Dérivée arithmétique d'un nombre

Richard Choulet(*)

Préambule : ceci n'est pas à mettre dans toutes les mains et sous tous les yeux. Puristes s'abstenir ! Quoique…

I. Introduction

$\left(\sqrt{2}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ est une erreur classique qui apparaît souvent dans les premiers balbutiements sur la dérivation des fonctions ! Nous allons donner un sens à cette formule en parlant de dérivé d'un entier puis de dérivé d'un nombre irrationnel. L'idée est que le dérivé n' d'un entier naturel n satisfasse :

- $\left(n^k\right)' = kn^{k-1}n'$ $\left(k \geq 2\right)$; dès lors en vertu de $1^2 = 1$, obligatoirement $1' = 0$;
- mais à coup sûr pas la linéarité car, à ce moment, pour tout n : de $n = 1 + \ldots + 1$, vient $n' = 0$ ce qui est sans intérêt. Comment faire ?
- la relation de Leibniz : $(ab)' = a'b + ab'$. Sauvé !

II. Dérivé d'entier naturel

On construit une « dérivation » D, sur l'ensemble des entiers naturels non nuls (on note n' l'entier $\mathrm{D}(n)$ pour simplifier) en imposant :

* (1) $p' = 1$ pour tout nombre premier p ;
* (2) $(ab)' = a'b + ab'$ pour tous entiers a et b dite relation de Leibniz.

Ainsi, par exemple : $6' = (2 \times 3)' = 2 \times 1 + 1 \times 3 = 5$; $12' = 16$.

Remarquons tout de suite que, quel que soit n, $n' \neq 0$ si et seulement si $n > 1$ et $n' = 1$ si et seulement si n est premier.

Compte tenu de (1) et (2), prenant $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ non nul, on a alors :

$$n' = n\sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{p_i},$$

(où $\left(p_i\right)$ est la suite des nombres premiers et les α_i des entiers naturels)(1).

(*) richardchoulet@wanadoo.fr

(1) Rien n'empêche en désignant par $\left(u_n\right)$ une suite quelconque d'entiers, de remplacer l'axiome (1) par $\mathrm{D}\left(p_i\right) = u_i$ (l'axiome (2), lui, est gardé) et de construire une autre dérivation par $n' = n\sum_{i=1}^{k} \dfrac{u_i\alpha_i}{p_i}$.

On a ainsi : $60' = 60\left(\frac{2}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right) = 92$. En poursuivant avec 16, plus facile à utiliser : $16'' = 80$, $16''' = 176$.

Par ailleurs on démontre que $n' \leq \frac{n \ln n}{2 \ln 2}$ et $n' \geq 2\sqrt{n}$ sans amélioration possible puisque l'égalité est satisfaite, pour chacune des deux, dans une infinité de cas.

III. Dérivé de réels particuliers

1. pris dans ℤ

Déjà de $(-1)^2 = 1$ et (2) vient en dérivant : $(-1)' = 0$. Ensuite on n'a pas le choix pour étendre la définition aux éléments négatifs de $\mathbb{Z}$ en respectant (2) puisqu'on doit avoir :

$$(-x)' = ((-1)x)' = 0 \times x + (-1)x' = -x'$$

soit

$$(-x)' = -x'.$$

Par exemple $(-5)' = -1$, $(-10)' = -7$.

2. pris dans Q

Pour $r \in \mathbb{Q}^+$, écrit sous la forme $\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ $(\alpha_i \in \mathbb{Z})$, posons par définition :

$$r' = r\sum_{i=1}^{k}\frac{\alpha_i}{p_i}.$$

Cette définition est cohérente avec (1) et (2) ; pour établir (2) il suffit de prendre $r = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ et $s = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\beta_i} \prod_{i=k+1}^{l} p_i^{\gamma_i}$ et d'appliquer la définition.

Ainsi :

$$\left(\frac{10}{9}\right)' = \left(2\times 5\times 3^{-2}\right)' = \frac{10}{9}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}-\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{27},$$

$$\left(\frac{7}{6}\right)' = \frac{7}{6}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) = \frac{7}{6}\left(\frac{-29}{2\times 3\times 7}\right) = -\frac{29}{36}.$$

Comme $\left(\frac{1}{n}\right)' = -\frac{n'}{n^2}$ se déduit « classiquement » de $n \times \frac{1}{n} = 1$ en dérivant, la préservation de (2) fait que, pour tous rationnels a et b non nuls :

$$\left(\frac{a}{b}\right)' = \frac{a'b - ab'}{b^2}$$

et cela ne dépend pas du représentant choisi pour les rationnels utilisés.

