Je faisais seulement un beau dessin

Une pérégrination mathématique estivale

Stéphane Roebroeck(*)

Introduction

L'histoire ne commence pas comme d'habitude. Non, ce n'était pas un professeur de mathématiques exemplaire préparant un cours au milieu du mois d'Août. Pas non plus, un enseignant passionné se posant des questions didactiques après avoir lu un article dans Plot ou dans le bulletin vert de l'APMEP.

Ce jour là, je prenais du bon temps en découvrant un logiciel de … dessin. Eh, oui, Inkscape(1), pour ne pas le citer, est un logiciel de dessin vectoriel (tout de même) qui permet de produire plein de belles choses, notamment pour illustrer son site internet. Le rapport avec les maths ?

Phase « Intérêt pour un objet anodin »

Depuis peu, quand je découvre un nouvel outil électronique ou un nouveau logiciel, je consulte le mode d'emploi. Il m'arrive même de faire les exercices des didacticiels. Je me suis rendu compte que l'on pouvait ainsi gagner beaucoup de temps, à terme.

C'est pourquoi, je me suis retrouvé, en plein mois d'Août, à réaliser un joli drapeau de l'union européenne avec le fond bleu, les étoiles et tout. Et puis, comme il se doit, victime du « syndrome du matheux matant », que vois-je sous mes yeux avides ? Un objet qui questionne, un pentagone régulier croisé, une étoile à cinq branches, pour tout dire un pentagramme(2).

Pentagramme, c'est le mot. Une figure que l'on retrouve dans de nombreux ouvrages et sur de nombreux bâtiments depuis de temps immémoriaux. En Mésopotamie, il y a 5 000 ans, il est le signe qui signifie « coin, angle, région ». Dans l'écriture cunéiforme (vers 2 600 avant notre ère), il représente les cieux. Quelques siècles plus tard, le voilà devenu emblème des pythagoriciens (sans certitude historique cependant).

Au cours des siècles, il sera tantôt symbole positif de richesse et d'équilibre et tantôt, avec une pointe en bas, symbole négatif de sorcellerie…

Il est certain que son tracé infini (si on construit le « pentagone étoilé », en croisant les traits) est une propriété assez « lourde » pour fournir de quoi inspirer de nombreux chercheurs de sens ou de symboles religieux.

(*) stephane.roebroeck@laposte.net

(1) Logiciel libre sous licence GNU/GPL dont les fonctionnalités se rapprochent de celles d'Adobe Illustrator

(2) aussi nommé pentacle, en particulier dans l'hexagone !

Avec une si riche histoire, on pourrait s'étonner que cette figure et le polygone associé ne soient pas plus prisés dans l'enseignement. À l'école, on voit beaucoup les triangles équilatéraux, les carrés et ensuite on passe à l'hexagone, si simple à construire. Une belle rosace et c'est gagné ! Face à cette ingratitude des contemporains, je me suis cru obligé de chercher deux ou trois informations sur le sujet. Pour commencer, une question s'imposait : comment construit-on un pentagone et un pentagramme et, pour rendre hommage à nos glorieux anciens mathématiciens grecs, comment les construit-on à la règle et au compas ?

Construction du pentagramme et du pentagone associé

Quelques recherches sur internet et me voilà instruit. En fait, on commence par le pentagone (voir la figure 1) :

- Un cercle C_0 de centre O admettant pour diamètres perpendiculaires les deux segments [AC] et [BD].
- K le milieu de [OD].
- C_1, le cercle de centre K qui passe par A (et C) coupe [BD] en L.
- C_2, le cercle de centre A qui passe par L coupe C_0 en G et F.
- C_3, le cercle de centre F qui passe par A coupe C_0 en I.
- C_4, le cercle de centre G qui passe par A coupe C_0 en H.
- Relier les points AFIHGA pour obtenir un pentagone régulier convexe.

Pour finir, on relie les points AIGFHA pour obtenir un pentagone régulier croisé et ainsi le pentagramme.

