Mieux que la règle et le compas : l'origami.

Michel Lafond(*)

Résumé : Une approche mathématique de l'origami. De nombreuses applications en géométrie (classique ou analytique) en découlent. Elles sont de tout niveau : depuis les constructions de base jusqu'à la trisection de l'angle ou la résolution des équations de degré 3.

La géométrie euclidienne est la géométrie des droites et des cercles, donc de la règle et du compas. L'intuition d'Euclide était que tout nombre pouvait être « construit » à l'aide de ces deux instruments. Mais à l'époque la notion de nombre était floue. Avec la notion moderne de nombres réels, on s'aperçoit qu'Euclide avait largement tort, car les grandeurs que l'on sait construire à la règle et au compas à partir d'une grandeur unité donnée forment un ensemble dénombrable, soit une goutte d'eau dans l'océan des nombres réels. Nous examinerons brièvement ce qu'on sait faire au moyen d'une règle et d'un compas, puis nous ferons appel à l'art japonais des pliages (ou origami) pour voir ce qu'il apporte.

1. Que peut-on réaliser à la règle et au compas ?

1.1. Une longueur unité est donnée par un bipoint (A, B) A ≠ B dans le plan matérialisé par une feuille de papier. Les seuls instruments sont une règle non graduée et un compas théorique permettant tout écartement positif.

Les constructions de base qui vont permettre l'obtention de certaines grandeurs x sont :
les **intersections** (droite-droite, droite-cercle, cercle-cercle) ;
la **médiatrice** d'un bipoint (A, B) A ≠ B en utilisant deux cercles et une droite ;
[le tracé de la droite (AB) donne donc le **milieu** de (A, B)] ;
la **bissectrice** de deux droites sécantes. [3 cercles et une droite] ;
la **perpendiculaire** menée d'un point A extérieur à la droite l : on choisit B ∈ l, on trace (AB), on construit le milieu O de [AB] puis le cercle de centre O et de rayon OA qui recoupe l en H. AH est la perpendiculaire. [En comptant le tracé de (AH), cela fait 3 cercles et 3 droites.]
la **parallèle** à la droite l menée d'un point A extérieur à l [3 cercles et une droite] ;
le **déplacement d'un segment**. Il est essentiel de pouvoir reporter une longueur donnée par un segment [AB] n'importe où sur la feuille, disons en A′B′ où A′ est donné ainsi que la direction (orientée) D = A′B′. Un cercle suffit.
On suppose évidemment que l'extrémité B′ sera sur la feuille.

1.2. Quelles sont les grandeurs $f(x)$ constructibles à partir de l'unité ?
Avec les outils vus en 1-1, les propriétés du triangle rectangle et le théorème de

(*) mlafond001@yahoo.fr

Thalès, on peut obtenir (figure 1 ci-dessous) $1 / x$, et le produit xy de deux grandeurs données.
Le quotient $x / y = x \times 1 / y$ ne pose pas de problème.
αx où $\alpha = p / q$ est un rationnel positif quelconque est donc constructible.
On peut combiner tout ceci avec l'addition et la soustraction de deux grandeurs, mais cela ne va pas plus loin. On reste dans le plus petit corps engendré par 1, x et stable par la racine carrée. (sitographie – 1)

