Le problème du sofa

Bernard Langer(*)

Comment faire passer, en le glissant sans le soulever, un sofa indéformable, dont l'aire de l'assise est la plus grande possible, dans un couloir de largeur constante (égale à 1) présentant un virage à angle droit ?

Ce problème a été posé pour la première fois par le mathématicien Léo Moser en 1966.
En 1968 J.M. Hammersley proposa une forme de sofa d'aire $\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi} \simeq 2{,}2074\ldots$ et prouva par la suite que le sofa optimal avait une aire au plus égale à $2\sqrt{2} \simeq 2{,}8284\ldots$.
En 1991 Joseph L. Gerver améliora la proposition de Hammersley en proposant un sofa d'aire 2,2195… constitué de 18 portions de courbes !
À l'heure actuelle la valeur exacte de la *constante du sofa* n'est pas établie.

Dans cet article nous allons étudier quelques formes de sofa en abordant le problème d'une manière simple avec l'espoir de déboucher éventuellement sur l'une ou l'autre activité de géométrie dynamique exploitable en classe… Au final nous n'obtiendrons pas de résultats spectaculaires mais le problème nous parait suffisamment plaisant pour retenir l'attention du lecteur et pourquoi pas lui donner l'occasion d'exercer sa sagacité en étudiant d'autres formes de sofa plus confortables.

Le merveilleux logiciel Geogebra (http://www.geogebra.org/cms/) s'est révélé un outil extraordinaire pour conjecturer, expérimenter, contrôler. Les fichiers Geogebra utilisés, en particulier ceux dont sont issues les figures de ce document, sont librement téléchargeables sur le site de l'APMEP.

Pour lire cet article l'idéal serait d'afficher simultanément le fichier Sofa.html sur l'écran de l'ordinateur afin de bénéficier des animations (pour le moment) impossibles à réaliser sur le papier…

1. Deux exemples pour commencer

Un sofa carré de côté 1 donc d'aire 1 passe dans le couloir en utilisant deux translations.

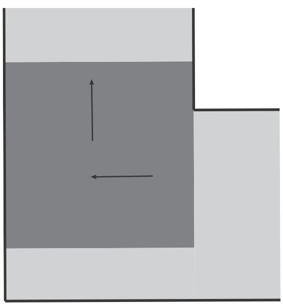


Fig. 1

En notant ψ la *constante du sofa* il est donc acquis que $\psi \geq 1$.

(*) bernard.langer@laposte.net

Une rotation de 90° autour du coin saillant intérieur du couloir permet à un sofa en demi-disque de tourner dans le couloir.

Ceci prouve que $\gamma \geq \frac{\pi}{2} = 1{,}5707\ldots$

Par la suite, nous partirons d'un sofa de forme rectangulaire et nous supposerons qu'il est déplacé en gardant deux coins (A et B) en contact avec les murs du couloir.

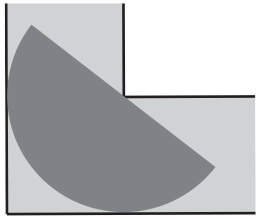


Fig. 2

Voici la situation dans le cas d'un rectangle :

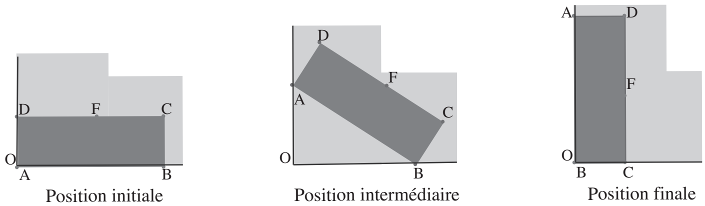


Fig. 3

2. Un majorant de l'aire

Nous allons prouver que, *quelle que soit sa forme*, l'aire du sofa est au plus égale à $2\sqrt{2}$ comme il a été signalé plus haut.

