Promenades aléatoires : vers les chaînes de Markov

Pierre Grihon(*)

Cet article propose une mise en perspective de la notion de promenade ou de marche aléatoire introduite dans le nouveau programme de spécialité de Terminale S. L'étude de marches aléatoires simples à nombre d'états[(1)] fini constitue dans ce programme une voie d'introduction du calcul matriciel avec pour point d'orgue une explication simple du principe de base des moteurs de recherche actuels[(2)]. Il sera fait appel à des notions d'algèbre linéaire telles que le produit matriciel sous sa forme générale ou les valeurs et vecteurs propres qui dépassent bien sûr le cadre du programme de Terminale.

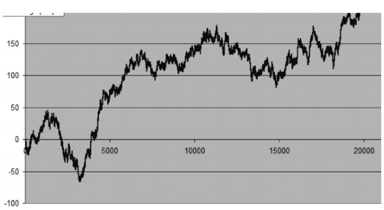
Le cadre général de ces problèmes est celui des *processus aléatoires* dont les chaînes de Markov[(3)] sont l'exemple qui sera développé ici.

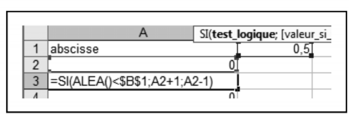
1. Un premier exemple de processus aléatoire

Cet exemple sort du cadre strict du programme de spécialité mais paradoxalement son contexte est le plus simple à décrire. Un promeneur indécis ou féru de probabilités[(4)] se déplace sur une droite graduée en partant de l'origine. Il jette une pièce de monnaie et avance d'un pas si elle donne pile et recule d'un pas si elle donne face.

Le nombre d'états de cette marche est infini.

Voici une simulation de cette marche avec une pièce équilibrée : en abscisse le nombre de pas et en ordonnée la position sur l'axe.





On peut observer qu'après être revenu plusieurs fois en 0, le promeneur semble partir définitivement au loin… En fait, on démontre qu'il reviendra avec certitude une infinité de fois en 0, mais le nombre moyen de pas entre deux passages est infini…

(*) pgrihon@free.fr

(1) Pour un mobile qui se déplace, il s'agit de ses positions possibles.

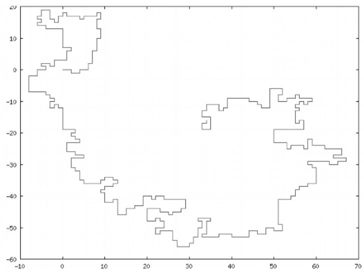
(2) Bien entendu il ne s'agit que d'une approche de cette théorie dont le premier brevet a été enregistré en 1998.

(3) Andreï Markov (1856-1922) mathématicien russe.

(4) Ce problème est connu aussi sous le nom de « marche de l'ivrogne »…

2. Un deuxième exemple de processus aléatoire

Un autre promeneur se déplace sur un quadrillage et à chaque carrefour il choisit une direction au hasard, mais en s'interdisant de passer deux fois sur un même point.



Ce type de marche aléatoire est appelée marche auto-évitante[5].

Les deux types de processus évoqués ci-dessus présentent une différence fondamentale : le premier n'a pas de mémoire en ce sens que l'état futur ne dépend que de l'état présent et le second a au contraire beaucoup de mémoire…

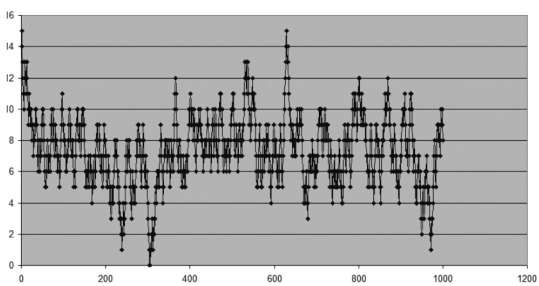
Les processus du premier type sont dits markoviens et on s'intéresse ici aux chaînes de Markov qui en sont le cas discret. Si on considère celles à nombre d'états fini on peut utiliser des matrices.