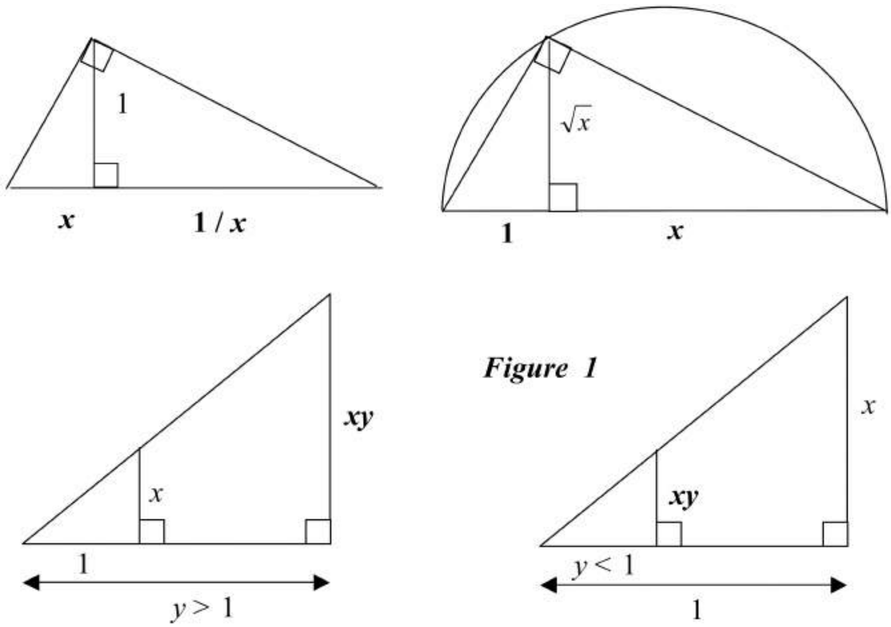


Figure 1

2. L'origami en renfort

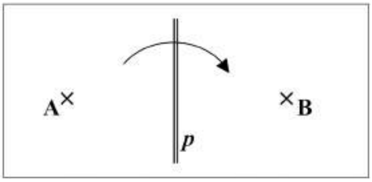
Mais il n'y a pas que la règle et le compas, il y a aussi l'origami ! Ce n'est pas un instrument, seulement une technique de pliages. Technique très puissante, car elle permet, à partir d'une grandeur unité donnée, de construire tout ce qu'on sait faire avec une règle et un compas et bien d'autres choses comme le partage d'un disque en 7 parts égales, ce qui résout le délicat problème du partage en 7 de la pizza si on ne chipote pas trop sur l'équirépartition des olives.

Il faut évidemment préciser ce qui est autorisé comme pliages. Nous ferons référence au formalisme de Huzita (sitographie – 2) qui accepte 6 sortes de plis.
Une feuille de papier étant donnée, on n'acceptera que les six pliages ci-dessous où le pli sera toujours figuré par un double trait p.
Quand on dit qu'une droite l est donnée, on entend par là qu'un pliage antérieur a été fait selon le pli l.
De même, quand on dit qu'un point A est donné, on entend par là que A est l'intersection de deux plis antérieurs.
Pour les constructions, c'est la même chose : on ne peut construire une droite que par pliage et on ne peut construire un point que par intersection de deux pliages.

Voici les six sortes de plis autorisés :

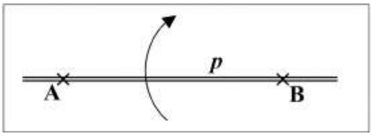
P1 : Amener un point A donné sur un point B donné.

C'est la construction de la **médiatrice** du segment [AB] donné.



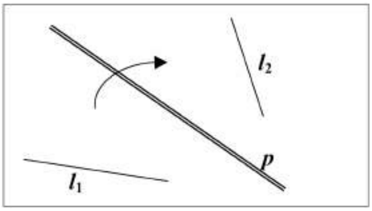
P2 : Plier selon deux points A, B donnés.
C'est la construction de la **droite** (AB).

P1 suivi de P2 permet la construction du **milieu** d'un bipoint.

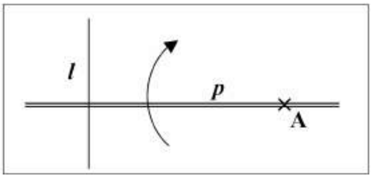


P3 : Amener une droite l_1 donnée sur une autre droite l_2 donnée.

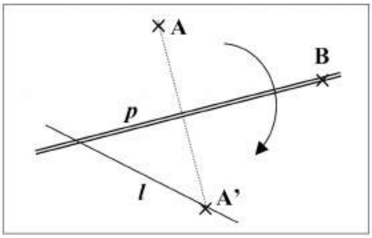
C'est la construction d'un axe de symétrie de deux droites, donc d'une **bissectrice**.



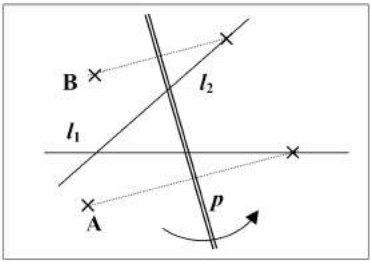
P4 : Plier une droite l sur elle-même par un pli passant par un point A donné.
C'est la construction de la **perpendiculaire** menée d'un point à une droite.
On dispose donc d'une **équerre** virtuelle.



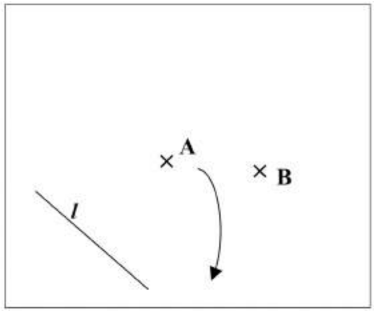
P5 : Amener un point A donné sur une droite l donnée par un pli qui passe par un autre point B donné.
Remarquons que si le pli p est suivi du pli P2 selon (AA′), le point A′ est l'une des intersections du cercle de centre B et de rayon BA avec la droite l.
P5 donne donc l'**intersection d'une droite et d'un cercle**.