- Le sofa est nécessairement contenu dans une bande de largeur 1.
- Lorsque le sofa prend le virage, cette bande se trouvera, à mi-virage, dans la position de la figure 4, une mesure de l'angle $\widehat{\text{OAB}}$ étant égale à 45°.
- Si le sofa atteint cette position il pourra terminer le virage sa trajectoire étant symétrique par rapport à l'axe (OE).
- L'aire du sofa est donc majorée par l'aire de l'intersection d'une bande de largeur 1 placée en biais à 45° avec les couloirs comme illustré sur la figure 4.

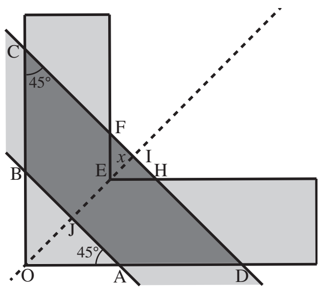


Fig. 4

- Dans sa position à 45° cette bande se trouvera à une distance d = OJ plus ou moins grande du point O en respectant néanmoins la contrainte $0 < d < \sqrt{2}$.

En notant a l'aire du polygone ABCFEHD, on obtient immédiatement :

$$a = 2 \times \text{aire}(\text{JBCFE})$$
$$a = 2\left[\text{aire}(\text{JBCI}) - \text{aire}(\text{FEI})\right]$$

Par conséquent :

$$2\left[\left(\mathrm{BJ}+\mathrm{CI}\right)\frac{\mathrm{IJ}}{2}-\frac{\mathrm{EI}^2}{2}\right]=\mathrm{IJ}\left(\mathrm{BJ}+\mathrm{CI}\right)-\mathrm{EI}^2=\mathrm{BJ}+\mathrm{CI}-\mathrm{EI}^2$$

puisque IJ = 1. En posant x = FI et en remarquant que :

$$\mathrm{CI}=\mathrm{OI}=\mathrm{OE}+\mathrm{EI}=\sqrt{2}+x$$

et

$$\mathrm{BJ}=\mathrm{OJ}=\mathrm{OI}-\mathrm{IJ}=\sqrt{2}+x-1$$

on obtient :

$$a=\left(\sqrt{2}+x-1\right)+\left(\sqrt{2}+x\right)-x^2=2\sqrt{2}-\left(x-1\right)^2.$$

Il est alors clair que a est majoré par $2\sqrt{2}$

Malheureusement on s'assure aisément que ce type de sofa (tel ABCFEHD de la figure 4) ne prend pas le virage du couloir…

3. Etude du sofa rectangulaire

Dans ce paragraphe nous supposerons que le sofa ABCD est rectangulaire de longueur L et de largeur l ($\mathrm{L} \geq l$) et nous supposerons que :

- $l \leq 1$, sinon le sofa ne peut pas entrer dans le couloir.
- $\mathrm{L} \geq 1$ pour éviter une situation triviale.

Nous allons établir un premier résultat fondamental :

3.1. Propriété

Un sofa rectangulaire de longueur L et de largeur l passe dans le couloir si et seulement si $\dfrac{\mathrm{L}}{2}+l \leq \sqrt{2}$.

Au cours du déplacement du sofa nous supposerons que les points A et B restent en contact permanent avec les murs.
Seul le virage autour de l'angle du couloir nous intéresse ici.

Désignons par α une mesure de l'angle $\widehat{\mathrm{OBA}}$ et rappelons que si le sofa ne *coince* pas pour les valeurs de α comprises entre 0° et 45° il arrivera à terminer sans encombres son virage, sa trajectoire étant symétrique par rapport à la droite (OE).

