$  d'une expression dans  $\mathbb{T}$ .

## 2. Polynômes tropicaux

Un polynôme tropical est tout simplement une expression de la forme

$$a_0 \oplus (a_1 \odot x) \oplus (a_2 \odot x^{\odot 2}) \oplus \dots \oplus (a_n \odot x^{\odot n})$$

avec  $a_n \neq -\infty$  et où  $\odot x^{\odot n}$  résume l'expression  $x \odot x \odot x \odot \dots \odot x$   $n$  fois, c'est-à-dire  $[nx]$  du point de vue du calcul. On dira que ce polynôme est de degré  $n$ .

### 2.1. Polynômes tropicaux de degré 1

Ce sont clairement les expressions de la forme  $y = a \oplus (b \odot x)$  c'est-à-dire  $[y = \max(a, b + x)]$ . Il est intéressant de représenter graphiquement un tel polynôme. La courbe est formée de deux demi-droites,  $y = a$  pour  $x \leq a - b$  et  $y = b + x$  pour  $x \geq a - b$ . La représentation graphique ne pose pas de problème sauf que ... dans la littérature spécialisée on n'utilise pas le repère habituel mais un repère que l'on peut qualifier d'exponentiel en ce sens que l'on place  $-\infty$  à l'origine (car  $e^{-\infty} = 0$ ) et 0 là où l'on place l'unité (car  $e^0 = 1$ ). Cette deuxième représentation permet de bien représenter l'élément  $-\infty$  de  $\mathbb{T}$ . Nous en verrons une autre raison dans le quatrième paragraphe. On trouve ci-dessous ces deux représentations pour  $y = 1 \oplus (0 \odot x)$ , c'est-à-dire  $[y = \max(1, x)]$ .

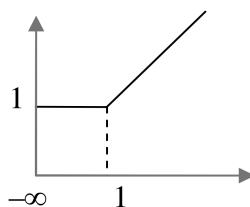
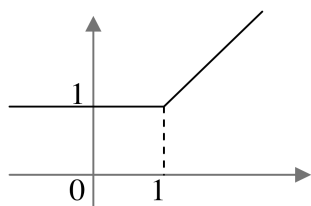


fig. 1

représentation classique de  
 $[y = \max(1, x)]$

représentation tropicale de  
 $y = 1 \oplus (0 \odot x)$

**Remarque :** Pour que le polynôme soit réellement de degré 1, il est impératif d'avoir  $b \neq -\infty$  sinon le polynôme se réduit à  $y = a$  qui lui aussi peut prendre la valeur  $-\infty$ .

**2.2. Polynômes tropicaux de degré 2**

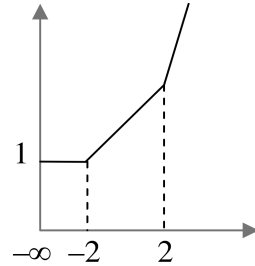
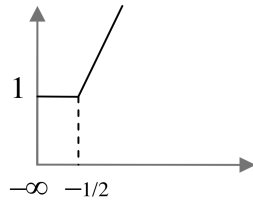


fig. 2

$$y = 1 \oplus (0 \odot x) \oplus (2 \odot x^{\odot 2})$$

$$[y = \max(1, x, 2 + 2x)]$$

$$y = 1 \oplus (3 \odot x) \oplus (1 \odot x^{\odot 2})$$

$$[y = \max(1, 3 + x, 1 + 2x)]$$

Ils sont de la forme  $y = a \oplus (b \odot x) \oplus (c \odot x^{\odot 2})$  c'est-à-dire  $[\max(a, b + x, c + 2x)]$ , avec  $c \neq -\infty$ . Pour représenter graphiquement un tel polynôme que ce soit dans un repère classique ou dans un repère tropical, on trace les trois droites  $[y = a]$ ,  $[y = b + x]$ ,  $[y = c + 2x]$  et pour chaque valeur de  $x$  on prend la plus grande valeur. Cela fait apparaître une fonction affine par morceaux comportant deux ou trois morceaux suivant la valeur relative de  $b$  par rapport à  $a$  et  $c$ . Très exactement, et le lecteur le démontrera sans peine, il n'y a que deux morceaux si et seulement si  $2b - a - c \leq 0$ . Deux exemples sont donnés en figure 2.