P6 : Amener simultanément un point A et un autre point B donnés respectivement sur une droite l_1 et une autre droite l_2 données.
C'est une construction très puissante qui déborde largement les possibilités de la règle et du compas comme nous le verrons dans le paragraphe 5.



Remarque :
Si P1, P2, P3, P4 sont toujours réalisables, ce n'est pas le cas de P5 comme on le voit ci-contre, car le cercle (implicite) de centre B et de rayon BA peut ne pas couper la droite l si $BA < d(B, l)$.
Par ailleurs, la « sortie » de feuille lors d'un pliage n'est pas gênante puisqu'on va voir que les déplacements (translations, rotations) de segments sont réalisables par pliages.



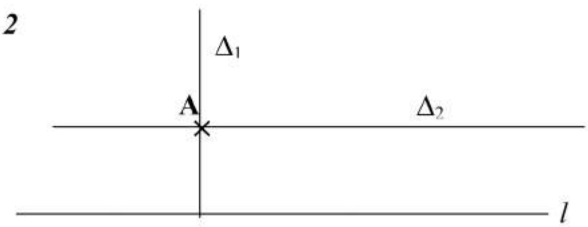
3. Opérations géométriques réalisables par origami

On a vu que la médiatrice, le milieu, la bissectrice, la perpendiculaire étaient réalisables. Il reste, si on veut faire aussi bien qu'avec la règle et le compas, à réaliser le déplacement d'un segment, à mener par un point la parallèle à une droite donnée, et à déterminer l'intersection de deux cercles (donnés par leurs centres et leurs rayons).

3.1. La parallèle

On peut construire en deux pliages la **parallèle à une droite donnée l passant un point donné A** (extérieur à l) [Figure 2] :
Pour cela, on construit simplement la perpendiculaire Δ_1 à l passant par A puis la perpendiculaire Δ_2 à Δ_1 passant par A.
La construction origamique de la parallèle à une droite donnée passant par un point donné aurait ravi Euclide, mais les papyrus de l'époque ne devaient pas être commodes à plier.

Figure 2

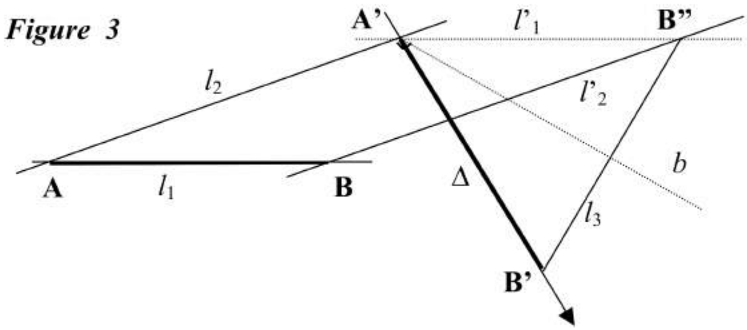


3.2. Le déplacement

Il faut reporter une longueur donnée (par un segment [AB]) n'importe où sur la feuille, disons en A′B′ où A′ est donné ainsi que la direction (orientée) $\Delta = A'B'$.
On suppose évidemment que l'extrémité B′ sera sur la feuille.

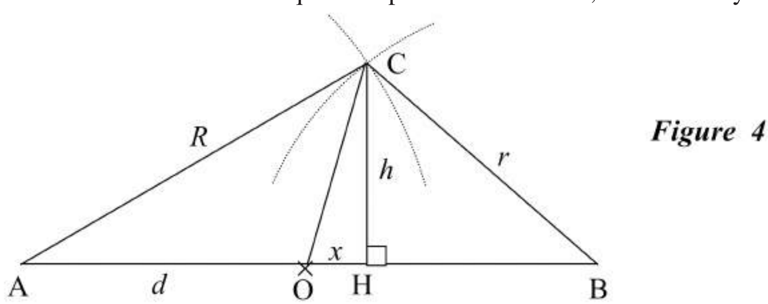
Huit pliages suffisent. Examinons la figure 3 ci-dessous dans laquelle il s'agit de reporter AB sur la droite Δ donnée avec A′ pour origine et A′B′ dans la direction indiquée.
On construit la droite $l_1 = (AB)$ et la droite $l_2 = (AA')$.
Ensuite on construit la parallèle l_1' à l_1 passant par A′ et la parallèle l_2' à l_2 passant par B. Le point $B'' = l_1' \cap l_2'$ est maintenant connu.

On construit la bissectrice b de (Δ, l'_1) [celle des deux bissectrices qui nous intéresse en fonction de la direction imposée] et la perpendiculaire l_3 à b passant par B''.
$B' = \Delta \cap l_3$ est l'extrémité cherchée puisque $AB = A'B'' = A'B'$.