3. L'exemple des urnes d'Ehrenfest

Cet exemple figure dans le programme[6]. Il ne se présente pas comme une promenade mais on pourrait le transformer en marche sur un graphe.

On considère deux urnes A et B et N particules. À l'instant initial $n = 0$, les N particules sont réparties dans A et B. À chaque instant $n \geq 1$, on choisit au hasard l'une des particules et *on la change d'urne*.

Ci-dessous une simulation où l'urne A contient 15 particules au départ et l'urne B 0. En abscisse le nombre d'échanges et en ordonnée le nombre de particules dans A. On peut voir que l'urne A se vide complètement puis remonte à 15…



(5) Lire à ce sujet l'article de Wendelin Werner à l'adresse :
http://www.mathom.fr/mathom/FeteDeLaScience/FS2007/Complements/Les%20chemins%20aleatoires.pdf

(6)Voir aussi dans ce bulletin l'article de Kylie Ravera.

On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de particules dans A à l'issue du n-ième échange.
X_n peut prendre les valeurs entières de 0 à N : ces valeurs constituent les états du processus.
À l'aide de la formule des probabilités totales, on obtient les (N + 1) formules de récurrence :

$$P\left(X_{n+1}=k\right)=\frac{N-k+1}{N}P\left(X_n=k-1\right)+\frac{k+1}{N}P\left(X_n=k+1\right) \quad \text{où } 1\leq k\leq N-1 \ (1)$$

En effet, pour avoir k particules dans A à l'issue du $(n + 1)$-ième tirage, soit il y en avait $(k - 1)$ avant et on en a rajouté une provenant des $(N - (k - 1))$ de l'urne B, soit il y en avait $(k + 1)$ et on en a enlevé une.
Ces formules restent vraies pour les extrêmes :

$$P\left(X_{n+1}=0\right)=\frac{1}{N}P\left(X_n=1\right) \ \left(\text{dans ce cas } P\left(X_n=-1\right)=0\right)$$

$$P\left(X_{n+1}=N\right)=\frac{1}{N}P\left(X_n=N-1\right) \ \left(\text{dans ce cas } P\left(X_n=N+1\right)=0\right)$$

Ce processus est une chaîne de Markov et cela se traduit par:

$$P\left(X_{n+1}=k_{n+1}/\left(X_n=k_n\right)\cap\ldots\cap\left(X_0=k_0\right)\right)=P\left(X_{n+1}=k_{n+1}/\left(X_n=k_n\right)\right)$$

qui en est la définition formelle.
On peut traduire commodément les N + 1 relations (1) matriciellement en posant $U_n=\begin{pmatrix}P\left(X_n=0\right)\\ \vdots \\ P\left(X_n=N\right)\end{pmatrix}$: $U_{n+1} = MU_n$ où M est la matrice carrée d'ordre N + 1 dont chaque terme est une probabilité conditionnelle et dont la somme des coefficients de chaque colonne vaut 1. Une telle matrice est dite stochastique (ici en colonne). On peut remarquer que la somme des coefficients de U_n vaut 1 également.

Dans le cas N = 3, on obtient $M=\begin{pmatrix}0 & 1/3 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 2/3 & 0\\ 0 & 2/3 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1/3 & 0\end{pmatrix}$.

La première ligne s'obtient grâce à la relation $P\left(X_{n+1}=0\right)=\frac{1}{3}P\left(X_n=1\right)$ et de même pour les autres lignes.

On peut avoir par exemple $U_0=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ si A contient les 3 particules au début.

L'évolution à long terme de ce processus repose sur un calcul de puissance de matrice puisque $U_n = M^n U_0$.
Le comportement asymptotique peut s'étudier soit par l'étude de la suite des puissances $\left(M^n\right)$, soit directement sur la suite $\left(U_n\right)$.