Remarquons qu'à chaque fois que la représentation graphique ne comporte que deux morceaux, cette représentation est susceptible de plusieurs équations. Il suffit d'y remplacer  $b$  par une autre valeur de manière à ce que la quantité  $2b - a - c$  soit toujours négative. On peut donc, dans ce cas, supprimer purement et simplement le terme en  $x$ .

**2.2.1. Factorisation :** Cherchons si nous pouvons factoriser un polynôme de degré 2. C'est un bon exercice de manipulation des opérations  $\oplus$  et  $\odot$  que de vérifier que, pour les exemples ci-dessus (fig. 2), on a :

$$y = 1 \oplus (0 \odot x) \oplus (2 \odot x^{\odot 2}) = 2 \odot (x \oplus (-1/2))^{\odot 2}$$

$$y = 1 \oplus (3 \odot x) \oplus (1 \odot x^{\odot 2}) = 1 \odot (x \oplus 2) \odot (x \oplus (-2))$$

Pour cela on se souviendra de l'idempotence de l'addition et par suite  $a \odot b \oplus a \odot b = a \odot b$  et donc  $(a \oplus b)^{\odot 2} = a^{\odot 2} \oplus a \odot b \oplus b^{\odot 2}$  et aussi que dans le premier cas il existe plusieurs équations pour la même représentation graphique.

On voit apparaître un produit (au sens de  $\odot$ ) de facteurs de la forme  $x \oplus r$  où les  $r$  correspondent aux abscisses des points anguleux de la représentation graphique. Fort de cette remarque, le lecteur pourra chercher une factorisation de  $0 \oplus (0 \odot x) \oplus ((-1) \odot x^{\odot 2})$ .

Cela ressemble beaucoup à la factorisation habituelle des polynômes avec, dans le premier cas une racine double et dans le deuxième cas deux racines simples. Il est donc tentant de dire qu'un polynôme tropical admet pour racines les abscisses des points anguleux de sa représentation graphique. Nous cèderons à la tentation et donnons la définition provisoire suivante :

**2.2.2. Racine d'un polynôme :** On appelle racine d'un polynôme tropical de degré 1 ou 2 l'abscisse des points anguleux de sa représentation graphique. Autrement dit ce sont les valeurs de la variable  $x$  en lesquels le polynôme n'est pas localement représentable par une fonction affine (puisque à droite et à gauche de ce point il ne s'agit pas de la même fonction affine). Il se peut que  $-\infty$  soit une racine : c'est le cas, par exemple, s'il n'y a pas de terme constant.

On remarque que quand il y a une racine double, c'est qu'on passe d'une fonction affine constante à une fonction affine en  $[2x]$  tandis que s'il y a des racines simples c'est qu'on passe d'une fonction affine en  $[px]$  ( $p = 0$  ou  $1$ ) à une fonction affine en  $[(p + 1)x]$ .

### 2.3. Forme générale pour un polynôme tropical

Soit  $y = a_0 \oplus (a_1 \odot x) \oplus (a_2 \odot x^{\odot 2}) \oplus \dots \oplus (a_d \odot x^{\odot d})$  un polynôme tropical, avec  $a_d \neq -\infty$ , qui peut donc s'écrire classiquement  $[y = \max(a_0, a_1 + x, a_2 + 2x, \dots, a_d + dx)]$ . On dira qu'il est de degré  $d$ .

Il est facile de voir que la représentation graphique d'un tel polynôme tropical est celle d'une fonction affine par morceaux formée d'au plus  $d + 1$  morceaux et chaque morceau a pour équation classique  $[y = a_p + px]$  où  $p$  est un naturel  $\leq d$ . D'un morceau au suivant  $p$  est croissant, ce qui donne une fonction convexe.