3.3. L'intersection de deux cercles.

Les deux cercles sont connus uniquement par leurs centres A, B et leurs rayons R, r.



Soit O le milieu de AB, $d = OA = OB$, $h = CH$ et $x = OH$ [Figure 4 ci-dessus].

De $h^2 = R^2 - (d + x)^2 = r^2 - (d - x)^2$ on tire $x = \dfrac{R^2 - r^2}{4d}$.

À partir de O, x permet d'avoir H, un pli P4 donne la perpendiculaire (HC) et à partir d'un point E (non représenté) tel que $BE = r$, un pli P5 amène E sur C, qui est l'un des points d'intersection. Les grandeurs nécessaires font appel à des additions, soustractions, produits, quotients et racines carrées de grandeurs connues.
On va voir dans le paragraphe suivant que tout cela est réalisable.

4. Opérations numériques réalisables par origami

On choisit une fois pour toute deux points distincts dont la distance est prise comme unité.
On dit que l'opération $x \to f(x)$ est réalisable [ou que le nombre $f(x)$ est constructible] si, un segment de longueur x étant donné, on peut obtenir par origami un autre segment de longueur $f(x)$.

Sont réalisables les opérations αx où α est un rationnel positif quelconque, $1 / x$, $\sqrt{x}$.

Sont également réalisables à partir de deux grandeurs x et y données, les opérations : $x + y$; $x - y$; $x \times y$; x / y ; dans le cas où un segment de longueur x et un segment de longueur y sont donnés. Voyons comment :

Si n est un entier naturel positif, nx s'obtient naturellement en reportant n fois le segment de longueur x sur une droite, et si $a = p / q$ est un rationnel positif, $ax = px / q$ s'obtient par division (Voir plus loin).

La figure 5 ci-dessous montre comment obtenir $\sqrt{x}$.

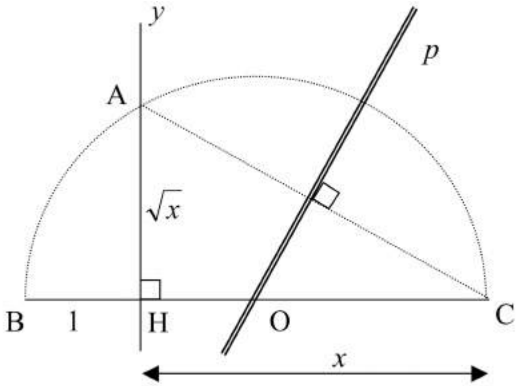


Figure 5

On construit bout à bout BH = 1 et HC = x.
Le milieu O de [BC] est obtenu par P1 et P2.
P4 permet d'obtenir la perpendiculaire (Hy) à (BC), et P5 permet d'amener C sur (Hy) [en A] par un pli p passant par O.
Puisque OA = OB = OC, (BAC) est rectangle en A et par suite HA = $\sqrt{x}$.

$x + y$; $|x - y|$ s'obtiennent par déplacement de segments sur une même droite.

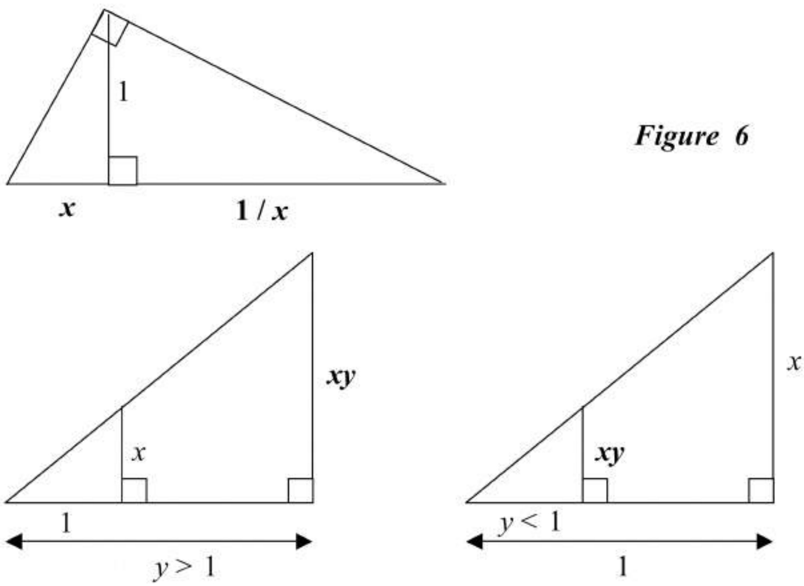


Figure 6

Le produit et l'inverse (donc le quotient) s'obtiennent facilement à partir des propriétés du triangle rectangle ou du théorème de Thalès (Figure 6 ci-dessus).