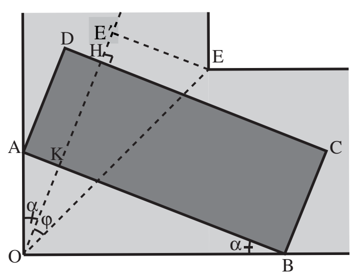


Fig. 5

L'animation relative à la figure 5 montre que le sofa passe dans le couloir si et seulement si le coin saillant E du couloir est toujours du côté opposé à O par rapport à la droite (CD).
En d'autres termes le sofa passe si et seulement si et seulement si $\mathrm{OE}' \geq \mathrm{OH}$:

E′ désignant la projection orthogonale de E sur la perpendiculaire à (CD) passant par O et H l'intersection de cette perpendiculaire avec (CD) conformément aux notations adoptées dans la figure 5.

Calculons les longueurs OE′ et OK en fonction de α :

$$\mathrm{OE}' = \mathrm{OE}\cos\varphi = \sqrt{2}\cos\varphi \text{ avec } \varphi = \operatorname{mes}(\mathrm{EOE}') = \frac{\pi}{4} - \alpha.$$

Puisque $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, il en sera de même pour φ : $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Il est clair que OH = OK + KH = OK + l, or OK = OA cos α = L sin α cos α, donc

$$\mathrm{OH} = \mathrm{L}\sin\alpha\cos\alpha + l = \frac{\mathrm{L}}{2}\sin 2\alpha + l.$$

Ainsi nous pouvons écrire l'équivalence

$$\mathrm{OE}' \geq \mathrm{OH} \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \geq \frac{\mathrm{L}}{2}\sin 2\alpha + l \qquad (1)$$

Puisque $\varphi = \frac{\pi}{4} - \alpha$, nous aurons :

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \cos(\varphi) \text{ et } \sin(2\alpha) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\varphi\right) = \cos(2\varphi).$$

L'inégalité (1) s'écrit alors $\sqrt{2}\cos\varphi - \frac{\mathrm{L}}{2}\cos 2\varphi \geq l$ ou encore :

$$\sqrt{2}\cos\varphi - \frac{\mathrm{L}}{2}\left(2\cos^2\varphi - 1\right) \geq l.$$

En posant alors u = cos φ, on obtient $\sqrt{2}u - \frac{\mathrm{L}}{2}\left(2u^2 - 1\right) \geq l$ ou encore :

$$-\mathrm{L}u^2 + \sqrt{2}u + \frac{\mathrm{L}}{2} \geq l.$$

Le trinôme défini par $f(u) = -\mathrm{L}u^2 + \sqrt{2}u + \frac{\mathrm{L}}{2}$ est une fonction concave, donc son minimum sur $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$ est le plus petit des deux nombres $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et $f(1)$ soit respectivement 1 et $\sqrt{2} - \frac{\mathrm{L}}{2}$.

Comme L est supérieur à 1, le minimum est obtenu pour u = 1, c'est-à-dire pour $\varphi = 0$, donc pour $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Finalement la condition cherchée est bien $\sqrt{2} - \frac{\mathrm{L}}{2} \geq l$ ou encore $\frac{\mathrm{L}}{2} + l \leq \sqrt{2}$.

3.2. Une remarque utile par la suite

Lorsque le sofa prend le virage du couloir, avec les notations de la figure 5, la distance du point E à la droite (AB) est égale à KE′ et :

$$\mathrm{KE}' = \mathrm{OE}' - \mathrm{OK} = \mathrm{OE}\cos\varphi - \mathrm{OA}\cos\alpha = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - \mathrm{L}\sin\alpha\cos\alpha.$$

$$\mathrm{KE}' = \cos\alpha + \sin\alpha - \mathrm{L}\sin\alpha\cos\alpha.$$

3.3. Optimisation du sofa rectangulaire

Ne perdons pas de vue que nous sommes à la recherche d’un sofa d’aire maximale.

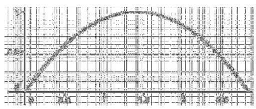
Nous exigerons donc que $\frac{\mathrm{L}}{2} + l = \sqrt{2}$ car sinon on pourrait augmenter L ou l et donc augmenter l’aire.