Pour démontrer ce résultat on note que pour  $x$  très grand négatif, le terme qui prime est  $a_0$  et que pour  $x$  très grand positif, c'est  $a_d + dx$ . Ces deux fonctions affines se croisent en  $[x = (a_0 - a_d)/d]$  et on regarde si la droite d'équation  $[y = a_{d-1} + (d - 1)x]$  passe au dessus ou au dessous de ce point de croisement. Si c'est au dessous on essaye la droite  $[y = a_{d-2} + (d - 2)x]$ , si c'est au dessus, on considère le point d'intersection de cette nouvelle droite avec  $[y = a_0]$ , c'est-à-dire le point d'abscisse  $[x = (a_0 - a_{d-1})/(d - 1)]$ , etc. Cela conduit à l'algorithme :

$$[y(x) = a_{d-1} + (d - 1)x]$$

$$[z = (a_0 - a_d)/d]$$

Si  $[y(z) - a_0 \leq 0]$  remplacer  $d$  par  $d - 1$  dans  $y(x)$  et recommencer

Si  $[y(z) - a_0 > 0]$  remplacer  $d$  par  $d - 1$  dans  $z$  et recommencer

Arrêter quand  $d = 1$ .

La représentation graphique présente au plus  $d$  points anguleux. Supposons que nous en ayons  $p$  et qu'entre deux tels points la fonction affine ait pour équation  $[y = a_i + q_i x]$ ,  $i$  variant de  $0$  à  $p$  avec  $q_i \in \mathbb{N}$  et  $q_0 = 0 < q_1 < \dots < q_i < q_{i+1} < \dots < q_p$

$= d$ . Posons  $\left[ r_i = \frac{a_{i-1} - a_i}{q_i - q_{i-1}} \right]$  pour  $i$  variant de  $1$  à  $p$ . On voit que les  $r_i$  sont tout

simplement les abscisses successives des points anguleux. Alors le polynôme tropical

peut se factoriser sous la forme :

$$a_p \odot (x \oplus r_1)^{\odot(q_1 - q_0)} \odot (x \oplus r_2)^{\odot(q_2 - q_1)} \odot (x \oplus r_3)^{\odot(q_3 - q_2)} \odot \dots \odot (x \oplus r_p)^{\odot(q_p - q_{p-1})},$$

soit  $[a_p + (q_1 - q_0) \max(x, r_1) + (q_2 - q_1) \max(x, r_2) + \dots + (q_p - q_{p-1}) \max(x, r_p)]$ .

Supposons en effet que  $r_h < x < r_{h+1}$ . Sur cet intervalle, le polynôme tropical prend la valeur :

$[a_p + q_1 x + (q_2 - q_1) x + \dots + (q_h - q_{h-1}) x + (q_{h+1} - q_h) r_{h+1} + \dots + (q_p - q_{p-1}) r_p]$ ,  
soit, après simplification,

$$[q_h x + a_h],$$

ce qui est bien la valeur attendue.

**2.3.1. Définition :** Les  $r_i = \frac{a_{i-1} - a_i}{q_i - q_{i-1}}$  sont appelés les racines du polynôme

$$y = a_0 \oplus (a_1 \odot x) \oplus (a_2 \odot x^{\odot 2}) \oplus \dots \oplus (a_d \odot x^{\odot d})$$

$$= a_p \odot (x + r_1)^{\odot q_1} \odot (x + r_2)^{\odot(q_2 - q_1)} \odot (x + r_3)^{\odot(q_3 - q_2)} \odot \dots \odot (x + r_p)^{\odot(q_p - q_{p-1})}$$

et  $q_i - q_{i-1}$  est l'ordre de multiplicité de la racine  $r_i$ .

Nous venons de démontrer le théorème suivant :

**2.3.2. Théorème :** Tout polynôme tropical de degré  $d$  admet  $d$  racines distinctes ou confondues, chaque racine étant comptée avec son ordre de multiplicité.

