Exercices de ci, de là

Cette rubrique est faite à partir des propositions de collègues. Elle accueille bien volontiers des exercices même « modestes » mais un peu curieux imaginés ou rencontrés par les collègues soit dans des livres, soit dans des situations exploitées dans leurs classes. N'hésitez donc pas à nous envoyer les exercices piochés « de-ci de-là » qui vous ont plu ou vous ont intrigués. Nous les accepterons avec plaisir et en particulier ceux qui pourraient être mis à la portée d'élèves du secondaire.

Les propositions d'exercices ou les solutions sont à envoyer par mél à :

bruno.alaplantive@free.fr

ou par courrier à :

Jean Fromentin
17 rue de la Roussille
79000 NIORT

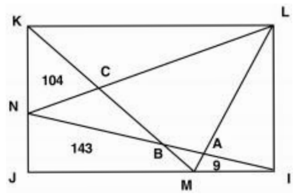
Pour l'envoi des propositions et des solutions, privilégiez, si possible, le courrier électronique. Si vous le pouvez, joignez à votre fichier initial une copie au format PDF pour contrôler en particulier les formules qui sont souvent perturbées d'un logiciel à l'autre. Vous faciliterez ainsi notre tâche. Merci d'avance.

Erratum.
La réponse à la première question du 498-4 est $18{,}5 < f(10) < 22{,}8$ et non celle donnée dans le nº 500, qui répondait à la donnée de l'encadrement pour $f(3)$ au lieu de $f(2)$…

Exercices

Exercice 501-1 Michel Lafond-Dijon

Le rectangle IJKL est partagé en huit domaines.
(Voir figure approximative ci-contre)



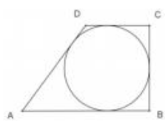
On connaît :aire (CNK) = 104, aire (AMI) = 9 et aire (BMJN) = 143

Déterminer les aires des cinq autres domaines.

Il s'agit d'un prolongement de l'exercice 499-1 B, qui ne s'adresse plus vraiment directement aux élèves…

Exercice 501-2 Daniel Reisz – Auxerre *à proposer à nos élèves*

A. Un trapèze ABCD est circonscrit à un cercle de rayon 2 cm comme le montre la figure ci-contre.
Le côté [CD] mesure 3 cm et les angles en B et C sont



droits.
Calculer l'aire de ABCD.

B. Si les angles d'un triangle ABC sont en progression arithmétique et les côtés en progression géométrique, montrer qu'il est alors équilatéral.

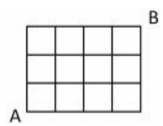
C. Montrer que sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ on a $\sin\sqrt{x} < \sqrt{\sin x}$.

Exercice 501-3 (Jean Théocliste – Valence)

Calculer la valeur exacte de l'intégrale $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{(\cos x)^2 + 1}{1 - \sin x}\,dx$.

Exercice 501-4 ***pioché dans les 36èmes olympiades mathématiques espagnoles***

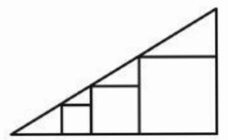
Sur le réseau quadrillé ci-contre formé de 12 carrés, une personne P se déplace de A à B ; une personne Q, de B à A. Elles partent au même instant et vont à la même vitesse en suivant un trajet le plus court possible. À chaque intersection elles choisissent entre les chemins possibles avec une même probabilité.
Quelle est la probabilité que P et Q se croisent en chemin ?



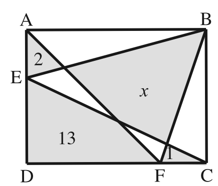
Solutions

Exercice 499-1 ***piochés de-ci, de-là … à proposer à nos élèves***

A. Trois carrés sont placés côte à côte à l'intérieur d'un triangle rectangle, comme le montre la figure ci-contre. Le plus petit carré mesure 16 mm de côté et le côté du plus grand 36 mm. Combien mesure le côté du carré du milieu ?



B. Les segments [BE], [CE], [AF] et [BF] partagent le rectangle ABCD ci-contre en plusieurs régions. Quatre d'entre elles sont ombrées, deux triangles et deux quadrilatères. Leurs aires respectives sont 2, 1, 13 et x. Déterminer la valeur de x.



C. Déterminer tous les couples (x, y) de nombres entiers tels que :

$$\ln x - \ln y = \ln(x - y).$$

Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques, Michel Lafond (Dijon), Raymond Heitz (Piriac), Annie Perrot (Paris), L.G Vidiani (Fontaine les Dijon), Jean-Paul Thabaret (Grenoble), Fabrice Laurent (Provins), Georges Lion (Wallis).

Voici les réponses succinctes.