L’aire $\mathcal{A}$ du sofa est donnée par : $\mathcal{A} = \mathrm{L} \times l$ et puisque $l = \sqrt{2} - \frac{\mathrm{L}}{2}$ on peut exprimer $\mathcal{A}$ uniquement en fonction de L:

$$\mathcal{A}(\mathrm{L}) = \mathrm{L}\left(\sqrt{2} - \frac{\mathrm{L}}{2}\right) = -\frac{1}{2}\mathrm{L}^2 + \sqrt{2}\mathrm{L}.$$

L’étude de la fonction $\mathcal{A}$ est immédiate :

L	0		$\sqrt{2}$		$2\sqrt{2}$
$\mathcal{A}'(\mathrm{L})$		$+$	0	$-$	
$\mathcal{A}$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0



Finalement :

Le sofa rectangulaire optimal est de longueur $\mathrm{L} = \sqrt{2}$ et de largeur $l = \frac{\sqrt{2}}{2}$ pour une aire égale à 1.

Mais quelle déception ! On ne fait pas mieux que le carré de côté 1…

À moins que…

Et si on ajoutait des joues au sofa pour augmenter l’aire de son assise ?

4. Étude d’un sofa avec *joues latérales circulaires*

Dans ce paragraphe nous allons étudier un sofa rectangulaire auquel nous ajoutons deux *joues* déterminées par les cercles de centre respectifs A et B et de rayon 1 comme sur la figure 6.

Nous nous plaçons dans l’hypothèse où le rectangle ABCD de longueur $\mathrm{L} = \mathrm{AB}$ et de largeur $l = \mathrm{AD}$ passe dans le couloir. D’après le paragraphe précédent nous aurons donc : $\frac{\mathrm{L}}{2} + l = \sqrt{2}$.

Montrons alors que le sofa flanqué de ses joues prend le virage du couloir.

La distance d'un point m de la joue de gauche à (Oy) est au plus égale à Am, donc au plus à 1.

Le point m restera donc toujours dans le couloir et le sofa prend le virage.

Nous verrons par la suite que cette forme de sofa n'est pas optimale mais poursuivons notre étude en déterminant son aire maximale.

Il est remarquable de constater que les deux triangles curvilignes DSR et CPN ne se chevauchent pas. Pour le démontrer, il suffit d'établir que L ≥ DS + CP.

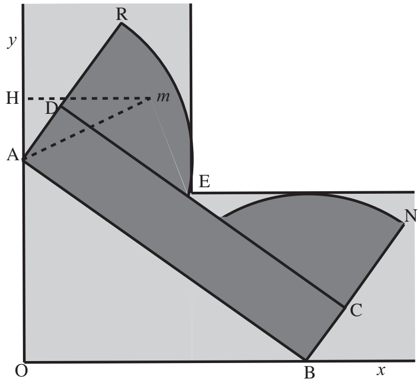


Fig. 6

En notant ω une mesure de l'angle $\widehat{SAD}$ et avec les notations de la figure 7 nous aurons :
$l = AD = \cos\,\omega$

et puisque $\frac{L}{2} + l = \sqrt{2}$:

$L = 2\left(\sqrt{2} - \cos\omega\right)$ et DS = CP = sin ω.

Or $L \geq DS + CP \Leftrightarrow 2\left(\sqrt{2} - \cos\omega\right) \geq 2\sin\omega$.
Cette dernière inégalité s'écrit encore

$$\sin\omega + \cos\omega \leq \sqrt{2}$$

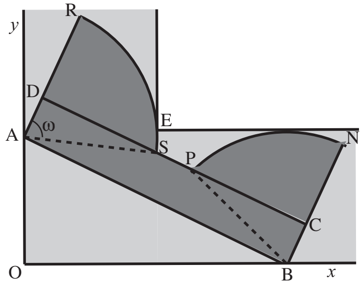


Fig. 7

c'est-à-dire $\sin\left(\omega + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$ ce qui prouve notre assertion.