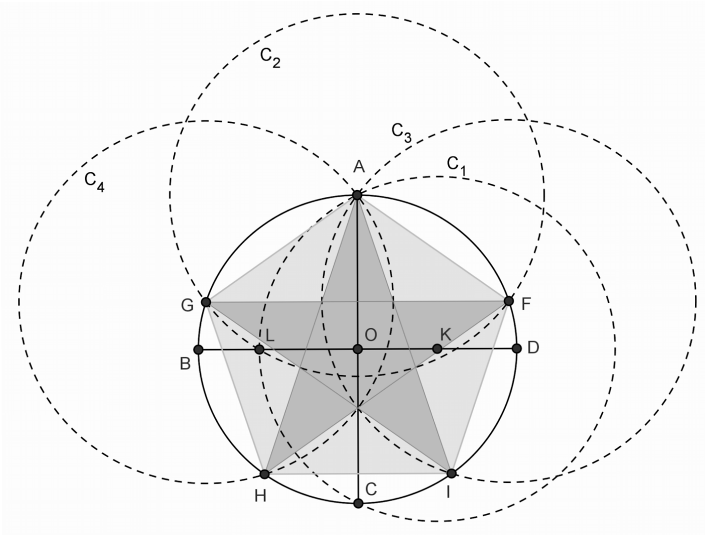


FIGURE 1 – La construction

Pourquoi cette construction fonctionne-t-elle ?

Si vous cherchez la construction du pentagramme sur internet, vous pourrez tomber sur celle que je viens de présenter mais aussi sur des constructions approchées(3).

Après avoir obtenu mon pentagramme sur Geogebra et « vérifié » le caractère régulier des objets construits en affichant les longueurs voulues, une question m'est venue naturellement : pourquoi cette construction me donnerait-elle vraiment le pentagone régulier ?

Revenons au programme de construction. Ce programme est bon « si et seulement si » la longueur AL est égale à la longueur du côté du pentagone régulier. Il nous faut donc calculer ces deux longueurs.

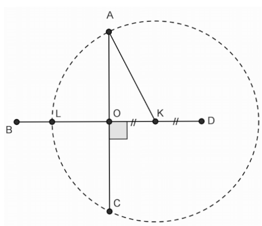


FIGURE 2 – Calcul de AL

- Notons d la longueur OD (voir la figure 2). D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$\mathrm{AK} = \sqrt{d^2 + \frac{d^2}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{2} d.$$

- On peut aussi calculer la longueur OL :

$$\mathrm{OL} = \mathrm{KL} - \mathrm{OK} = \mathrm{AK} - \mathrm{OK} = \frac{\sqrt{5}}{2} d - \frac{d}{2}.$$

Ici, en factorisant d, on obtient $\mathrm{OL} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} d$ et j'aurais pu reconnaître l'inverse d'un nombre bien connu, mais ce ne fut pas le cas et … nous y reviendrons plus loin.

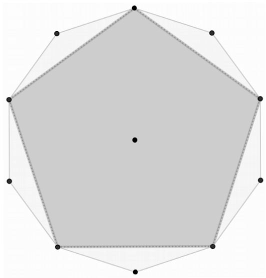
- Et encore la longueur AL :

$$\mathrm{AL} = \sqrt{\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OL}^2} = \sqrt{d^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{2} d - \frac{d}{2}\right)^2} = d\sqrt{1 + \frac{5 - 2\sqrt{5} + 1}{4}} = d \times \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{2}.$$

Nous avons ainsi calculé la longueur qui, si la construction est juste, est égale à

(3) voir par exemple cette page http ://monuniversencouleur.over-blog.com/article-30190828.html mais on trouve souvent des constructions « à peu près ».

la longueur du côté du pentagone. Il reste à calculer cette longueur. Et ce n'est pas si simple.



- Là, je remercie « La petite encyclopédie des mathématiques » (rédaction collégiale, traduction chez Didier, 1986) qui m'a donné la bonne idée : utiliser le décagone régulier.
  On obtient ce décagone régulier et convexe en appliquant la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{5}$ au point A (par exemple).
- Sur la figure 3, on voit le découpage qui va beaucoup nous aider.
  On obtient des triangles isocèles dont la mesure de l'angle au sommet est égale à $\frac{\pi}{5}$.