Autrement dit, l'ensemble tropical  $\mathbb{T}$  est algébriquement clos.

### 3. Courbes algébriques tropicales

#### 3.1. Droites tropicales

Considérons l'expression tropicale  $z = a \oplus (b \odot x) \oplus (c \odot y)$  soit  $[z = \max(a, b + x, c + y)]$ . Nous pouvons représenter graphiquement la surface  $z(x, y)$  soit de façon classique, soit de façon tropicale (voir la figure 3).

Nous voyons apparaître trois zones (suivant que le maximum est atteint par  $a$ ,  $b + x$  ou  $c + y$ ) dans chacune desquelles nous avons affaire à une fonction affine. Dans le fond nous pouvons dire que nous avons une fonction de deux variables affine par morceaux. Pour  $x \leq a - b$  et  $y \leq a - c$  alors  $z = a$ , pour  $x \geq a - b$  et  $y \leq a - c$  alors  $z = b + x$ , et enfin pour  $x \leq a - b$  et  $y \geq a - c$  alors  $z = c + y$ . Les limites de ces trois zones sont trois demi-droites, arêtes de la surface, dont les supports ont pour

équations classiques respectives :  $A_1 \begin{cases} x = a - b \\ z = a \end{cases}$ ,  $A_2 \begin{cases} y = a - c \\ z = a \end{cases}$ ,  $A_3 \begin{cases} z = b + x \\ z = c + y \end{cases}$  et dont

l'origine est le point de coordonnées  $(a - b, a - c, a)$  qui est un sommet de la surface. Sa projection sur le plan  $xy$  recevra également le nom de « sommet ».

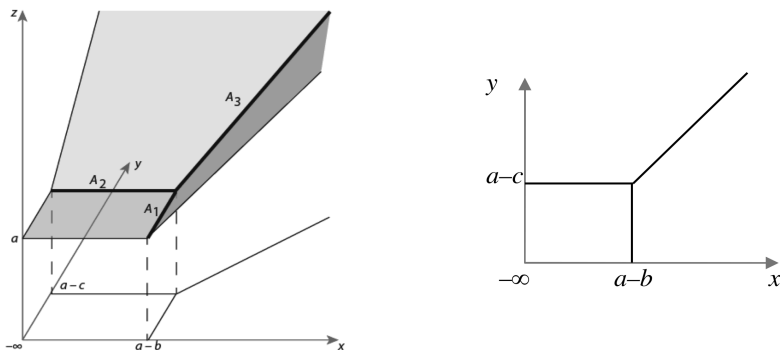


fig. 3

représentation tropicale de  
 $z = a \oplus (b \odot x) \oplus (c \odot y)$

la droite tropicale  
 $a \oplus (b \odot x) \oplus (c \odot y)$

De la même façon que les racines d'un polynôme tropical étaient les projections sur l'axe des  $x$  des points anguleux de la représentation graphique, la droite tropicale est la projection sur le plan  $xy$  des arêtes de la représentation graphique<sup>(2)</sup>. C'est ce que l'on voit sur la figure 3 et plus particulièrement sur la figure de droite qui montre qu'une droite tropicale est formée de trois demi-droites classiques, la première orientée vers l'ouest, la deuxième vers le sud et la troisième vers le nord-est. En raison de cette projection, la droite tropicale d'équation  $a \oplus (b \odot x) \oplus (c \odot y)$  et celle d'équation  $k \odot (a \oplus (b \odot x) \oplus (c \odot y))$  sont la même puisque cela revient à faire une translation de  $k$  parallèlement à l'axe des  $z$  pour la surface.