A. Réponse : 24 mm.
Jean-Paul Thabaret fait remarquer que si a et b sont les côtés des petit et grand carrés, alors $\sqrt{ab}$ *est celui du moyen.*

B. Réponse : $x = 16$ (des égalités d'aire montrent que $x = 2 + 13 + 1$)

C. Réponse : (4,2) est le seul couple solution.
Pour $x > y > 0$ l'équation est $\frac{x}{y} = x - y$ et avec $\frac{x}{y} = k$ $(k > 1)$ on obtient $y = 1 + \frac{1}{k-1}$.

Exercice 499-2 (Georges Lion – Wallis)

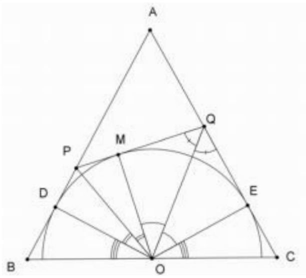
Soit BAC un triangle tel que AB = AC et soit Γ le demi-cercle centré au milieu O de [BC], contenu dans le triangle et tangent à (AB) et (AC) respectivement en D et E. Par un point variable M de Γ on mène la tangente à Γ qui coupe (AB) en P et (AC) en Q.

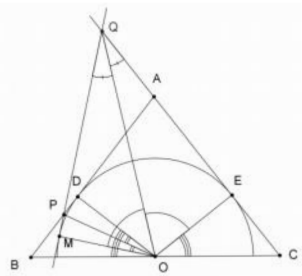
1) Exprimer l'angle $\widehat{POQ}$ en fonction des données fixes de la figure.
2) Trouver une relation caractérisant les points P et Q en termes de longueurs.

Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques, Fabrice Laurent (Provins), Jacques Borowczyk (Tours), Albert Marcout (Sainte Savine), Giovanni Ranieri (Melun), Georges Lion (Wallis).

Voici la solution de Georges Lion.

Par symétrie on se limite au cas où MB < MC et on distingue deux cas selon que M appartient ou non au segment [PQ].





1) Dans le premier cas on a : $\pi = 2\left(\widehat{POQ} + \widehat{BOD}\right)$ donc $\widehat{POQ} = \frac{\pi}{2} - \widehat{BOD} = \widehat{ABC}$.

Dans le second cas on a : $\pi = 2\left(\widehat{MOQ} + \widehat{BOD} - \widehat{MOP}\right)$, donc de même $\widehat{POQ} = \frac{\pi}{2} - \widehat{BOD} = \widehat{ABC}$.

2) Dans le premier cas on a : $\pi = 2\left(\widehat{MOQ} + \widehat{BOP}\right)$, donc $\frac{\pi}{2} - \widehat{MOQ} = \widehat{BOP}$, d'où $\widehat{OQC} = \widehat{POB}$.

Dans le second cas on a : $\pi = 2\left(\widehat{MOQ} + \widehat{BOD} - \widehat{POD}\right)$, donc $\frac{\pi}{2} - \widehat{MOQ} = \widehat{BOP}$, d'où la même conclusion.

En tenant compte de l'égalité $\widehat{PBO} = \widehat{OCQ}$, on déduit que les triangles PBO et OCQ sont semblables ; ce qui entraîne : $\frac{PB}{OC} = \frac{BO}{CQ}$, d'où $PB \times CQ = \frac{BC^2}{4}$.

Nota. Pensant sans aucun doute à l'association, Jacques Borowczyk propose un prolongement possible qu'il intitule naturellement : **Le triangle APM**.
Avec les mêmes données, montrer que les cercles exinscrits des triangles APM et AQM dans l'angle de sommet M sont tangents à la droite (AM) au même point N.

Exercice 499-3 (Bernard Collignon – Coursan)

Soit l'équation du second degré $x^2 + b\,x + c = 0$.

Les nombres b et c sont tirés au hasard dans l'intervalle [–5 ; 5] ; on appelle X la variable aléatoire égale au nombre de solutions réelles de cette équation.

Donner la loi de probabilité de X et calculer l'espérance E(X) dans les cas suivants :
1) b et c sont des nombres entiers relatifs.
2) b et c sont des nombres réels.

Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Giovanni Ranieri (Melun), Michel Lafond (Dijon), Annie Perrot (Paris), Jean-Paul Thabaret (Grenoble), Jean Gounon (Chardonnay), Bernard Collignon (Coursan).

Voici la solution de Annie Perrot.

1) Si b et c sont des entiers relatifs, ils prennent de manière équiprobable toutes les valeurs entières entre –5 et 5. Calculons dans chaque cas le discriminant $b^2 - 4c$.