La conclusion est qu'on peut construire avec l'origami tout ce qu'on peut construire avec la règle et le compas.
Que peut faire de plus l'origami et ses 6 axiomes P1 – … – P6 ?

5. La puissance de l'origami

5.1. Rappelons un résultat bien connu dû à Gauss :

Théorème de Gauss-Wantzel. Un polygone à n côtés est constructible à la règle et au compas si et seulement si n est le produit d'une puissance de 2 et d'un nombre fini de nombres premiers de Fermat distincts.

Un nombre premier est dit de Fermat s'il est de la forme $F_k = 2^{2^k} + 1$ pour un certain entier naturel k.
Les nombres premiers de Fermat sont : 3, 5, 17, 257, 65 537, … ?
On ne connaît aujourd'hui que les cinq nombres premiers de Fermat ci-dessus, obtenus pour $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. On sait qu'il n'en existe pas pour $5 \leq k \leq 32$ (F_k a été prouvé composé). On ignore le statut de F_{33}.

Ainsi, les polygones constructibles à la règle et au compas sont ceux ayant n côtés pour $n \in \{3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, \ldots\}$.
Le cas $n = 7$ est donc le plus petit obstacle à la construction d'un polygone régulier, basée uniquement sur la règle et le compas.
On ne peut pas (sitographie - 1) réaliser à la règle et au compas la trisection de l'angle ou la duplication du cube [calcul de la racine cubique de 2].

Eh bien, ces trois limitations des performances de la règle et du compas [trisection, racine cubique, heptagone] vont être levées par l'origami !

5.2. La trisection.

C'est un célèbre problème qui a fait transpirer des générations de mathématiciens !
Soit à trisecter l'angle aigu (Ax ; Ay) de la figure 7 ci-dessous.

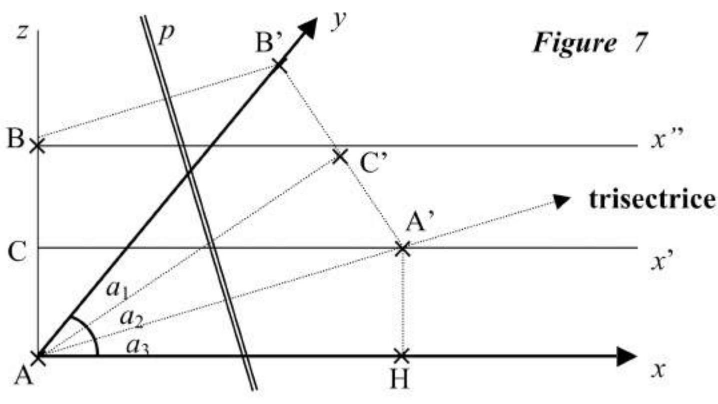


Figure 7

On construit la perpendiculaire (Az) à (Ax) et deux parallèles (Cx') et (Bx'') à (Ax) telles que AC = CB.
P6 permet d'obtenir par le pli p, l'envoi simultané du point A sur A′ de la droite (Cx') et du point B sur B′ de la droite (Ay). H est la projection de A′ sur (Ax).
C, milieu de [AB], est envoyé par symétrie sur C′, milieu de [A′B′].
Les triangles (AA′C′) et (AC′B′) sont égaux ce qui implique $a_1 = a_2$ et les égalités des triangles (CAA′) et (HAA′) d'une part et (CAA′) et (AA′C′) d'autre part impliquent celle des triangles (HAA′) et (AA′C′) d'où $a_2 = a_3$.
Cinq plis ont suffi [1 pour obtenir Az (par P4), 1 pour Bx'' (par P4), 1 pour Cx' (par P1 qui amène B sur A), 1 pour p (P6), et 1 pour AA′ (P4)].

L'affaire est réglée pour les angles aigus α, et pour trisecter un angle obtus, on trisecte sa moitié et on duplique le tiers obtenu.