Dans le cas présent, si la suite $\left(U_n\right)$ converge, sa limite U est une matrice colonne de somme 1 qui vérifie l'équation $U = MU$: U est donc un vecteur propre de M relatif à la valeur propre 1. Si on note u_k les coordonnées de U, on a les relations :

$$u_1 = Nu_0 , u_{N-1} = Nu_N , u_k = \frac{N-k+1}{N} u_{k-1} + \frac{k+1}{N} u_{k+1} \quad \text{pour } 0 < k < N.$$

On montre alors par récurrence sur k que $u_k = \binom{N}{k} u_0$, puis, en utilisant la somme $\sum_{k=0}^{N} u_k = 1$, on obtient $u_0 = \frac{1}{2^N}$ et finalement $u_k = \binom{N}{k} \frac{1}{2^N}$. Les coordonnées de U forment donc la loi binomiale $\mathcal{B}(N,1/2)$.
En fait la suite $\left(U_n\right)$ ne converge pas toujours (en particulier si la situation initiale est déterministe, c'est-à-dire si la composition des urnes est donnée et non aléatoire), mais ses suites extraites $\left(U_{2n}\right)$ et $\left(U_{2n+1}\right)$ convergent. Cela tient au fait que le nombre X_n de particules dans A est étroitement lié à la parité de n. Si par exemple $X_0 = 0$, alors X_{2n} est pair et X_{2n+1} est impair et dans ce cas on peut montrer que la limite de $P\left(X_{2n} = 2k\right)$ est égale à $\binom{N}{2k} \frac{1}{2^{N-1}}$ et celle de $P\left(X_{2n+1} = 2k+1\right)$ à $\binom{N}{2k+1} \frac{1}{2^{N-1}}$.

La suite des puissances $\left(M^n\right)$ se comporte de la même façon.

4. Les matrices stochastiques

Comme on l'a vu dans l'exemple précédent, les chaînes de Markov sont liées à une classe particulière de matrices : les matrices stochastiques. Leurs propriétés sont précieuses pour étudier la convergence éventuelle des processus.
Une matrice stochastique selon les colonnes (respectivement selon les lignes) est une matrice à éléments positifs ou nuls et dont toutes les colonnes (respectivement toutes les lignes) ont une somme égale à 1.
De nombreux ouvrages privilégient les matrices stochastiques en ligne et donc les produits traduisant la chaîne de Markov font intervenir des matrices lignes du type $V_{n+1} = V_n M$.
Il n'y a pas de raison objective(7) pour privilégier cette écriture mais plutôt un certain nombre de raisons *pédagogiques* pour préférer celle en colonnes :

– la traduction matricielle des équations déduites des probabilités totales donne

(7) Au niveau du secondaire et même des deux premières années du supérieur. L'explication se trouve en théorie de la mesure et découle de la notion de dualité.

directement la matrice stochastique de transition en colonne par simple lecture,

– un élément important est un vecteur propre de cette matrice : l'étude des vecteurs propres se fait en liaison avec l'interprétation d'une matrice carrée comme matrice d'un endomorphisme et dans ce cas le calcul d'une image se fait usuellement par produit de la matrice par une matrice colonne,
– ces notions sont une introduction à l'algèbre linéaire : il faut donc les étudier dans la perspective de ce qui sera fait dans le supérieur et donc ne pas s'en tenir au contexte des matrices stochastiques,
– enfin, dans le secondaire, les élèves sont habitués à écrire les coordonnées des vecteurs en colonne.

Dans cet article, je n'utiliserai donc pour traduire une chaîne de Markov que les matrices stochastiques en colonne mais je serai amené à utiliser la transposée de telles matrices (notée ^{t}M) qui est donc ..... stochastique en ligne.

Une propriété caractéristique des matrices stochastiques est que ^{t}MX = X où X est la matrice colonne formée de 1 et M est supposée à coefficients positifs ou nuls.
On peut en déduire les propriétés suivantes :

– un produit de matrices stochastiques est stochastique.
En effet si M et N sont stochastiques, ^{t}(MN)X = ^{t}N^{t}MX = ^{t}NX = X.
– une matrice et sa transposée ayant les mêmes valeurs propres, toute matrice stochastique a 1 pour valeur propre.
– les valeurs propres réelles d'une matrice stochastique ont une valeur absolue inférieure ou égale à 1.
Pour démontrer cela, on raisonne sur la transposée.

