Les problèmes de l'APMEP

Les propositions de problèmes, solutions ou commentaires, sont à envoyer à

Max HOCHART
13, rue des Garennes
63 800 Cournon d'Auvergne
ou
hochartmax@yahoo.fr

Énoncés des nouveaux problèmes

Problème 501–1 (Franck Gautier, Pérignat lès Sarliève)

Montrer que le produit de huit entiers consécutifs non nuls ne peut être un carré parfait.

Problème 501–2 (Michel Lafond, Dijon)

Soit $c \in \mathbb{N}$ et K la suite définie par

$$K_0 = 0,\ K_1 = 1 \text{ et pour } n \geq 2\ K_n = (c-2)K_{n-1} - K_{n-2} + 2.$$

Montrer que si c est un carré parfait, alors tous les K_n sont des carrés parfaits.

Problème 501–3

Soit p un nombre premier. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note a_n le nombre d'éléments d'ordre p du groupe symétrique S_n. Calculer la série entière

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n!} x^n.$$

Solutions des problèmes antérieurs

Problème 493–3 (Michel Lafond)

Pour un entier strictement positif n, on note p_n la probabilité pour que, dans le système décimal, deux nombres entiers à n chiffres (dont l'écriture ne commence pas par 0), choisis indépendamment, au hasard, aient un produit ayant $2n$ chiffres. Étudier p_n. En particulier, montrer que

$$p_n = \frac{10}{81}\left(9 - \ln(10)\right) \pm 3\times 10^{-n}.$$

Solution de Michel Lafond (Dijon)

Dans toute la suite, on notera

$$p = \frac{10}{81}\left(9 - \ln(10)\right) = 0{,}826\,41\ldots$$

Si $n = 1$, il y a 81 couples de chiffres non nuls dont 58 ont un produit à deux chiffres, à savoir les 5 couples $(2,x)$ pour $x \in [[5,9]]$, les 6 couples $(3,x)$ pour $x \in [[4,9]]$, les 7 couples $(4,x)$ pour $x \in [[3,9]]$, les 8 couples $(5,x)$ pour $x \in [[2,9]]$, les 8 couples $(6,x)$ pour $x \in [[2,9]]$, les 8 couples $(7,x)$ pour $x \in [[2, 9]]$, les 8 couples $(8,x)$ pour $x \in [[2,9]]$, et enfin les 8 couples $(9,x)$ pour $x \in [[2,9]]$. Donc

$$p_1 = \frac{58}{81} = 0,716\ldots,$$

dont l'écart avec p est $0,110\ldots < 3 \times 10^{-1}$.

On suppose désormais $n \geq 2$. Les nombres à n chiffres sont les éléments de $[[10^{n-1}, 10^n - 1]]$. Le nombre des couples possibles de nombres à n chiffres est donc

$$\left(10^n - 10^{n-1}\right)^2 = 81 \times 10^{2n-2}.$$

Si les nombres k, l ont n chiffres, leur produit est compris (au sens large) entre 10^{2n-2} et $\left(10^n - 1\right)^2$, ce dernier terme étant strictement inférieur à 10^{2n}. Donc le produit kl a soit $2n - 1$ chiffres, soit $2n$ chiffres.

Calculons le nombre S_n de couples défavorables (produit de $2n - 1$ chiffres), c'est-à-dire le nombre de couples $(k,l) \in [[10^{n-1},10^n - 1]] \times [[10^{n-1},10^n - 1]]$ tels que $kl < 10^{2n-1}$. Le nombre k parcourt $[[10^{n-1},10^n - 1]]$ et pour un k fixé, le nombre l varie de 10^{n-1} à $\left\lfloor \dfrac{10^{2n-1} - 1}{k} \right\rfloor$, où l'on a noté $\lfloor\ \rfloor$ la fonction partie entière. Ainsi,

$$S_n = \sum_{k=10^{n-1}}^{10^n - 1} \left(\left\lfloor \frac{10^{2n-1} - 1}{k} \right\rfloor - 10^{n-1} + 1 \right) = U_n + V_n, \tag{1}$$

avec

$$U_n = \sum_{k=10^{n-1}}^{10^n - 1} \left\lfloor \frac{10^{2n-1} - 1}{k} \right\rfloor,$$

que l'on va étudier ci-après, et

$$V_n = \sum_{k=10^{n-1}}^{10^n - 1} \left(10^{n-1} - 1\right) = \left(10^n - 10^{n-1}\right) \times \left(10^{n-1} - 1\right),$$

soit encore

$$V_n = 9 \times 10^{n-1} \times \left(10^{n-1} - 1\right) = 9 \times 10^{n-2} - 9 \times 10^{n-1}. \tag{2}$$