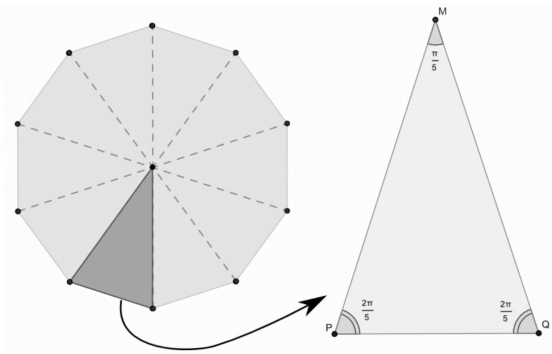


FIGURE 3 – Le décagone et ses triangles isocèles

Nous travaillerons sur un de ces triangles que nous nommerons MPQ. Nous voyons tout de suite que les angles à la base mesurent $\frac{2\pi}{5}$ radians.

- Construisons le point R du segment [MP] tel que l'angle $\widehat{PQR}$ mesure $\frac{\pi}{5}$.

Sur la figure 4, on voit deux triangles semblables. En effet :

$$\text{mes}\left(\widehat{PRQ}\right) = \pi - \left(\text{mes}\left(\widehat{RPQ}\right) + \text{mes}\left(\widehat{PQR}\right)\right) = \ldots = \frac{2\pi}{5}.$$

Deux des angles du triangle PQR mesurent donc $\frac{2\pi}{5}$. Le troisième $\frac{\pi}{5}$.

Les deux triangles MPQ et QRP sont donc semblables. Deux triangles semblables ont leurs longueurs proportionnelles. Un chapitre de Seconde nous en apprenait long sur le sujet dans l'ancien programme mais il n'est pas interdit d'en parler encore aujourd'hui. On a donc le tableau de proportionnalité suivant :

DansMPQ	QP	MP	MQ
Dans QRP	PR	RQ	QP

Notons s la longueur QP, (on a d le rayon du cercle circonscrit). On obtient :

DansMPQ	s	d	d
Dans QRP	$d-s$	s	s

En effet le triangle MRQ a deux angles qui mesurent $\frac{\pi}{5}$, il est donc isocèle et RM = RQ = s donc PR = MP − RM = $d-s$.
On obtient, notamment :

$$s\times\frac{s}{d}=d-s$$

ou encore :

$$s^2+ds-d^2=0.$$

s est donc solution de cette équation du second degré qui a pour solution positive :

$$\frac{d}{2}\times\left(\sqrt{5}-1\right).$$

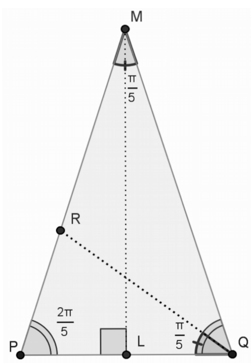


FIGURE 4 – Deux triangles semblables.

- C'est à ce moment que je me suis dit que ce nombre me rappelait quelque chose. Bien qu'étant en vacances, la fièvre du nombre d'or me prenait soudain et, une fois passés les tremblements, me voilà replongé dans les livres et internet !

  Souvent noté Φ, le nombre d'or est égal à $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, il est la solution positive de l'équation $x^2+x-1=0$, son inverse est tel que $\frac{1}{\Phi}=\Phi-1$. Il a d'autres propriétés arithmétiques qui peuvent, de manière plus scientifique qu'ésotérique, justifier son appellation.

Souvenirs, souvenirs. Il y a les rectangles d'or (le rapport entre le grand côté et le petit est égal à Φ) à partir desquels on peut construire les spirales d'or. Mais il y a aussi les triangles d'or (et même les triangles d'argent).

Les triangles d'or sont des triangles isocèles dont l'angle au sommet mesure $\frac{\pi}{5}$ radians ou encore $\frac{\pi}{5}$. Ils ont la particularité suivante qui justifie leur appellation : le rapport du grand côté par le petit est égal Φ.