Soit $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre associé à une valeur propre λ de ^{t}M.

On note i un élément de $\{1,\ldots,n\}$ tel que $\forall k \in \{1,\ldots,n\} \left|x_k\right| \leq \left|x_i\right|$. En considérant la ligne i de la matrice ^{t}MX, on obtient

$$\left|\lambda x_i\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} m_{ki} x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} m_{ki}\left|x_k\right| \leq \left|x_i\right| \cdot 1$$

donc $\left|\lambda x_i\right| \leq \left|x_i\right|$ et comme $\left|x_i\right| \neq 0$ on en déduit que $\left|\lambda\right| \leq 1$.

Convergence

Pour l'étude asymptotique des chaînes de Markov, une méthode possible est d'étudier la suite des puissances de ces matrices. La convergence de ces suites n'est pas assurée. On en a vu un contre-exemple dans le cas d'Ehrenfest. Quand il y a convergence, la limite est encore stochastique (par simple passage à la limite dans les sommes par colonnes).

Une condition suffisante de convergence est que l'une des puissances ait tous ses termes strictement positifs.

Avant de démontrer ce résultat, en voici un exemple numérique.

Si $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, alors M^3 n'a aucun coefficient nul et on montre que la suite $\left(\mathrm{M}^n\right)$ converge vers la matrice dont toutes les colonnes sont égales à $\begin{pmatrix} 2/11 \\ 9/44 \\ 3/11 \\ 15/44 \end{pmatrix}$.

Preuve de la condition suffisante

On considère pour simplifier que la matrice $\mathrm{A} = (a_{ij})$ carrée d'ordre $p \geq 3$ (le cas $p = 2$ se traite directement) est stochastique à éléments non nuls et on note a le plus petit élément de A. Du fait des sommes de colonnes égales à 1, on a $0 < a < \frac{1}{2}$.

On va démontrer que les colonnes de A^{n}, convergent toutes vers la même colonne. Soit m_n et M_n le plus petit et le plus grand élément de la première ligne de A^n. On va démontrer que ces deux suites sont adjacentes.

On note $a_{ij}(n)$ les termes de A^n. On pose $m_n = a_{1j_0}(n)$. (j_0 dépend de n).

On a :

$$\mathrm{M}_{n+1} = \max_j \sum_{k=1}^{p} a_{1k}(n) a_{kj} = \max_j \left(\sum_{k \neq j_0} a_{1k}(n) a_{kj} + m_n a_{j_0 j} \right) \leq \max_j \left(\mathrm{M}_n \sum_{k \neq j_0} a_{kj} + m_n a_{j_0 j} \right),$$

puis en utilisant le fait que $\sum_{k=1}^{p} a_{kj} = 1$:

$$\begin{aligned} \mathrm{M}_{n+1} &\leq \mathrm{M}_n + \max_j \left[\left(m_n - \mathrm{M}_n \right) a_{j_0 j} \right] \\ &\leq \mathrm{M}_n - \left(\mathrm{M}_n - m_n \right) \min_j a_{j_0 j} \leq \mathrm{M}_n - \left(\mathrm{M}_n - m_n \right) a \leq \mathrm{M}_n . \end{aligned}$$

De la même manière, on montre que :

$$m_{n+1} \geq m_n + a\left(\mathrm{M}_n - m_n \right) \geq m_n .$$

À l'aide des deux inégalités, on obtient enfin que

$$\mathrm{M}_{n+1} - m_{n+1} \leq (1 - 2a)\left(\mathrm{M}_n - m_n \right).$$

Comme $0 < 1 - 2a < 1$, on a bien les trois critères des suites adjacentes.

Tous les termes de la première ligne de A^n ont la même limite et il en est de même pour les autres lignes.