**3.1.1. Attention :** Si nous analysons plus finement ce que nous venons de faire, nous devons remarquer que l'expression  $a \oplus (b \odot x) \oplus (c \odot y)$  ne conduit pas toujours à une représentation graphique formée de trois demi-droites classiques. En effet, si par exemple le terme en  $c \odot y$  n'existe pas (ce qui revient à prendre  $c = -\infty$ ) alors la représentation graphique se limite à une droite verticale. Mais il y a pire : Considérons l'expression  $x$  comme un polynôme tropical à deux variables. Alors la représentation graphique est vide puisque la représentation graphique de la fonction  $z(x, y) = x$  ou  $[z(x, y) = \max(x)]$  ne présente aucun point anguleux. Ceci nous conduit à donner la définition suivante :

**3.1.2. Définition d'une droite tropicale :** On appelle droite tropicale, la représentation graphique d'une expression de la forme  $a \oplus (b \odot x) \oplus (c \odot y)$  où ni  $a$  ni  $b$  ni  $c$  ne valent  $-\infty$ .

On notera que deux droites tropicales se déduisent toujours l'une de l'autre par une translation.

(2) Remarquons que faute de soustraction pour l'addition tropicale il n'est pas possible de faire passer le  $y$  d'un membre dans l'autre de l'expression  $y = a \oplus b \odot x$ . Il n'y a donc pas de lien apparent entre une droite tropicale et un polynôme tropical du premier degré.

**3.1.3. Intersection de deux droites tropicales :** Nous dirons que deux droites tropicales sont en position générale si aucune ne contient un sommet de l'autre. Il est facile de voir que deux droites tropicales en position générale se coupent en un point unique.

**3.1.4. Droite tropicale passant par deux points :** Nous dirons que deux points sont en position générale si la pente de la droite qui les joint n'est ni 0, ni 1, ni l'infini. Alors par deux points en position générale il passe une droite tropicale et une seule. Nous laissons au lecteur le soin de trouver l'expression de cette droite tropicale en fonction de la position des deux points. On distingue trois cas selon que la pente de la droite qui joint ces deux points est négative, comprise entre 0 et 1 ou supérieure à 1.

### 3.2. Coniques tropicales

Intéressons-nous maintenant aux coniques tropicales qui sont évidemment représentées par des polynômes des deux variables  $x$  et  $y$  de degré 2, donc par la forme générale :

$$z(x,y) = a_0 \oplus (a_1 \odot x) \oplus (b_1 \odot y) \oplus (a_2 \odot x^{\odot 2} \oplus b_2 \odot x \odot y \oplus c_2 \odot y^{\odot 2})$$

$$= \left[ \max(a_0, a_1 + x, b_1 + y, a_2 + 2x, b_2 + x + y, c_2 + 2y) \right]$$

Comme pour les droites tropicales, nous imposerons que ni  $a_0$  ni  $a_2$  ni  $c_2$  ne valent  $-\infty$ , c'est-à-dire que les termes en  $x^{\odot 2}$  et en  $y^{\odot 2}$  apparaissent ainsi que le terme indépendant.

Il y avait trois termes pour la représentation d'une droite ce qui avait conduit à étudier trois cas et à faire apparaître trois zones. Dans le cas présent d'une conique, il y a six termes, donc a priori six zones correspondant à des faces de la surface  $z = z(x, y)$  et des segments ou demi-droites les limitant.

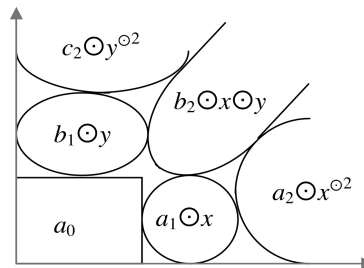


fig. 4 : zonage d'une conique tropicale

On peut positionner *a priori* les différentes faces de la surface. En effet,  $[a_2 + 2x]$  croît plus vite que  $[a_1 + x]$  qui lui-même finit par dépasser  $[a_0]$ . De même  $[c_2 + 2y]$  croît plus vite que  $[b_1 + y]$  qui lui-même finit par dépasser  $[b_0]$ . La face correspondant à  $[b_2 + x + y]$  se plaçant entre les faces correspondant à  $[a_2 + 2x]$  et  $[c_2 + 2y]$ , on obtient donc le zonage de la figure 4 dans un repère tropical, ce qui permet de limiter

la recherche des intersections. Bien évidemment les faces correspondant à des expressions de degré 1 en  $x$  ou en  $y$  peuvent ne pas apparaître, ces expressions étant systématiquement plus petites que les expressions des autres faces. Il en est de même de la zone correspondant aux termes en  $x \odot y$ .