5.3. La construction de $\sqrt[3]{x}$.

5.3.1. La méthode ci-dessous est due à Pierre Legrand.

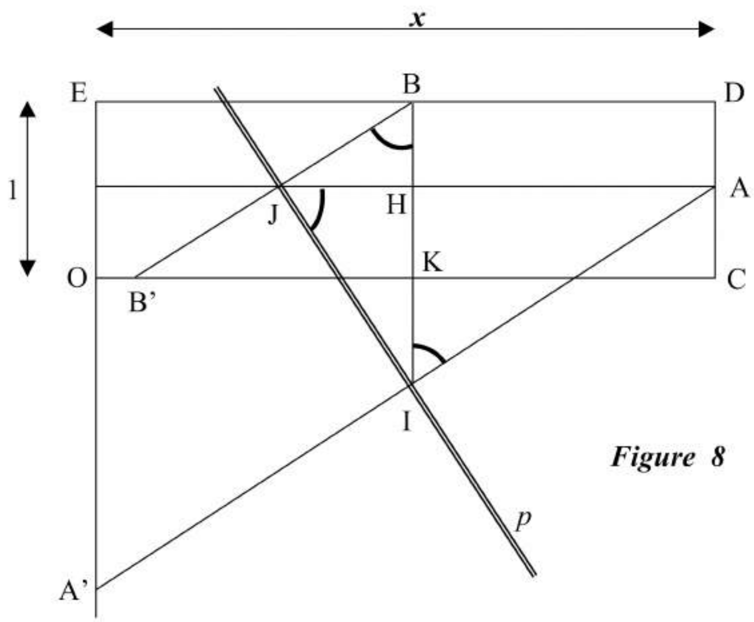


Figure 8

Pour construire la racine cubique de x, on trace (Figure 8 ci-dessus) un rectangle (OCDE) tel que OC = x et OE = 1.
Soit A le milieu de [CD], B celui de [DE], K celui de [OC] et H celui de [BK].
Le pli p (de type P6) amène simultanément A en A′ sur (EO) et B en B′ sur (OC).
On a alors $KB' = \sqrt[3]{x}$.
En effet, si on appelle θ l'angle marqué trois fois sur la figure, on a successivement :

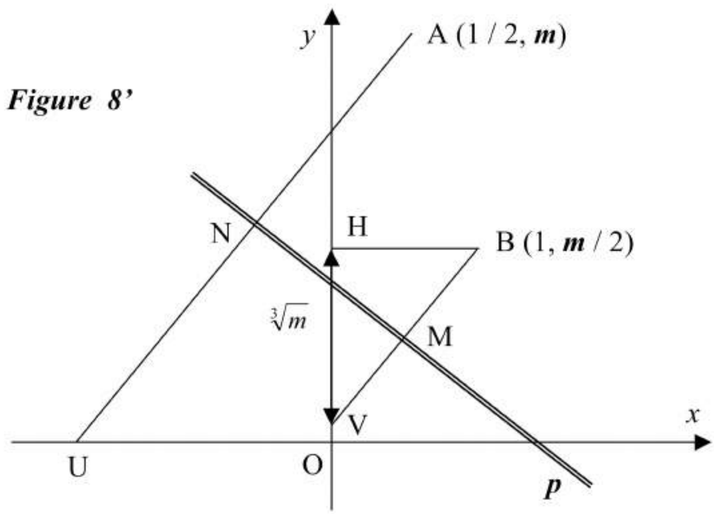
$\text{HB} = \dfrac{1}{2}$; $\text{HJ} = \text{HB}\tan(\theta) = \dfrac{1}{2}\tan(\theta)$; $\text{HI} = \text{HJ}\tan(\theta) = \dfrac{1}{2}\tan^2(\theta)$;

$\text{HA} = \text{HI}\tan(\theta) = \dfrac{1}{2}\tan^3(\theta)$.

Comme $\text{HA} = \dfrac{x}{2}$, l'égalité précédente donne $x = \tan^3(\theta)$ ou $\sqrt[3]{x} = \tan(\theta)$.

Par ailleurs, $\text{KB}' = 2\ \text{HJ} = \tan(\theta)$ ce qui fait bien $\text{KB}' = \sqrt[3]{x}$.

5.3.2. La méthode ci-dessous est due à Jacques Justin (sitographie – 2).



A et B ont les coordonnées indiquées sur la figure 8′ ci-dessus.
Le pli p (de type P6) amène simultanément A en U sur (Ox) et B en V sur (Oy).
Soit t la pente de (BV) ou de (AU) et H la projection de B sur (Oy).
On calcule facilement :

les coordonnées de M $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{-t+m}{2}\right)$ milieu de [BV] et celles de N $\left(\dfrac{t-m}{2t}, \dfrac{m}{2}\right)$ milieu de [AU]. En écrivant que la pente de (MN) est $-1/t$ on obtient $t^3 = m$ donc :