Il ne reste plus qu'à reconnaître dans la colonne limite obtenue un vecteur propre de A lié à la valeur propre 1.
Si on note C cette colonne, il est clair que par passage à la limite la somme de ses termes vaut 1.
Prenons le premier terme de AC :

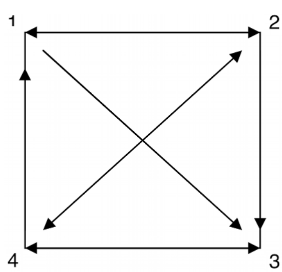
$$\sum_{j=1}^{p} a_{1j}c_j = \sum_{j=1}^{p} a_{1j} \lim_{n\to\infty} a_{j1}(n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{p} a_{1j}a_{j1}(n) = \lim_{n\to\infty} a_{11}(n+1) = c_1.$$

Donc finalement : AC = C.
Le vecteur C correspond à une distribution de probabilité appelée distribution stationnaire de la chaîne.
Dans le cas particulier précédent, il est facile de voir que C est unique en passant à la limite dans l'égalité $A^nC' = C'$ où C' serait une deuxième distribution stationnaire.
La condition suffisante vue précédemment n'est pas nécessaire comme le montre l'exemple suivant :

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$, la suite $\left(A^n\right)$ converge vers $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Comportement asymptotique d'une marche aléatoire

1. Si on considère une marche aléatoire sur un graphe dont la matrice M de transition a l'une de ses puissances M^k à coefficients non nuls, cela signifie que l'on peut relier deux sommmets quelconques du graphe en exactement k étapes. Par exemple un graphe associé à l'une des matrices $M = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ du paragraphe précédent serait :



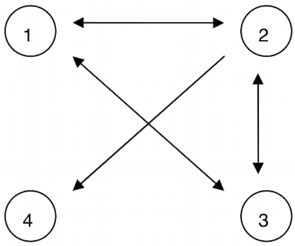
En partant du sommet 1, on a une chance sur 2 d'aller en 2 et une chance sur 2 d'aller en 3 : les déplacements possibles partant d'un sommet sont équiprobables.

En trois étapes on peut rejoindre n'importe quel sommet quel que soit le point de départ.
Si on note X_n la position du mobile après n déplacements et U_n la matrice colonne de sa loi, on a $U_n = M^nU_0$ et quel que soit le point de départ, la suite $\left(U_n\right)$ converge vers

$$\begin{pmatrix} 2/11 \\ 9/44 \\ 3/11 \\ 15/44 \end{pmatrix}$$ qui est donc un vecteur propre associé à 1 de M.

2. Inversement, il existe des graphes dont tous les sommets peuvent être joignables alors que toutes les puissances de la matrice de transition comportent des 0 : par exemple un graphe de matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ correspondant à une permutation circulaire.

On peut aussi avoir des marches aléatoires sur un graphe dont l'un des sommets est un « cul de sac ».
S'il n'y en a qu'un et que l'on peut y arriver de tous les autres sommets, il paraît clair que la marche se terminera toujours en ce sommet. Par exemple la suite des puissances de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ converge vers la matrice dont les trois premières lignes sont nulles et la dernière formée de 1. Ce résultat peut se prouver par calcul mais aussi directement grâce à la propriété du graphe.
Dans le graphe ci-dessous, lorsqu'on arrive au sommet 4 on y reste.



6. Marche aléatoire avec saut

Cette dernière partie propose une manière élémentaire de justifier la convergence de l'algorithme « PageRank ».
La construction de cet algorithme a été développée dans de nombreux articles[8].
On va démontrer ici sa convergence après l'avoir traduit sous la forme d'une suite de matrices de type arithmético-géométrique comme indiqué dans le programme de spécialité.
Le Web est modélisé par un graphe orienté dont les sommets sont les pages et les flèches les liens hypertextes.

(8) Voir en particulier celui de Michael Eisermann : http://www.apmep.asso.fr/L-algorithme-PageRank-de-Google ainsi que l'article du bulletin n° 489 (septembre 2010), p. 473-484.