Pour estimer U_n, on part de l'encadrement suivant, valable pour a, b, $N \in \mathbb{N}^*$ et $1 < a < b$:

$$N \ln\left(\frac{b+1}{a}\right) - (b - a + 1) \leq \sum_{k=a}^{b} \left\lfloor \frac{N}{k} \right\rfloor \leq N \ln\left(\frac{b}{a-1}\right) \tag{3}$$

La démonstration de cet encadrement est classique. Pour la majoration,

$$\sum_{k=a}^{b}\left\lfloor \frac{\mathrm{N}}{k}\right\rfloor \le \sum_{k=a}^{b}\frac{\mathrm{N}}{k} \le \mathrm{N}\int_{a-1}^{b}\frac{\mathrm{d}t}{t} \le \mathrm{N}\ln\left(\frac{b}{a-1}\right).$$

Pour la minoration,

$$\begin{aligned}\sum_{k=a}^{b}\left\lfloor \frac{\mathrm{N}}{k}\right\rfloor &\ge \sum_{k=a}^{b}\left(\frac{\mathrm{N}}{k}-1\right)\\ &\ge \sum_{k=a}^{b}\frac{\mathrm{N}}{k}-(b-a+1)\\ &\ge \mathrm{N}\int_{a}^{b+1}\frac{1}{t}\mathrm{d}t-(b-a+1)\\ &\ge \mathrm{N}\ln\left(\frac{b+1}{a}\right)-(b-a+1).\end{aligned}$$

Appliquée à $\mathrm{N} = 10^{2n-1} - 1$, $a = 10^{n-1}$, $b = 10^{n} - 1$, la minoration dans l'encadrement (3) donne

$$\mathrm{U}_n \ge \left(10^{2n-1}-1\right)\ln\left(\frac{10^n}{10^{n-1}}\right)-\left(10^n-10^{n-1}\right),$$

d'où l'on déduit

$$\mathrm{U}_n \ge \left(10^{2n-1}-1\right)\ln(10)-10^n. \tag{4}$$

La majoration dans l'encadrement (3) donne

$$\mathrm{U}_n \le \left(10^{2n-1}-1\right)\ln\left(\frac{10^n-1}{10^{n-1}-1}\right)=\left(10^{2n-1}-1\right)\ln\left(10+\frac{9}{10^{n-1}-1}\right).$$

Or

$$\begin{aligned}\ln\left(10+\frac{9}{10^{n-1}-1}\right)&=\ln(10)+\ln\left(1+\frac{9}{10^n-10}\right)\\ &\le \ln(10)+\frac{9}{10^n-10}\\ &\le \ln(10)+\frac{1}{10^{n-1}-1}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathrm{U}_n \le \left(10^{2n-1}-1\right)\ln(10)+\frac{10^{2n-1}-1}{10^{n-1}-1}.$$

Facilement, pour $n \ge 2$,

$$\frac{10^{2n-1}-1}{10^{n-1}-1} \le 10^n+11$$

et en majorant $\left(10^{2n-1}-1\right)\ln(10)$ par $10^{2n-1}\ln(10)$, on obtient

$$U_n \leq 10^{2n-1}\ln(10)+10^n+11. \qquad (5)$$

La minoration et la majoration de U_n fournies par (4) et (5) et la formule (2) donnant V_n permettent d'obtenir un encadrement de $S_n = U_n - V_n$. Pour la majoration,

$$\begin{aligned} S_n &\leq 10^{2n-1}\ln(10)+10^n+11-9\times10^{2n-2}+9\times10^{n-1} \\ &\leq 10^{2n-2}\left(10\ln(10)-9\right)+\varepsilon_n \end{aligned}$$

où

$$\varepsilon_n = 10^n+9\times10^{n-1}+11 \leq 201\times10^{n-2}.$$

Ainsi,

$$S_n \leq 10^{2n-2}\left(10\ln(10)-9\right)+201\times10^{n-2}. \qquad (6)$$

Pour la minoration, en partant de (4),

$$\begin{aligned} S_n &\geq \left(10^{2n-1}-1\right)\ln(10)-10^n-9\times10^{2n-2}+9\times10^{n-1} \\ &\geq 10^{2n-2}\left(10\ln(10)-9\right)-\delta_n \end{aligned}$$

où

$$\delta_n = 10^n-9\times10^{n-1}+\ln(10) = 10^{n-1}+\ln(10) \leq \varepsilon_n.$$

