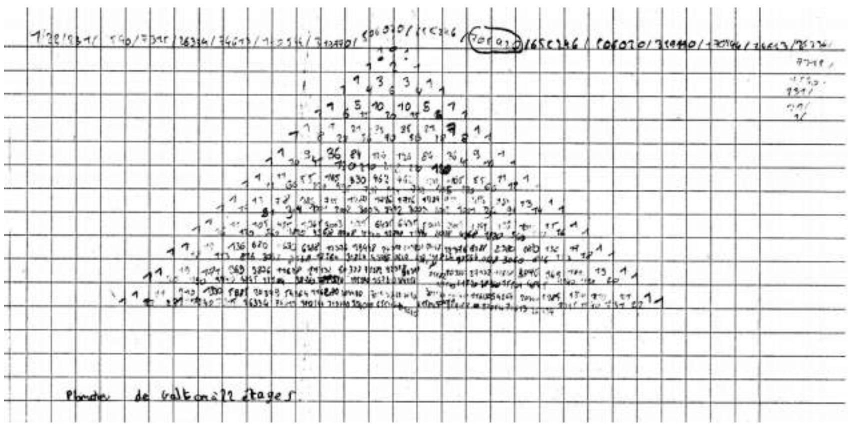
Bon sang mais c'est bien sûr !

Une approximation des coefficients binomiaux à partir de la fonction de densité de la loi normale

Véronique Cerclé(*)

Résumé : la représentation graphique des points obtenus en appliquant la fonction logarithme aux coefficients binomiaux dessine approximativement une parabole. On peut relier cette observation à un point nouvellement apparu au programme de terminale : les lois binomiales et normales.

La planche de Galton a exercé son pouvoir fascinant sur Baptiste, élève en PremièreS : avec beaucoup de patience, il a imaginé une « *planche de Galton à 22 étages* »(1) et compté les billes arrivant dans chaque case :

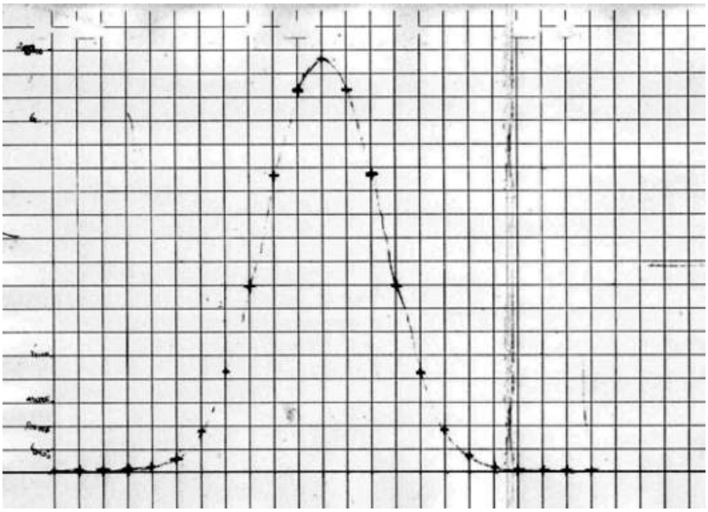


Il a placé ses points dans un graphique(2)...

(*) professeure au lycée Jean Moulin de Pézenas (34).
veronique.cercle@ac-montpellier.fr

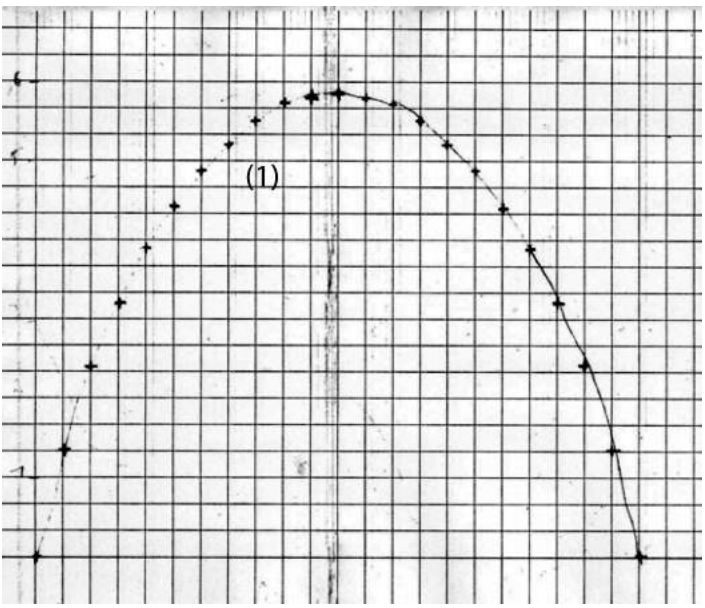
(1) C'est Baptiste qui parle : on notera que sa « planche de Galton » est en réalité un triangle de Pascal, mais on comprend que ce qu'il compte, ce sont des billes « équiprobables », ce qui correspond au nombre de chemins qui arrivent dans chaque case d'arrivée ; ce sont donc les coefficients binomiaux « p parmi 22 ».