3. pris dans les irrationnels

D'abord on remarque que pour tout p_i premier et tout α_i de $\mathbb{Q}$

$$\mathrm{P} = \prod_{i=1}^{\kappa} p_i^{\alpha_i} = 1 \Leftrightarrow \forall\, i \in [[1;k]]\ \alpha_i = 0.$$

Ceci est évident lorsque tous les α_i sont entiers naturels ; lorsque α_i est rationnel on prend m de $\mathbb{Z}$ de sorte que $\beta_i = m\alpha_i$ soit dans $\mathbb{Z}$ pour tout i. On a ainsi $\mathrm{P}^m = 1$ ce qui donne $\beta_i = 0$ et aussi $\alpha_i = 0$, pour tout i.
La définition du dérivé peut alors être étendue à tout réel x, pouvant s'écrire sous la forme $x = \pm\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ $(\alpha_i \in \mathbb{Q})$ par :

$$x' = \pm x \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{p_i}.$$

Nous y voilà :

$$\sqrt{2}' = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)' = \sqrt{2}\,\frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Il est donc clair qu'assez peu de réels se trouvent avoir un dérivé ! Quels sont-ils finalement ? Déjà, dans l'écriture ci-dessus, en séparant les exposants suivant le signe, on fait apparaître un quotient de produits de nombres premiers élevés à un exposant rationnel strictement positif. En prenant un multiple des deux PPCM des dénominateurs des exposants quotients en haut d'une part, et des dénominateurs des exposants quotients en bas d'autre part, on voit que les réels susceptibles de voir s'appliquer à eux la définition forment le sous groupe multiplicatif de $(\mathbb{R}\ ;\times)$ des nombres du type $\pm\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$ où a, b et n sont entiers naturels non nuls. Cet ensemble est donc dénombrable. Voici un exemple de transformations qui illustre la remarque générale ci-dessus :

$$2^{-\frac{4}{5}} \times 3^{\frac{2}{7}} \times 5^{-\frac{3}{2}} \times 7^{\frac{1}{4}} = \frac{3^{\frac{2}{7}} \times 7^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{4}{5}} \times 5^{\frac{3}{2}}} = \frac{3^{\frac{8}{28}} \times 7^{\frac{7}{28}}}{2^{\frac{8}{10}} \times 5^{\frac{15}{10}}} = \frac{\left(3^8 \times 7^7\right)^{\frac{1}{28}}}{\left(2^8 \times 5^{15}\right)^{\frac{1}{10}}} = \left(\frac{\left(3^8 \times 7^7\right)^8}{\left(2^8 \times 5^{15}\right)^{14}}\right)^{\frac{1}{140}}.$$

$\frac{1}{\sqrt{3}+1}$, $\sqrt{3+\sqrt{5}}$ ou π, par exemple, se voient exclus de cette magnifique définition car cela reviendrait à dire, plus ou moins rapidement, que $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ ou π sont rationnels.

IV. Conclusion

Contrairement aux apparences, cet article n'a pas présenté des élucubrations mais des mathématiques contemporaines aux prolongements insoupçonnés.

Qui dit dérivé, dit équations différentielles ; le problème de résolution de la simple équation $n' = n + 1$ est délicat et à rattacher aux nombres de Giuga, mais ceci est une autre histoire.

Et ainsi que commence la conclusion de [2] : *This article is our expression of the pleasure being a mathematician. We have written it because we found the subject to be very attractive and wanted to share our joy with others.*

V. Références

[1] E. J Barbeau, Remark on an arithmetic derivative. *Canad. Math. Bull.* , 4, (1961), 117-122 : accès facile à l'original sur le site de cette revue.

[2] V. Ufnarovski et Bo Ahlander, How to Differentiate a number, *Journal of Integer Sequences*, 6, (2003), Article 03.3.4 : facile à consulter sur internet : http ://www.cs.uwaterloo.ca/journals/JIS/

Merci aux relecteurs Marc, Jean-Pierre, Raymond et Julien pour leurs remarques avisées dont j'ai globalement tenu compte.