Remarquons que quand une zone  $A$  qui devrait se trouver entre les zones  $B$  et  $C$  n'apparaît pas, il semble naturel, comme dans le cas des polynômes, de compter double l'arête limite entre les zones  $B$  et  $C$  puisque, dans le fond, c'est la confusion des arêtes entre  $A$  et  $B$  et entre  $A$  et  $C$ . Nous reviendrons sur cette idée en 3.3.3.

Nous avons vu que les polynômes qui admettent des racines multiples peuvent avoir plusieurs expressions conduisant au même graphique. Dans le cas des coniques il se produit un phénomène analogue : quand il n'y a pas les six zones plusieurs expressions peuvent conduire au même graphique.

Voyons quelques exemples. Nous laissons au lecteur le soin de refaire les calculs et ne donnons, dans le plan tropical  $xy$ , que la représentation graphique (figures 5) qui, rappelons-le, est la projection des arêtes de la surface  $z = z(x, y)$ .

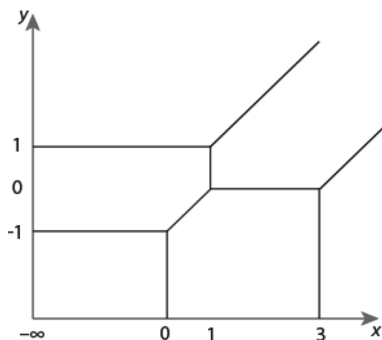


fig. 5a :  $2 \oplus (2 \odot x) \oplus (3 \odot y) \oplus ((-1) \odot x^{02}) \oplus (2 \odot x \odot y) \oplus (2 \odot y^{02})$

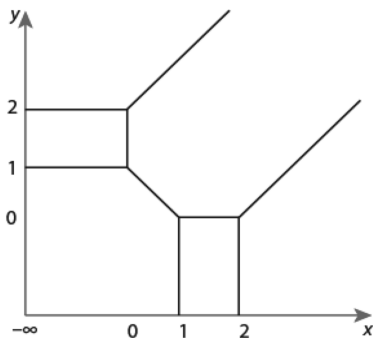


fig. 5b :  $3 \oplus (2 \odot x) \oplus (3 \odot y) \oplus (0 \odot x^{02}) \oplus (3 \odot x \odot y) \oplus (0 \odot y^{02})$



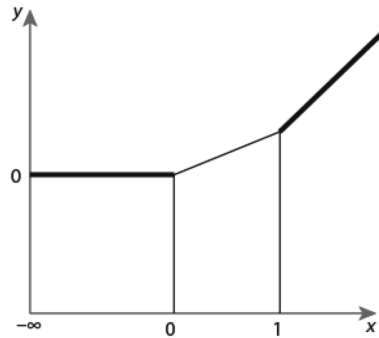


fig. 5c :  $0 \oplus (0 \odot x) \oplus ((-1) \odot x^{o2}) \oplus (0 \odot y^{o2})$

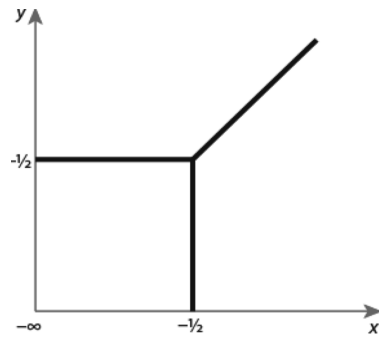


fig. 5d : Une droite double :

$$(-1) \oplus (0 \odot x^{o2}) \oplus (0 \odot y^{o2}) \text{ ou } (-1) \oplus ((-1/2) \odot x) \oplus ((-1/2) \odot y)^{o2}$$