Inculte que je suis, je travaillais depuis un bon moment sur un objet dont les propriétés sont bien connues ! En utilisant ces dernières et la notation Φ, on pouvait réécrire les égalités ci-dessus :

$$\mathrm{OL} = \frac{d}{\Phi} = d(\Phi - 1).$$

$$\mathrm{AL} = \sqrt{\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OL}^2} = \sqrt{d^2 + d^2(1-\Phi)^2}$$
$$= d\sqrt{1 + 1 - 2\Phi + \Phi^2} = d\sqrt{2 - 2\Phi + \Phi + 1} = d\sqrt{3 - \Phi}.$$

Poursuivant, envers et contre tout sur ma lancée, j'ai cherché à vérifier deux ou trois choses par moi même : $\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{PQ}} = \frac{d}{s}$. Mais, on a : $s = \frac{\sqrt{5}-1}{2}d = \frac{d}{\Phi}$. D'où :

$$\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{PQ}} = \Phi.$$

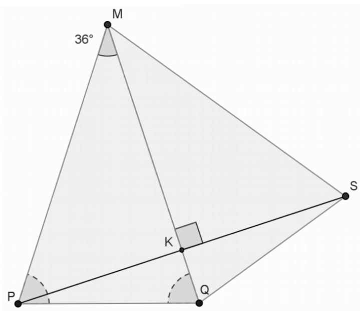


FIGURE 5 – Côté du pentagone.

- Après cette parenthèse, il me fallait revenir au pentagone. D'où la question suivante : comment passer de la longueur du décagone à celle du pentagone ? La figure 5 résume le problème. Il faut exprimer SP en fonction de d.

$$\mathrm{SP} = 2\mathrm{PK} = 2\mathrm{d} \sin \frac{\pi}{5}$$

Il me restait à déterminer $\sin \frac{\pi}{5}$. Un petit retour sur le triangle d'or s'imposait.

L'ajout du point L sur la figure 4 me parut donc utile. (ML) partage $\widehat{PMQ}$ en deux angles mesurant $\frac{\pi}{10}$ radians.

$$\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)=\frac{PL}{MP}=\frac{\frac{1}{2}QP}{MP}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\Phi}=\frac{1}{2\Phi}.$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=1-2\left(\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)^2=1-2\times\frac{1}{4\Phi^2}=1-\frac{1}{2}(2-\Phi)=\frac{\Phi}{2}.$$

D'où :

$$\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)=\sqrt{1-\frac{\Phi^2}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{4-(\Phi+1)}=\frac{1}{2}\sqrt{3-\Phi}.$$

C'est là que je me suis dit que les vacances passaient vite ! … mais déjà, cela sentait la fin. La longueur du côté du pentagone était donc égale à :

$$SP=2PK=2d\sin\frac{\pi}{5}==2d\times\frac{1}{2}\sqrt{3-\Phi}=d\sqrt{3-\Phi}.$$

Un petit regard fébrile plus haut dans le texte permet à ce moment de vérifier que c'est bien égal à AL.

- Pourquoi ai-je poussé un cri à ce moment précis ? Vous les matheux, amateurs ou professionnels, vous savez de quoi je parle, n'est-ce pas ?
  C'était fait. J'avais démontré la validité de ma construction du pentagone régulier. Certes je n'avais pas redémontré le théorème de Fermat mais, au cours de la nuit suivante, je dormis avec le sommeil du juste.

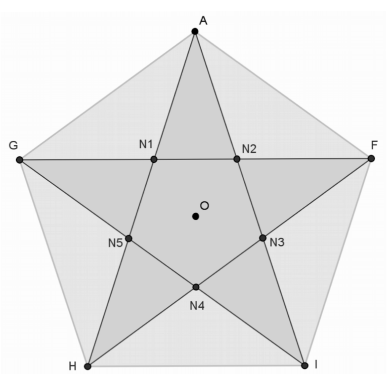


FIGURE 6 – Du pentagone vers le pentagramme.

- Ce n'est qu'un peu plus tard que je me suis souvenu que mon premier objet de questionnement était le pentagramme. Cependant, à partir du pentagone régulier et sachant qu'il admet 5 axes de symétrie (voir la figure 6), il est évident que les longueurs $AN_1, AN_2, AN_3, \ldots$ sont toutes égales et que l'on a bien le pentagramme recherché.

Le rapport entre les rayons de deux cercles

- En poursuivant avec mes symétries axiales, j'ai obtenu facilement les égalités suivantes :

  $$ON_1 = ON_2 = ON_3 = ON_4 = ON_5.$$

  De même :

  $$N_1N_2 = N_2N_3 = N_3N_4 = N_4N_5 = N_5N_1.$$

  Quel est l'intérêt de ces informations ?
  Il faut que je vous reparle du logiciel Inkscape. En effet, pour faire une étoile, celui-ci demande le rapport (voir la figure 7) entre le rayon du petit cercle (circonscrit aux points les plus proches du centre) et le rayon du grand cercle (circonscrit aux points les plus éloignés du centre).