Un surfeur aléatoire se déplace sur ce graphe à N sommets, chaque sommet ayant au moins un lien entrant. À chaque instant, il peut suivre les arêtes du graphe avec une probabilité liée au nombre de liens ou aller directement sur n'importe quel sommet y compris celui où il se trouve (en « sautant ») avec une probabilité constante p.

1. Relations de récurrence

On note X_n la position du surfeur après n étapes. X_n prend ses valeurs dans $\{1,2,\ldots,N\}$.

Premier cas :

Si les déplacements se font sans saut on peut appliquer la formule des probabilités totales :

$$P(X_{n+1}=i)=\sum_{j=1}^{N}P_{[X_n=j]}(X_{n+1}=i)P(X_n=j)=\sum_{j=1}^{N}a_{ij}P(X_n=j) \qquad (1)$$

en notant $a_{ij}=P_{[X_n=j]}(X_{n+1}=i)$ qui est égal à l'inverse du nombre de liens sortant du sommet j si la page j pointe vers la page i et à 0 sinon. Si la page i est un cul-de-sac, on a $a_{ii}=1$.

Il est nécessaire de supposer que $P(X_n=j)\neq 0$ pour tout $j\in\{1,2,\ldots,N\}$, ce qui peut se démontrer par récurrence en utilisant le fait que tout sommet possède au moins un lien entrant.

En notant U_n la matrice colonne dont les N lignes sont les probabilités $P(X_n=i)$ et A la matrice carrée dont les coefficients sont les a_{ij} on obtient la relation de récurrence $U_{n+1}=AU_n$.

Deuxième cas :

Si maintenant les déplacements peuvent se faire avec saut, les formules de récurrence sont plus délicates à obtenir mais en voici le principe.

On utilise le système complet d'événements $\{S_{n+1},\overline{S_{n+1}}\}$ (le surfeur saute ou non à la $(n+1)$-ième étape)

Le surfeur est en i à la $(n+1)$-ième étape si, ou bien il a fait un saut (avec la probabilité p) et il avait la probabilité 1/N d'arriver en i, ou bien il n'a pas fait de saut et il se retrouve en i avec la probabilité obtenue en (1) :

$$\begin{aligned}P(X_{n+1}=i)&=P_{S_{n+1}}(X_{n+1}=i)P(S_{n+1})+P_{\overline{S_{n+1}}}(X_{n+1}=i)P(\overline{S_{n+1}})\\&=\frac{1}{N}p+(1-p)\sum_{j=1}^{N}a_{ij}P(X_n=j)\end{aligned}$$

Pour trouver rigoureusement le deuxième terme, on applique la formule (1) avec cette fois la probabilité conditionnelle $P_{\overline{S_{n+1}}}$:

$$P_{\overline{S_{n+1}}}(X_{n+1}=i)=\sum_{j=1}^{N}P_{\overline{S_{n+1}}}(X_{n+1}=i/X_n=j)P_{\overline{S_{n+1}}}(X_n=j)=\sum_{j=1}^{N}a_{ij}P_{\overline{S_{n+1}}}(X_n=j).$$

$P_{\overline{S_{n+1}}}\left(X_{n+1}=i\,/\,X_n=j\right)=a_{ij}$ puisque si le surfeur ne saute pas on retrouve le premier cas.

Enfin, $P_{\overline{S_{n+1}}}\left(X_n=j\right)=P\left(X_n=j\right)$ car les événements $\left(X_n=j\right)$ et $\overline{S_{n+1}}$ sont indépendants.

En posant $C=\dfrac{p}{N}\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$ les relations de récurrence peuvent se traduire matriciellement sous la forme :

$$\mathbf{U_{n+1}=(1-p)\,AU_n+C.}$$

C'est une suite de matrices colonnes de type arithmético-géométrique.

2. Étude de la suite

1. On commence par chercher un point fixe, c'est-à-dire une matrice colonne L vérifiant $L=(1-p)\,AL+C$, soit $L=\left(I-\left(1-p\right)A\right)^{-1}C$ si l'inverse existe. Montrons que cet inverse existe[9].