L'inégalité devient égalité dans le seul cas où $\omega = \frac{\pi}{4}$ donc lorsque

$$l = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

et

$$L = 2\left(\sqrt{2} - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}.$$

4.1. Calcul de l'aire :

La constatation précédente permet d'affirmer que le sofa est la réunion disjointe du trapèze ABPS et des deux secteurs circulaires ASR et BPN. En désignant l'aire du sofa par $f(\omega)$ nous aurons :

$$\begin{aligned} f(\omega) &= 2\times \text{aire}(\text{ASR}) + \frac{\text{SP}+\text{AB}}{2}\times \text{AD} \\ &= 2\times\frac{1}{2}\omega + \frac{2\text{L}-2\sin\omega}{2}l \\ &= \omega + l(\text{L}-\sin\omega). \end{aligned}$$

En tenant compte de la relation $\frac{\text{L}}{2}+l=\sqrt{2}$ nous aurons :

$$f(\omega)=\omega+l\left(2\sqrt{2}-2l-\sin\omega\right).$$

Et enfin puisque $l=\cos\,\omega$:

$$f(\omega)=\omega+\left(2\sqrt{2}-2\cos\omega-\sin\omega\right)\cos\omega \text{ avec } \omega\in\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right].$$

L'étude de la fonction f ne présente pas de difficultés :
La dérivée f' de f se met sous la forme

$$f'(\omega)=2\sin\omega\left(\sin\omega+2\cos\omega-\sqrt{2}\right).$$

Ainsi :

$$f'(\omega)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\omega=0 \\ \text{ou} \\ \sin\omega+2\cos\omega-\sqrt{2}=0 \end{cases}.$$

Pour résoudre la seconde équation, posons $t=\tan\frac{\omega}{2}$. L'équation s'écrit alors :

$$\frac{2t}{1+t^2}+2\frac{1-t^2}{1+t^2}-\sqrt{2}=0,$$

c'est-à-dire :

$$-\left(2+\sqrt{2}\right)t^2+2t+2-\sqrt{2}=0.$$

D'où deux solutions : $t_1=\frac{1+\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}}\simeq 0{,}8$ ou $t_2=\frac{1-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}}\simeq -0{,}2$. Puisque $\omega\in\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ on ne retiendra que la racine t_1.

Finalement $f'(\omega)$ est nul pour $\omega=0$ ou $\omega=2\arctan\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}}\right)$.

Lorsque $\omega=0$ les joues ne sont pas matérialisées. Il ne reste donc que

$$\omega=2\arctan\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}}\right)\simeq 1{,}3497\ldots$$

Il est facile de voir que cette valeur correspond à un maximum de f. Nous obtenons ainsi la valeur maximale de l'aire (obtenue avec un logiciel de calcul formel) :

$$\mathcal{A}_{\max} = \frac{3\pi}{4} + \frac{4}{5} - \frac{\sqrt{6}}{5} - \arctan\left(\frac{2\sqrt{6}+3}{5}\right).$$

Finalement le sofa avec joues circulaires optimal a pour dimensions :

$$\begin{cases} \omega = 2\arctan\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}}\right) \simeq 1{,}3497, \\ l = \cos\omega \simeq 0{,}2193, \\ \mathrm{L} = 2\left(\sqrt{2}-l\right) \simeq 2{,}3899. \end{cases}$$

pour une aire $\mathcal{A}_{\max} = \dfrac{3\pi}{4} + \dfrac{4}{5} - \dfrac{\sqrt{6}}{5} - \arctan\left(\dfrac{2\sqrt{6}+3}{5}\right) \simeq 1{,}6598.$

Par conséquent

$$\psi \geq 1{,}6598\ldots$$

Contrairement à ce que l'on aurait pu penser, il ne suffit pas d'ajouter des joues au sofa rectangulaire optimal pour obtenir l'aire maximale.