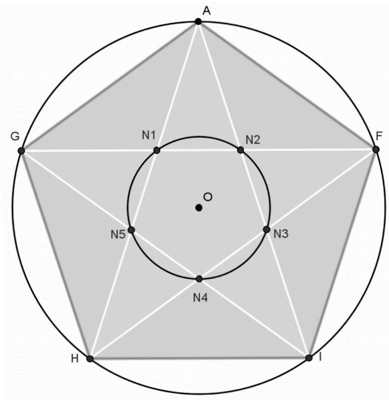


FIGURE 7 – Les deux cercles.

En essayant diverses valeurs (c'est l'avantage de l'ordinateur), j'ai pu faire des étoiles de toute beauté. Celle qui nous intéresse a la particularité de pouvoir s'obtenir, comme on l'a vu plus haut, à partir du pentagone régulier. Sur la figure 8, on peut voir deux étoiles. Celle de gauche a un rapport de 0,6 et celle de droite de 0,25.

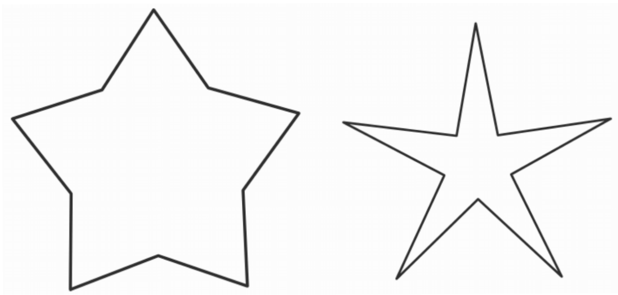


FIGURE 8

- Dans mon didacticiel, il m'était indiqué qu'il fallait définir un rapport de 0,382 pour obtenir le pentagramme recherché. Pourquoi ce nombre ?
  Comme le montrent les égalités vues un peu plus haut, $N_1N_2N_3N_4N_5$ est un pentagone régulier. Le rapport des rayons des deux cercles est donc le rapport de similitude entre les deux pentagones AFIHG et $N_1N_2N_3N_4N_5$, c'est à dire par exemple $\dfrac{N_1N_2}{AF}$. Chose qui m'aurait sans doute servi si je l'avais vue plus tôt. J'ai alors réalisé qu'il était facile de voir des triangles d'or dans la figure d'origine. En reprenant les notations de la figure 6, AHI est un triangle d'or. En effet, il est isocèle et l'angle au sommet $\widehat{HAI}$ intercepte l'arc $\overset{\frown}{HI}$, sa mesure est donc égale à la moitié de la mesure de l'angle au centre $\widehat{HOI}$, c'est donc $\dfrac{\pi}{5}$.
  On peut aussi démontrer que les triangles AN_1N_2, FN_2N_3, IN_3N_4, … d'une part ainsi que les triangles FAN_1, IFN_2, GAN_2, … d'autre part sont tous des triangles d'or. Ainsi :
  $$\frac{AN_1}{AF}=\frac{1}{\Phi} \text{ et } \frac{N_1N_2}{AN_1}=\frac{1}{\Phi}.$$
  D'où :
  $$\frac{N_1N_2}{AF}=\frac{1}{\Phi^2}=\frac{1}{\Phi+1}\approx 0{,}382.$$
  J'avais répondu à ma dernière question. Oui, la dernière car les vacances c'est les vacances !

Épilogue

J'avoue que je ne pensais pas que cela me mènerait aussi loin. J'avoue aussi que je me suis servi de tout ça à la rentrée pour faire travailler ma classe de première S. Comment ? En commençant par une phase construction, à la main et sur Geogebra et en faisant preuve de ténacité, mes élèves et moi. Les avantages de l'avoir fait :

- les élèves ont pris leurs marques sur un logiciel qu'ils utiliseront souvent pendant deux ans,
- ils ont travaillé la trigonométrie et les radians,
- ils ont rencontré un exemple d'utilisation du « second degré », pendant que nous faisions le chapitre,
- et surtout, ils se sont plongés dans un problème qui a nécessité des heures de travail mathématique.