(2) Il n'a pas indiqué ce qui est pris sur les axes de coordonnées : en abscisses, p ; en ordonnées, « p parmi 22 » avec en unité 1 carreau = 10 000.



On reconnaît déjà une courbe bien connue...

Il a alors « *transformé sa courbe en logarithme*[3] ». Notons qu'il a utilisé le logarithme décimal, sans doute plus naturel que le logarithme népérien[4]. Et le résultat ressemble fort à une parabole...



(3) « Pour avoir une courbe plus lisse» (je le cite).

(4) Pour son lien avec les puissances de 10 qui rend son interprétation possible en Première S ?

Quand il m'a montré ce travail, j'ai pensé « Bon sang mais c'est bien sûr ! »(5). Il me sembla en effet qu'en travaillant sur le nouveau programme de probabilités-statistique, j'étais passée devant une évidence sans la voir : les connexions *coefficients binomiaux* → *loi binomiale* → *loi normale* se concrétisaient ici, puisque la fonction de densité de la loi normale d'espérance m et de variance s^2 est $f(x) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \times \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x-m)^2}{s^2}\right)$, et sa composée par la fonction ln est bien une fonction trinôme ! J'avais une clé, Baptiste m'a montré une porte.

Je suis allée y voir de plus près. Il s'agissait donc de vérifier si les coefficients binomiaux (ou combinaisons) peuvent être approchés par une expression de la forme $\exp\left(ax^2 + bx + c\right)$, avec a négatif (car la concavité de sa « parabole » est tournée vers le bas).

Mais avant cela je me suis intéressée au cas de la loi binomiale ; vous noterez que j'ai utilisé un tableur, ça va plus vite que le papier !

1. La loi binomiale discrète B(n,p) peut être approchée par la fonction de densité de la loi normale N(m,s^2)

Soit une variable aléatoire X_n suivant une loi binomiale B(n,p).
En posant

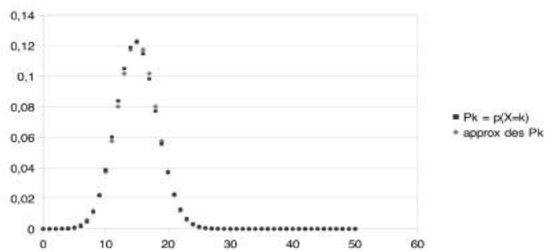
$$f(x) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \times \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x-m)^2}{s^2}\right)$$

où $m = np$ et $s = \sqrt{np(1-p)}$, on a :

$$\mathrm{P}(X_n = a) \approx f(a).$$

X	Pk = p(X=k)	approx des Pk
0	0	0
1	0	0
2	0	0
3	0	0
4	0	0
5	0	0
6	0	0
7	0	0.01
8	0.01	0.01
9	0.02	0.02
10	0.04	0.04
11	0.06	0.06
12	0.08	0.08
13	0.11	0.1
14	0.12	0.12
15	0.12	0.12
16	0.11	0.12
17	0.1	0.1
18	0.08	0.08
19	0.06	0.06
20	0.04	0.04
21	0.02	0.02
22	0.01	0.01
23	0.01	0.01
24	0	0
25	0	0
26	0	0
27	0	0

n	50	E(X)	15
p	0.3	s	3.24



(5) Comme le Commissaire Bourrel des Cinq Dernières Minutes.

Exemple ici, pour $n = 50$ et $p = 0,3$: on a pris comme approximation la fonction :

$$f(x) = 0{,}123 \times \exp\left(-\frac{1}{21}(x-15)^2\right).$$

Explications

On peut essayer d'expliquer ce constat en trois étapes:

* $\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = a) = \mathrm{P}(a - 0{,}5 < \mathrm{X}_n < a + 0{,}5)$.

Il s'agit de transformer du discret en continu, procédé que les manuels de BTS nomment « correction de continuité » ; ce procédé revient à remplacer la un bâton par un rectangle de même longueur et de largeur 1 ; l'aire du rectangle obtenu reste bien égale à la probabilité considérée.

* $\mathrm{P}(a - 0{,}5 < \mathrm{X}_n < a + 0{,}5) \approx \int_{a-0,5}^{a+0,5} f(x)\,\mathrm{d}x$.