4.2. Encore un peu mieux

En déplaçant le sofa dans le couloir, les animations Geogebra montrent que tous les points des arcs de cercle RS et PN n'entrent pas nécessairement en contact avec les murs internes du couloir. Plus précisément :

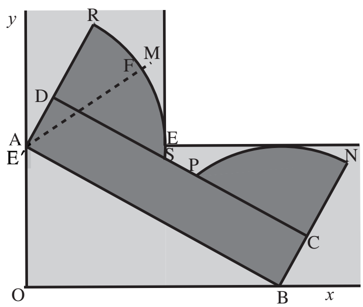


Fig. 8

Sur la figure 8 appelons E′ la projection orthogonale du coin interne E sur l'axe (Oy) et faisons coïncider le coin A du sofa avec E′.
Soit F un point de l'arc RE et M un point situé sur la demi-droite [AF) extérieur au segment [AF]. Dans le mouvement du sofa il arrivera un moment où (AM) est parallèle à (EE′) ce qui amènera M hors du couloir.
Cependant cet argument n'est plus recevable lorsque F se trouve sur l'arc puisqu'alors M n'aura pas encore franchi l'angle du couloir.
D'où l'idée de remplacer l'arc de cercle de la figure précédente par une courbe qui épouse parfaitement le mur. Voici comment :

Soit F un point de (DC) et (Δ) la perpendi-culaire à (DC) passant par F.
Depuis le §3 nous savons qu'un point M de (Δ),du côté opposé de O par rapport à (DC), restera dans le couloir si et seulement si FM ≤ FE donc si FM = FE puisque nous cherchons une solution optimale. Or FE est la distance de E à la droite (DC).

Nous allons déterminer un système de coordonnées paramétriques du point E dans le repère orthonormé $\mathcal{R}_A$ d'origine A d'axes (AB) et (AD).

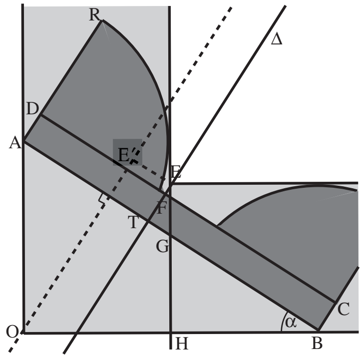


Fig. 9

Dans $\mathcal{R}_A$, E a pour coordonnées E(AT,TE).

Grâce à la remarque faite au §3 nous savons que la distance TE de E à la droite (AB) est égale à :

$$d = \sin\alpha + \cos\alpha - \mathrm{L}\sin\alpha\cos\alpha,$$

α étant une mesure de l'angle $\widehat{\mathrm{OBA}}$ avec $\alpha \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

Reste à calculer AT :

- AT = AG – TG.
- Puisque $\widehat{\mathrm{TEG}} = \widehat{\mathrm{OBA}}$, TG = TE tan $\alpha = d$ tan α.

  D'où $\mathrm{TG} = (\sin\alpha + \cos\alpha - \mathrm{L}\sin\alpha\cos\alpha)\tan\alpha$.
- Le rapport de projection orthogonale de (AB) sur (OH) est $\dfrac{\mathrm{OH}}{\mathrm{AG}} = \cos\alpha$, soit

  $\mathrm{AG} = \dfrac{1}{\cos\alpha}$ puisque $0\mathrm{H} = 1$.

Par conséquent : $\mathrm{AT} = \dfrac{1}{\cos\alpha} - (\sin\alpha + \cos\alpha - \mathrm{L}\sin\alpha\cos\alpha)\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

C'est-à-dire : $\mathrm{AT} = \cos\alpha - \sin\alpha + \mathrm{L}\sin^2\alpha$.