En conclusion

$$\left|S_n-10^{2n-2}\left(10\ln(10)\right)-9\right| \leq 201\times10^{n-2}. \qquad (7)$$

soit

$$\left|\frac{S_n}{81\times10^{2n-2}}-\frac{10\ln(10)-9}{81}\right| \leq \frac{201\times10^{n-2}}{81\times10^{2n-2}} < 3\times10^{-n}.$$

Or, par définition de S_n,

$$1-p_n = \frac{S_n}{81\times10^{2n-2}}.$$

Donc

$$\left|1-p_n-\frac{10\ln(10)-9}{81}\right| < 3\times10^{-n},$$

soit, comme annoncé,

$$\left|p_n-\frac{10}{81}\left(9-\ln(10)\right)\right| < 3\times10^{-n}.$$

Michel Lafond termine en donnant les premières valeurs (exactes et approchées) des p_n. Il conjecture également que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n < \frac{10}{81}\left(9-\ln(10)\right)$.

Problème 494–1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{P} \in \mathbb{Z}[\mathrm{X}]$ tels que l'équation

$$\left|\mathrm{P}(k)\right| = 1$$

admette n racines distinctes dans $\mathbb{Z}$. Montrer que

$$n - \deg(\mathrm{P}) \leq 2.$$

Solutions de Jean-Claude Blanchard (Brunoy), Jean-Claude Carréga (Lyon), Raymond Heitz (Piriac) et Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques).

Soit p le nombre de solutions entières de l'équation $\mathrm{P}(x) = -1$, notées $a_1, \ldots, a_p$ lorsque $p \neq 0$ et soit $\mathcal{A}$ leur ensemble. Soit q le nombre de solutions entières de l'équation $\mathrm{P}(x) = 1$, notées $b_1, \ldots, b_q$ lorsque $q \neq 0$ et soit $\mathcal{B}$ leur ensemble.

Si l'entier p est nul, alors $n = q \leq \deg(\mathrm{P})$ puisque l'équation $\mathrm{P}(x) = 1$ a au plus $\deg(\mathrm{P})$ solutions. De même, si l'entier q est nul, alors $n = p \leq \deg(\mathrm{P})$ puisque l'équation $\mathrm{P}(x) = -1$ a au plus $\deg(\mathrm{P})$ solutions.

On suppose désormais $pq \neq 0$. Puisque les entiers $a_1, \ldots, a_p$ sont les racines entières du polynôme $\mathrm{P}(\mathrm{X}) + 1$, il existe $\mathrm{A} \in \mathbb{Z}[\mathrm{X}]$ tel que

$$\mathrm{P}(\mathrm{X})+1 = \mathrm{A}(\mathrm{X})\prod_{k=1}^{p}(\mathrm{X}-a_k).$$

Pour $j \in [[1, q]]$, $\mathrm{P}(b_j) = 1$ donc

$$\mathrm{A}(b_j)\prod_{k=1}^{p}(b_j - a_k) = 2.$$

Comme le polynôme A est à coefficients entiers, les distances $\left|b_j - a_k\right|$ valent 1 ou 2, et pour un j fixé, il existe au plus un indice k tel que la distance $\left|b_j - a_k\right|$ soit égale à 2. Par conséquent, pour $a_k, a_l \in \mathcal{A}$,

$$\left|a_k - a_l\right| \leq \left|a_k - b_j\right| + \left|b_j - a_l\right| \leq 3.$$

En conclusion, pour $a \in \mathcal{A}$ et $b \in \mathcal{B}$, $|a-b| \leq 2$, pour $a, a' \in \mathcal{A}$, $|a-a'| \leq 3$ et par symétrie, pour $b, b' \in \mathcal{B}$, $|b-b'| \leq 3$. Donc $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ est de diamètre au plus 3. Ainsi, si $pq \neq 0$, il existe $r \in \mathbb{Z}$ tels que

$$\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \subset \{r, r+1, r+2, r+3\}.$$

En particulier, $p + q = n \leq 4$. Voici les différents cas possibles, avec des exemples.