On utilise ici l'approximation de la loi binomiale par la loi normale utilisée en BTS et qui est une conséquence du théorème de Moivre-Laplace (TML) : « pour *n assez* grand et *p pas trop* proche de 0 ni de 1, alors la loi binomiale B(n;p) est très proche de la loi normale N(m; s^2) », avec $m = np$ et et $s^2 = np(1 - p)$. On parle ici en termes de lois continues, pour calculer des probabilités d'intervalles.

* $\int_{a-0,5}^{a+0,5} f(x)\,\mathrm{d}x \approx f(a)$.

L'aire sous la courbe est proche de celle du rectangle de hauteur $f(a)$ et de même largeur 1.

Autrement dit : on pourrait étendre l'approximation d'une loi binomiale par une loi normale, utilisée en BTS dans le cadre des lois continues, en se plaçant dans le cadre de la loi discrète.

Analyse de la qualité de l'approximation

* La proximité entre la loi binomiale et la loi normale a déjà été étudiée par Bernard Parzysz dans le Bulletin 473[(6)]. Il avait alors procédé à l'inverse de la méthode exposée ci-dessus, en discrétisant la loi normale à partir de sa fonction de répartition. Il avait établi le même constat que celui qu'on peut effectuer en observant la page de tableur ci-dessus : à savoir que l'approximation est surtout bonne pour les valeurs centrales, c'est-à-dire lorsque X prend des valeurs proches de l'espérance m ; vers les extrémités, l'ordre de grandeur est correct, l'erreur absolue est faible, mais l'erreur relative importante.

* Conséquence : lorsque $m = np$ est entier, la probabilité maximale de la loi binomiale est P(X = m).

(6) Bulletin 473 (2007), article intitulé « Loi binomiale, courbe en cloche et tableur ».

On peut approximer cette probabilité maximale binomiale $P(X = m)$ par la probabilité maximale normale

$$f(m) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}}.$$

Autrement dit

$$P(X = m) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}}.$$

* En revanche il n'est pas opportun d'utiliser cette approximation pour déterminer un intervalle de fluctuation, puisqu'elle s'applique mal aux extrémités concernées.

* Lorsque p s'éloigne de 0,5, l'approximation devient moins satisfaisante, ce qui peut s'expliquer simplement : on voit mal comment une courbe symétrique pourrait approcher une courbe qui ne l'est pas.

* La qualité sera d'autant meilleure que n est grand, ceci étant lié au caractère asymptotique du TML. On voit néanmoins que, pour $n = 50$, ce n'est déjà pas mal.

* On peut utiliser l'outil « courbes de tendance » fourni par le tableur pour chercher la parabole qui approxime le mieux notre « nuage de points » binomial. Ainsi, pour $n = 50$ et $p = 0{,}3$, l'équation de la « parabole de régression » fournie par le tableur est

$$y = -0{,}0489x^2 + 1{,}5973x - 15{,}162$$

alors que la fonction de densité de la loi normale correspondante est définie par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{21\pi}} \times \exp\left(-\frac{1}{21}(x-15)^2\right)$$

dont le logarithme est

$$y = \frac{1}{21}(x-15)^2 - \ln\left(\sqrt{21\pi}\right)$$

soit environ

$$y = -0{,}0476x^2 + 1{,}428x + 12{,}809.$$

Mais lorsqu'on applique l'exponentielle à la fonction du tableur, l'approximation obtenue est beaucoup moins bonne.

Quoi qu'il en soit, la problématique de recherche d'une parabole approchant ce nuage de points peut être une piste de travail intéressante avec les élèves.

Une utilisation en classe ?

En terminale, les lois normales seront introduites pour modéliser les « grandes » binomiales, c'est-à-dire celles dont les paramètres vérifient certaines conditions. Le passage au logarithme peut éclairer l'expression de la fonction formée par les bâtons de la binomiale, puisqu'il suggère une expression du type $\exp\left(ax^2 + bx + c\right)$, ou même $\exp\left(a(x-m)^2 + b\right)$, avec a et b négatifs. La fonction en jeu dans l'intégrale de

N(m;s^2) apparaît alors « naturellement ». Néanmoins, cette approche risque peut-être d'accentuer la confusion entre lois discrètes (convergence point par point suggérée ici) et lois continues (TML = convergence sur des intervalles).

2. Une approximation des coefficients binomiaux

Les deux courbes construites par Baptiste montrent que la distribution des coefficients binomiaux semble suivre approximativement une loi normale (courbe en cloche), ce qui se traduit par le fait que leurs logarithmes forment approximativement une parabole(7). On peut effectivement utiliser le travail précédent pour expliquer ce phénomène.