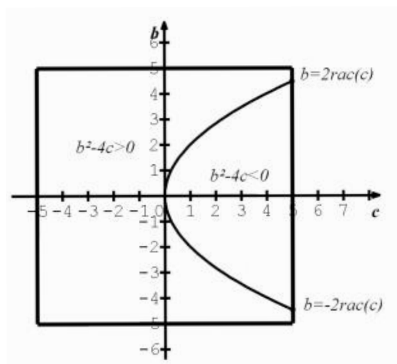
Il y a 121 cas équiprobables, dont (cf. tableau page suivante) :
- 31 donnent $\Delta < 0$
- 5 donnent $\Delta = 0$
- 85 donnent $\Delta > 0$.

Donc
- P(X = 0) = 31/121
- P(X = 1) = 5/121
- P(X = 2) = 85/121

Et E(X) = 175/121≈1,446

b \ c	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
-5	45	41	37	33	29	25	21	17	13	9	5
-4	36	32	28	24	20	16	12	8	4	0	-4
-3	29	25	21	17	13	9	5	1	-3	-7	-11
-2	24	20	16	12	8	4	0	-4	-8	-12	-16
-1	21	17	13	9	5	1	-3	-7	-11	-15	-19
0	20	16	12	8	4	0	-4	-8	-12	-16	-20
1	21	17	13	9	5	1	-3	-7	-11	-15	-19
2	24	20	16	12	8	4	0	-4	-8	-12	-16
3	29	25	21	17	13	9	5	1	-3	-7	-11
4	36	32	28	24	20	16	12	8	4	0	-4
5	45	41	37	33	29	25	21	17	13	9	5

2. Si b et c sont des réels



$$P(X=0)=\frac{\text{aire D}}{\text{aire carré}}$$

où

$$D=\{M(c;b):b^2-4c<0\,;\ -5\leq b\leq 5\,;-5\leq c\leq 5\}$$

d'où

$$P(X=0)=\frac{2}{100}\int_0^5 2\sqrt{x}\,dx=\frac{4}{100}\times\frac{2}{3}\times 5\sqrt{5}$$

$$=\frac{2}{15}\sqrt{5}\approx 0{,}298$$

$$P(X=1)=0$$

$$P(X=2)=1-P(X=0)=1-\frac{2}{15}\sqrt{5}\approx 0{,}702$$

$$E(X)=2P(X=2)=2-\frac{4}{15}\sqrt{5}\approx 1{,}404$$

Nota. Michel Lafond a également étudié le cas plus général où b et c appartiennent à [–M ; M] (M nombre réel positif) et aussi réalisé des vérifications à l'aide de programmes effectués avec Maple.

Bernard Collignon, reste pour sa part dans l'intervalle [–5 ; 5] pour les paramètres, mais a prolongé l'étude à l'équation complète $ax^2 + bx + c = 0$. Il propose également les algorithmes réalisés avec Algobox.

Leurs travaux sont disponibles sur le site de l'association.

Exercice 499-4 (Georges Kocher – Ravières)

Prouver que pour tout entier naturel n non nul on a : $\sum_{k=1}^{n} \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n+1} = \frac{1}{2}$.

Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Giovanni Ranieri (Melun), Michel Lafond (Dijon), Annie Perrot (Paris), Jean-Paul Thabaret (Grenoble), Jean Gounon (Chardonnay), Fabrice Laurent (Provins), Michel Sarrouy (Mende), Pierre Lapôtre (Calais), L.G Vidiani (Fontaine les Dijon), Angela Gammella-Mathieu (Metz), Raymond Heitz (Piriac), Georges Kocher (Ravières), Georges Lion (Wallis).

Voici la solution de Jean-Paul Thabaret.

Soit n un entier naturel non nul.

Posons $\alpha = \frac{\pi}{2n+1}$.

$\sum_{k=1}^{n} \cos(2k-1)\alpha$ est la partie réelle de $\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2k-1)\alpha} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} \sum_{k=1}^{n} \left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}\right)^k$.

Comme $\frac{1}{2n+1}$ n'est pas un entier, $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}$ n'est pas égal à 1 ; donc

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} \sum_{k=1}^{n} \left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}\right)^k &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha} \frac{1-\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}\right)^n}{1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \frac{1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}n\alpha}}{1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}} \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\alpha}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\alpha}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\alpha}\right)}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\alpha} \frac{\sin n\alpha}{\sin\alpha}.\end{aligned}$$

Alors

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(2k-1)\alpha = \cos n\alpha \times \frac{\sin n\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{2} \times \frac{\sin 2n\alpha}{\sin\alpha}.$$

Or $2n\alpha + \alpha = (2n+1)\alpha = \pi$, donc $\sin 2n\alpha = \sin\alpha$ et finalement

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(2k-1)\frac{\pi}{2n+1} = \frac{1}{2}.$$

Nota. Outre cette solution, Michel Sarrouy en propose deux autres. Son document est disponible sur le site de l'association.