• Si $n = 2$, alors $p = q = 1$. On a forcément $\deg(\mathrm{P}) \geq \max(p,q) = 1$ donc $\deg(\mathrm{P}) > n - 2$. C'est le cas de $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}$.

• Si $n = 3$, alors $(p,q) = (2,1)$ ou $(1,2)$. On a $\deg(\mathrm{P}) \geq \max(p,q) = 2$ donc $\deg(\mathrm{P}) > n - 2$. C'est le cas de $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = 2\mathrm{X}^2 - 1$.

• Si $n = 4$, il y a deux cas.

◇ Dans le premier cas, le couple (p,q) vaut $(1,3)$ ou $(3,1)$ Alors $\deg(\mathrm{P}) \geq \max(p,q) = 3$ donc $\deg(\mathrm{P}) > n - 2$. C'est le cas du polynôme ci-dessous :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^3 - 2\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} + 1 = (\mathrm{X} - 2)(\mathrm{X} - 1)(\mathrm{X} + 1) - 1 = \mathrm{X}(\mathrm{X}^2 - 2\mathrm{X} - 1) + 1.$$

◇ Dans le second cas, $p = q = 2$. Alors $\deg(\mathrm{P}) \geq \max(p,q) = 2 = n - 2$. C'est le cas du polynôme $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^2 - \mathrm{X} - 1$ puisque $\mathrm{P}(2) = \mathrm{P}(-1) = 1$ et $\mathrm{P}(0) = \mathrm{P}(1) = -1$.

On a ainsi démontré que, dans tous les cas, $n - \deg(\mathrm{P}) \leq 2$. On note que l'inégalité est même stricte, sauf si $p = q = 2$ et $\deg(\mathrm{P}) = 2$. On peut alors décrire tous les polynômes réalisant l'égalité. Soit P un tel polynôme. Avec les notations précédentes, il existe $r \in \mathbb{Z}$ tel que $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = [[r, r + 3]]$. Quitte à considérer $\mathrm{P}(\mathrm{X} + r + 1)$, on peut supposer que $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = [[-1,2]]$. En changeant ensuite, si nécessaire, $\mathrm{P}(\mathrm{X})$ en $-\mathrm{P}(\mathrm{X})$, on se ramène au cas où -1 appartient à $\mathcal{B}$. Aucun élément de $\mathcal{A}$ ne peut être éloigné de -1 d'une distance strictement supérieure à 2. Donc $\mathcal{B} = \{-1,2\}$ et $\mathcal{A} = \{0,1\}$. Ainsi, le polynôme générique est celui proposé plus haut, à savoir

$$\mathrm{P}_0(\mathrm{X}) = (\mathrm{X} + 1)(\mathrm{X} - 2) + 1 = \mathrm{X}^2 - \mathrm{X} - 1.$$

Les polynômes P réalisant l'égalité $n - \deg(\mathrm{P}) = 2$ sont donc les polynômes suivants :

$$\pm\mathrm{P}_0(\mathrm{X} + r + 1) = \pm(\mathrm{X}^2 + (2r + 1)\mathrm{X} + r^2 + r - 1) \quad (r \in \mathbb{Z}).$$

Jean-Claude Blanchard, **Raymond Heitz** et **Pierre Renfer** ont proposé un tel polynôme (founissant un cas d'égalité). Ces polynômes correspondent aux cas $r = 0$ ou $r = 1$. Enfin, **Raymond Heitz** propose d'élargir la question à l'anneau $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$: pour $\mathrm{P} \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}][\mathrm{X}]$, si l'équation $|\mathrm{P}(z)| = 1$ admet n solutions dans $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$, trouver une majoration de $n - \deg(\mathrm{P})$. Avis aux amateurs.

Problème 494–2 (Question de Jean-Christophe Laugier)

Démontrer, de manière combinatoire si possible, l'égalité suivante, valable pour tous les entiers n, k supérieurs ou égaux à 1 :

$$\sum_{\substack{u_1+u_2+\ldots+u_k=n \\ u_1,u_2,\ldots,u_k\in\mathbb{N}^*}} u_1u_2\ldots u_k = \binom{n+k-1}{2k-1}.$$

Solutions de Jean-Claude Blanchard (Brunoy), Frédéric de Ligt (Montguyon), Jean-Christophe Laugier (Rochefort), Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques).