Prenons B(n;0,5)(8) :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=a)=\binom{n}{a}\times 0,5^n$$

et utilisons le résultat ci-dessus

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=a)\approx f(a).$$

L'expression

$$f(a)=\frac{1}{s\sqrt{2\pi}}\times\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(a-m)^2}{s^2}\right)$$

devient, pour $m = 0{,}5n$ et $s^2 = 0{,}25n$:

$$f(a)=\frac{2}{\sqrt{2n\pi}}\times\exp\left(\frac{-(a-0,5n)^2}{0,5n}\right).$$

D'où :

$$\boxed{\binom{n}{a}\approx\frac{2^{n+1}}{\sqrt{2n\pi}}\times\exp\left(\frac{-(a-0,5n)^2}{0,5n}\right)}$$

(≈ ayant le sens de « *est approximativement égal à* »)
Le passage au logarithme donne bien une parabole d'équation

$$y=-\frac{1}{0,5n}(x-0,5n)^2+b.$$

Exemple pour $n = 50$:

$$\boxed{\binom{50}{a}\approx\frac{2^{51}}{\sqrt{100\pi}}\times\exp\left(-\frac{(a-25)^2}{25}\right)}.$$

(7) Le passage au logarithme d'une fonction $f(x)=\frac{1}{s\sqrt{2\pi}}\times\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x-m)^2}{s^2}\right)$ donne une expression de la forme $\ln\left(f(x)\right)=a(x-m)^2+b$ avec $a=-\frac{1}{2s^2}$ et $b=-\ln\left(s\sqrt{2\pi}\right)$.

(8) On prend $p = 0{,}5$ puisque c'est la valeur pour laquelle l'approximation de la binomiale par la normale est la meilleure, et en plus les calculs sont simples.

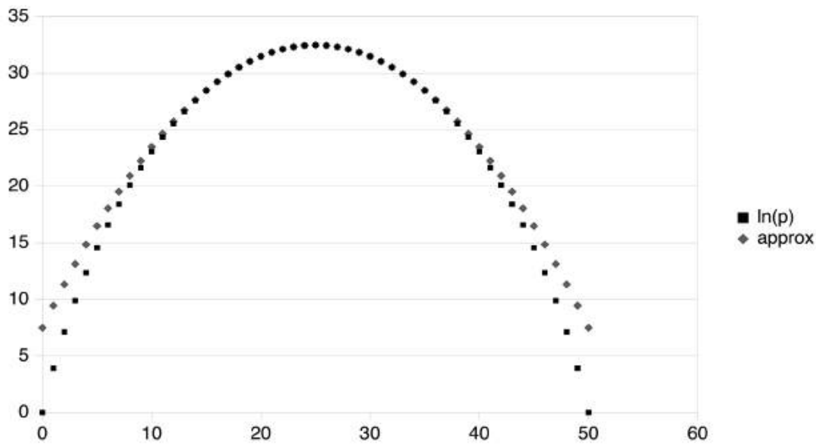
Sachant que

$$\ln\left(\frac{2^{51}}{\sqrt{100\pi}}\right) \approx 32,48,$$

on obtient :

$$\ln\left(\binom{50}{a}\right) \approx -0,04(a-25)^2 + 32,48.$$

Et effectivement, la comparaison sur tableur montre que l'approximation des ln(C) par la parabole est plutôt bonne pour des valeurs de *a* centrales.



De la même manière que pour la loi binomiale, on pourrait utiliser l'outil « courbe de tendance » pour améliorer cette approximation, mais la méthode décrite ici fournit une formule explicite.

Conclusion

D'aucuns auront associé ce résultat à la formule de Stirling. La propriété évoquée peut aussi être reliée à la droite de Henry et à la représentation graphique des termes du développement du binôme (cumulés) sur du papier gausso-arithmétique, en constatant leur « presque alignement ».

En ce qui me concerne, André Deledicq utilise l'expression « jubilation en mathématique », et c'est bien le sentiment que j'ai ressenti lorsque Baptiste m'a montré ses deux courbes. D'abord pour l'illumination produite quand des pièces s'assemblent comme en un puzzle. Ensuite pour les pistes possibles qui s'ouvrent pour un travail en classe. Et enfin, parce que ceci montre que l'ouverture proposée en dehors de l'école(9) peut alimenter la curiosité de nos élèves pour les mathématiques.

(9) Par les magazines (Tangente), les jeux et concours, les romans (D. Guedj, …) et autres livres : il semble que toute une littérature liée aux mathématiques se développe actuellement, notre discipline devenant plus médiatisée.