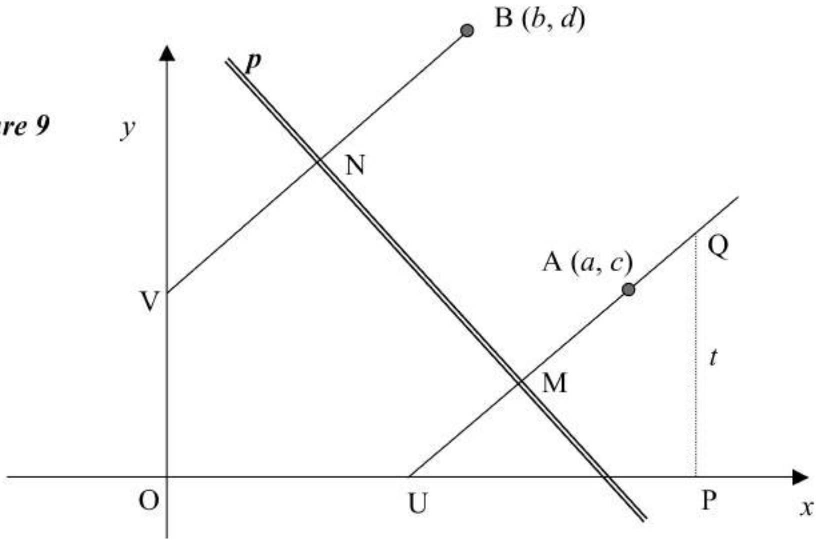
$$t = \frac{\text{HV}}{\text{HB}} = \text{HV} = \sqrt[3]{m}.$$

5.4. La construction de l'heptagone.

L'article de Jacques Justin que l'on peut lire sur le site rappelé ci-dessous, donne une construction très élégante de cos (2π / 7), mais il faudra faire un petit détour :

Considérons la figure 9 ci-dessous représentant un pli de type P6 :

Figure 9



Posons t = pente (AU) = pente (BV).

Une équation de (AU) est $Y = t\,(X - a) + c$ d'où on tire les coordonnées de M :

$$M\,(a - c / 2t\ ;\ c / 2).$$

Une équation de (BV) est $Y = t\,(X - b) + d$ d'où on tire les coordonnées de N :

$$N\,(b/ 2\ ;\ d - bt / 2).$$

En écrivant que la pente de (MN) est $-1/t$ on a l'équation : $\dfrac{c/2 - d + bt/2}{a - c/(2t) - b/2} = -\dfrac{1}{t}$

qui s'écrit aussi

$$b\,t^3 + (c - 2d)\,t^2 + (2a - b)\,t - c = 0 \qquad (1)$$

t apparaît sur la figure 9 comme la longueur de [PQ] si UP = 1

C'est une équation du troisième degré qui s'écrit

$$t^3 + p\,t^2 + q\,t + r = 0 \qquad (2)$$

en posant

$$a = \frac{q+1}{2}\ ;\ b = 1\ ;\ c = -r\ ;\ d = -\frac{p+r}{2} \qquad (3)$$

L' équation du troisième degré qui nous intéresse ici est :

$$t^3 + t^2 - 2\,t - 1 = 0 \qquad (4)$$

dont la seule solution positive est $t = 2 \cos (2\,\pi / 7)$.

En effet : posons $\theta = 2\pi / 7$, $x = e^{i\theta}$ et $S = t^3 + t^2 - 2\,t - 1$.

On a : $t = 2 \cos (\theta) = x + 1 / x$; $t^2 = x^2 + 1 / x^2 + 2 = 2 \cos (2\theta) + 2$

$t^3 = x^3 + 3x + 3 / x + 1 / x^3 = 2 \cos (3\theta) + 6 \cos (\theta)$ donc après regroupement :

$$S = t^3 + t^2 - 2\,t - 1 = 1 + 2 \cos (\theta) + 2 \cos (2\theta) + 2 \cos (3\theta) \qquad (5)$$

Par supplémentarité on a :

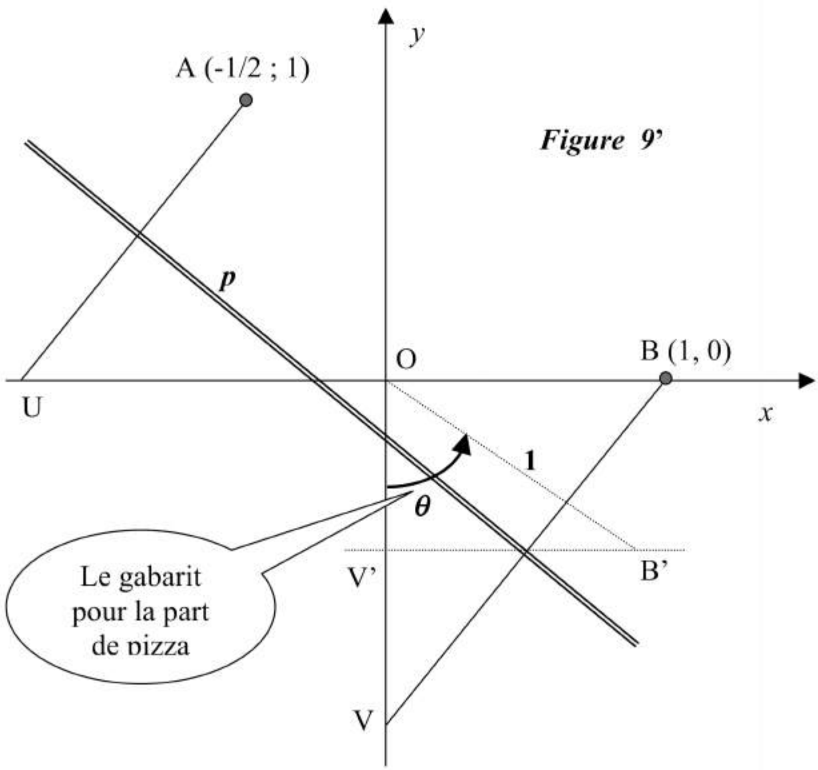
$\cos (\theta) = \cos (6\theta)$; $\cos (2\theta) = \cos (5\theta)$ et $\cos (3\theta) = \cos (4\theta)$.