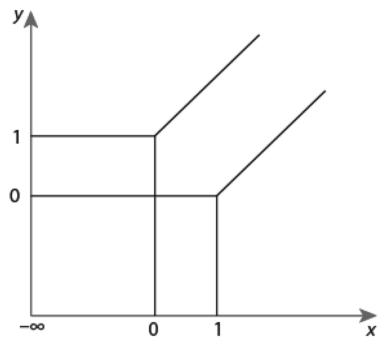


fig. 5e : Deux droites :

$$0 \oplus (0 \odot x) \oplus (0 \odot y) \oplus ((-1) \odot x^{o2}) \oplus (0 \odot x \odot y) \oplus ((-1) \odot y^{o2})$$

$$\text{ou } \{0 \oplus ((-1) \odot x) \oplus (0 \odot y)\} \odot \{0 \oplus (0 \odot x) \oplus ((-1) \odot y)\}$$

Sur ces figures 5, nous avons marqué d'un trait épais la trace d'une zone disparue qui semble devoir compter deux fois. Nous restons volontairement flou à ce stade et nous précisons mieux cela au point 3.3.3.

Nous voyons sur tous ces exemples qu'il y a toujours deux branches sud, deux branches ouest et deux branches nord-est, à condition de les compter avec leur ordre de multiplicité, même si cet ordre n'a pas encore été explicité correctement.

#### 4. À suivre sur le site de l'APMEP

Nous arrêtons ici la version papier. Le lecteur qui cherche à aller plus loin pourra consulter la suite de l'article sur le site de l'APMEP : [www.apmep.asso.fr](http://www.apmep.asso.fr)

Il y trouvera :

- Une généralisation aux courbes tropicales de degré arbitraire.
- La notion de polygone de Newton, notion qui fait le lien entre graphes et courbes.
- Le passage entre courbes tropicales et courbes algébriques avec les notions d'amibe et de patchwork.

Et pour terminer, il comprendra que le dessin de couverture du présent bulletin est l'illustration tropicale d'une courbe algébrique de degré 10 ayant le nombre maximal de composantes, c'est-à-dire 37.

#### 5. Références

Erwan BRUGALLÉ, *Some aspects of tropical geometry*, Newsletter of E.M.S., Issue 83, March 2012.

Erwan BRUGALLÉ, *Un peu de géométrie tropicale*, Quadrature n° 74 p. 10-22.

Axel HARNACK, *Über Vieltheiligkeit der ebenen algebraischen Curven*, Math. Ann. 10 (1876) pp 189-199. Version française *Sur le nombre de composantes d'une courbe algébrique plane*, sur

[http://webmath.univrennes1.fr/geomreel/seminaire\\_fichiers/Harnacktradu.pdf](http://webmath.univrennes1.fr/geomreel/seminaire_fichiers/Harnacktradu.pdf)

Ilia ITENBERG, Oleg VIRO, *Patchworking algebraic curves, disproves the Ragsdale conjecture*, (2002).

Viatcheslav KHARLAMOV, Oleg VIRO *Easy reading on topology of real plane algebraic curves*, (2002).

Isaac NEWTON, *Enumeratio linearum tertii ordinis*, London (1704), Paris (1797). Consultable sur <http://archive.org/stream/isaacinewtonien00newtgoog>

Oleg VIRO, *What is an amoeba ?*, Notices AMS, 49:8 (2002), pp 916-917.

Oleg VIRO, *Dequantization of real algebraic geometry on logarithmic paper*, Saint-Petersburg, Uppsala (2000).

Oleg VIRO, *Real Algebraic Plane Curves : Constructions with Controlled Topology*, Leningrad Math. Journal, Vol. 1, 1990, n° 5.

Imre SIMON, *On semigroups of matrices over the tropical semiring*, São Paulo (1994).

**Remarque** : Les différents articles d'Oleg VIRO (et co-auteurs) sont téléchargeables sur son site : <http://www.pdmi.ras.ru/~olegviro/>