Deux approches sont proposées. Voici la première, envoyée par **Jean-Claude Blanchard** et **Jean-Christophe Laugier** (avec des modélisations très proches). Elle est purement combinatoire.

On fixe un k-uplet $(u_1,\ldots,u_k)$ d'entiers strictement positifs, de somme n. On considère l'ensemble $P_{u_1,\ldots,u_k}$ des parties $\{x_1,\ldots,x_{2k-1}\}$ (avec $x_1 < \ldots < x_{2k-1}$) contenues dans $[[1, n+k-1]]$ et telles que

$$\begin{aligned} x_2 &= u_1+1 \\ x_4 &= u_1+u_2+2 \\ x_{2k-2} &= u_1+\ldots+u_{k-1}+k-1 \end{aligned}$$

Pour construire un tel k-uplet, il faut choisir x_1 (ce qui fait u_1 choix) puis x_3 (soit u_3 choix), … et enfin x_{2k-1} (soit u_k choix). Le nombre d'éléments de $P_{u_1,\ldots,u_k}$ est donc $u_1u_2\ldots u_k$. D'autre part, toute partie à $2k-1$ éléments de $[[1, n+k-1]]$ est obtenue par un et un seul ensemble $P_{u_1,\ldots,u_k}$, d'où la relation

$$\sum_{\substack{u_1+u_2+\ldots+u_k=n \\ u_1,u_2,\ldots,u_k\in\mathbb{N}^*}} u_1u_2\ldots u_k = \binom{n+k-1}{2k-1}.$$

Jean-Claude Blanchard visualise cela ainsi : sur une grille d'une seule ligne et de $n+k-1$ cases numérotées en partant de la gauche, on doit cocher $2k-1$ cases. On commence par remplir les cases numérotées $x_2, x_4, \ldots, x_{2k-2}$ avec $x_2 < x_4 < \ldots < x_{2k-2}$. On note u_1 le nombre de cases à gauche de la case x_2, u_2 le nombre de cases entre la case x_2 et la case x_3, etc. jusquà u_k le nombre de case à droite de la case x_{2k-2}.

La seconde approche, retenue par **Frédéric de Ligt** et **Pierre Renfer** est analytique et utilise les séries génératrices. On part de la série entière(1)

$$\frac{1}{1-X} = \sum_{n\geq 0} X^n.$$

En dérivant k fois, on obtient

$$\frac{1}{(1-X)^{k+1}} = \sum_{n\geq k}\binom{n}{k}X^{n-k}.$$

Introduisons maintenant

$$F(X) = \sum_{n\geq 0} nX^n = \frac{X}{(1-X)^2}.$$

(1) Nul besoin de préciser le domaine de convergence, car on peut utiliser les séries formelles. Mais ici, toutes les séries entières ont un rayon de convergence égal à 1.

Alors

$$F^k(X) = \sum_{n \geq 0} a_{n,k} X^n.$$

avec

$$a_{n,k} = \sum_{\substack{u_1+u_2+\ldots+u_k=n \\ u_1, u_2, \ldots, u_k \in \mathbb{N}^*}} u_1 u_2 \ldots u_k.$$

Dans la somme définissant $a_{n,k}$, on peut bien sûr se contenter des termes u_1, u_2, …,u_k $\in \mathbb{N}^*$. Par ailleurs,

$$F^k(X) = \frac{X^k}{(1-X)^{2k}} = X^k \sum_{n \geq 2k-1} \binom{n}{2k-1} X^{n-2k+1} = \sum_{n \geq k} \binom{n+k-1}{2k-1} X^n.$$

Par conséquent,

$$a_{n,k} = \binom{n+k-1}{2k-1}.$$

Jean-Christophe Laugier commente sa proposition de problème ainsi : c'est dans l'ouvrage de **Louis Comtet**, « Analyse Combinatoire » (PUF) que figure l'énoncé, sous cette forme : démontrer l'égalité

$$\sum_{\substack{u_1+u_2+\ldots+u_k=n \\ u_1, u_2, \ldots, u_k \in \mathbb{N}^*}} u_1 u_2 \ldots u_k = \frac{n(n^2-1)(n^2-2^2)\ldots(n^2-(k-1)^2)}{(2k-1)!}.$$

L'indication fournie est d'utiliser les fonctions génératrices :

$$\sum_{n \geq 0} a_{n,k} X^n = \left(\sum_{m \geq 0} m X^m \right)^k,$$

ce qui constitue la deuxième approche, exposée ci-dessus.