La matrice A étant stochastique, on sait que ses valeurs propres réelles sont entre -1 et 1. On en déduit que les valeurs propres réelles de $I-(1-p)\,A$ sont comprises entre p et $2-p$ et comme $p<1$ elles ne sont pas nulles. Donc $I-(1-p)\,A$ est inversible.

2. Si l'on pose $V_n=U_n-L$, on obtient facilement la relation $V_{n+1}=(1-p)\,AV_n$, puis par récurrence la relation explicite $V_n=(1-p)^n\,A^nV_0$, ce qui donne

$$U_n=(1-p)^n\,A^n\,(U_0-L)+L.$$

Convergence de la suite

La matrice A^n est une matrice stochastique en colonne, c'est-à-dire que tous ses coefficients sont positifs et que la somme de chacune de ses colonnes vaut 1. Donc A^n a tous ses coefficients entre 0 et 1 et donc tous les coefficients de la matrice $(1-p)^n\,A^n$ tendent vers 0. La suite de matrices colonnes U_n converge donc vers L.

Si J est la matrice carrée d'ordre n formée uniquement de 1, on a $JU_n=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$ et on peut alors écrire la relation de récurrence sous la forme $U_{n+1}=\left[\left(1-p\right)A+\dfrac{p}{N}J\right]U_n$.

Ce qui précède montre que la limite L de la suite U_n est un vecteur propre de la matrice stochastique $\left(1-p\right)A+\dfrac{p}{N}J$ associé à la valeur propre 1.

On peut remarquer que la matrice $\left(1-p\right)A+\dfrac{p}{N}J$ a tous ses coefficients strictement positifs, ce qui assure la convergence du processus grâce à la condition suffisante vue

(9) En terminale, soit on le vérifie directement dans le cas des matrices d'ordre 2 ou 3, soit on utilise la calculatrice.

au paragraphe 4. Cependant la méthode élémentaire précédente a l'avantage de pouvoir être exposée en Terminale.

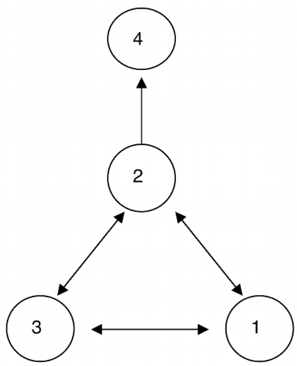
Interprétation de la limite

Les coordonnées de L donnent les probabilités qu'à la limite le surfeur aléatoire arrive sur les pages numérotées de 1 à N. L'ordre de ces probabilités donne ce que l'on appelle l'ordre de pertinence des pages web.

Exemple

Le mini web ci-contre correspond à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



La limite de la suite (U_n) pour $p = 0{,}25$ est

$$\begin{pmatrix} 10/56 \\ 11/56 \\ 10/56 \\ 25/56 \end{pmatrix}.$$

Remarque

On peut se demander si l'ordre des pertinences dépend de p. L'exemple

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/5 & 1/6 & 1/2 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/3 & 0 & 1/6 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/3 & 1/5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \\ 1/3 & 1/5 & 1/6 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/5 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 & 1/2 & 1/4 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

montre que oui.
Pour $p = 0{,}5$, l'ordre est 1, 4, 7, 2, 3, 5 et 6.
L a pour coordonnées arrondies 0,72 ; 0,55 ; 0,51 ; 0,60 ; 0,36 ; 0,36 ; 0,59.
Pour $p = 0{,}6$, l'ordre est 1, 7, 4, 2, 3, 5 et 6.
L a pour coordonnées arrondies 0,72 ; 0,57 ; 0,54 ; 0,61 ; 0,41 ; 0,41 ; 0,62.
Si p reste assez petit, il semble que l'ordre ne soit pas modifié.

Bibliographie

Processus aléatoires pour les débutants, Arthur Engel, Cassini.
Mathématiques appliquées L3 Pearson Collectif d'auteurs.
Projet Klein Vignette écrite par Christiane Rousseau :
http://blog.kleinproject.org/?p=451&lang=fr#more-451