Finalement les coordonnées du point E dans le repère sont :

$$\mathrm{E}(x_\mathrm{E}, y_\mathrm{E})\begin{cases} x_\mathrm{E}(\alpha) = \cos\alpha - \sin\alpha + \mathrm{L}\sin^2\alpha \\ y_\mathrm{E}(\alpha) = \cos\alpha + \sin\alpha - \mathrm{L}\sin\alpha\cos\alpha \end{cases}$$

En amenant le point A sur O, les deux repères (celui d'origine A et celui d'origine O) coïncident. La figure ci-contre a été obtenue à l'aide de Geogebra en affichant le lieu (Γ) du point M dont les coordonnées sont :

$$\begin{cases} x_\mathrm{M}(u) = \cos u - \sin u + \mathrm{L}\sin^2 u \\ y_\mathrm{M}(u) = \cos u + \sin u - \mathrm{L}\sin u\cos u \end{cases}$$

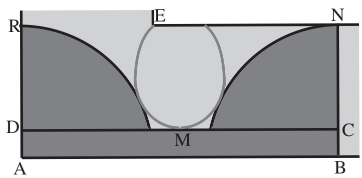


Fig. 10

u étant un curseur variant dans l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

Pour terminer l'étude, il reste à éliminer les parties de la courbe (Γ) qui ne conviennent pas.
Comme nous l'avons vu au début de ce paragraphe, la courbe (Γ) prend le relai de l'arc de cercle à partir du moment où (AE) est parallèle à (O*x*) c'est-à-dire lorsque OA = 1, donc lorsque $\sin\alpha \geq \frac{1}{L}$ donc pour $\alpha \geq \arcsin\left(\frac{1}{L}\right)$. Par symétrie on peut affirmer que l'on revient à un arc de cercle dès que BE passe par sa valeur minimale 1, c'est-à-dire lorsque $\cos\alpha = \frac{1}{L}$ c'est-à-dire pour $\alpha = \arccos\left(\frac{1}{L}\right)$.
Finalement la partie utile de (Γ) est celle obtenue pour

$$\alpha \in \left[\arcsin\left(\frac{1}{L}\right); \arccos\left(\frac{1}{L}\right)\right].$$

Le sofa final a l'allure ci-dessous :

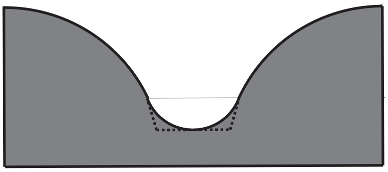


Fig. 11

Le gain au niveau de l'aire du sofa précédent a été estimé à l'aide d'un calculateur formel à environ 0,0178 pour atteindre une aire totale d'environ 1,6776…

Un doute subsiste néanmoins puisqu'il n'est pas sûr qu'en modifiant L tout en gardant le principe de l'ajout d'un arc de type (Γ) entre les deux arcs de cercles on ne puisse obtenir une aire plus grande…

On pourrait poursuivre en arrondissant par exemple les coins A et B. Le gain de l'aire serait assez important mais l'étude deviendrait très ardue et puis … comme les fourmis de dix-huit mètres, un sofa avec des coins arrondis ça n'existe pas !

Sitographie :

- cs.utsa.edu/~wagner/pubs/corner/corner_final.pdf
- mathenjeans.free.fr/amej/edition/actes/actespdf/97067072.pdf
- mathenjeans.free.fr/amej/edition/actes/actespdf/95231232.pdf

La recherche de la vérité doit être le but de notre activité ; c'est la seule fin qui soit digne d'elle. Sans doute nous devons nous efforcer de soulager les souffrances humaines, mais pourquoi ? Ne pas souffrir, c'est un idéal négatif et qui serait plus sûrement atteint par l'anéantissement du monde. Si nous voulons de plus en plus affranchir l'homme des soucis matériels, c'est pour qu'il puisse employer sa liberté reconquise à l'étude et à la contemplation de la vérité.

Henri POINCARÉ (La valeur de la Science, 1905)