Donc (5) devient :

$$S = 1 + \cos(\theta) + \cos(2\theta) + \cos(3\theta) + \cos(4\theta) + \cos(5\theta) + \cos(6\theta)$$

qui est la partie réelle de $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 = (1 - x^7) / (1 - x) = 0$ car $x^7 = 1$. Il est ensuite facile, par exemple graphiquement, de vérifier que (4) n'a qu'une solution positive.

(4) est identifiée à (2) en posant $a = -1/2$, $b = 1$, $c = 1$ et $d = 0$.



Avec ces coordonnées, la figure 9 devient la figure 9′ ci-dessus dans laquelle un seul pli de type P6 amenant les points A (−1 / 2 ; 1) et B (1, 0) respectivement en U (sur Ox) et V (sur Oy) fait apparaître l'angle $\theta = 2\pi / 7$ à condition de matérialiser le segment [OB'] de longueur 1.

En effet, t désignant la solution positive de (4) on a :

$$2\cos(2\pi / 7) = t = \text{pente (BV)} = \text{OV} = 2\,\text{OV}',$$

soit $\cos(\theta) = \cos(2\pi / 7) = \text{OV}'$

Un conseil : si vous utilisez ce qui précède pour diviser votre pizza en 7, n'utilisez pas la pizza comme espace de travail, surtout si elle est encore chaude. Prenez une feuille de papier, effectuez les pliages nécessaires, et l'angle final de mesure $2\pi / 7$ vous fournira un gabarit pour une part.

Sitographie

C'est en lisant [Novembre 2011] l'article de WIKIPEDIA « Mathématiques des origamis » affirmant sans démonstration que l'origami permettait entre autres la construction de l'heptagone, que j'ai eu envie de creuser le problème.
Parce que si on croit tout ce qu'on lit sur Internet…

1. En tapant «nombres constructibles» (WIKIPEDIA 21 mars 2012) on trouve ceci :
« … l'ensemble des nombres constructibles (à la règle et au compas) est le plus petit corps stable par racine carrée. Grâce à ce théorème, tombent deux des problèmes de l'antiquité : la trisection de l'angle et la duplication du cube, qui reviennent à résoudre une équation de degré 3. L'ensemble des nombres constructibles ne regroupe donc qu'une petite partie de l'ensemble des nombres algébriques.
Vous trouverez aussi sur ce site des tas de choses sur :
Constructibilité uniquement à la règle – à la règle et à l'empan – à la règle et au compas à pointes sèches – uniquement au compas – à la règle graduée et au compas – par origami.

2. En allant sur http://en.wikipedia.org/wiki/Huzita-Hatori_axioms, on trouve ceci :
The Huzita-Hatori axioms or Huzita-Justin axioms are a set of rules related to the mathematical principles of paper folding, describing the operations that can be made when folding a piece of paper. The axioms assume that the operations are completed on a plane (i.e. a perfect piece of paper), and that all folds are linear.The axioms were first discovered by Jacques Justin* 1989.

Un article de Jacques Justin sur le site ci-dessous étudie l'axiome P6 et ses conséquences :

* http://irem.u-strasbg.fr/php/publi/ouvert/articles/42_Justin.pdf

3. En tapant « Nombre premier de Pierpont » (Wikipedia 21 mars 2012) on trouve :
Un nombre premier de Pierpont est un nombre premier de la forme $2^u3^v + 1$, u, v étant des entiers positifs.
Ils sont nommés ainsi d'après le mathématicien James Pierpont.
Les premiers nombres de Pierpont sont : 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, … Il a été montré que ces 6 pliages sont suffisants pour permettre de former n'importe quel polygone régulier à N côtés, tant que N est supérieur à 3 et de la forme $2^a\ 3^b$ P, où P est le produit de nombres premiers de Pierpont distincts. Le hendécagone (11 côtés) est le plus petit polygone régulier qui ne peut pas être construit par origami.

Tous ces sites donnent des références bibliographiques.