

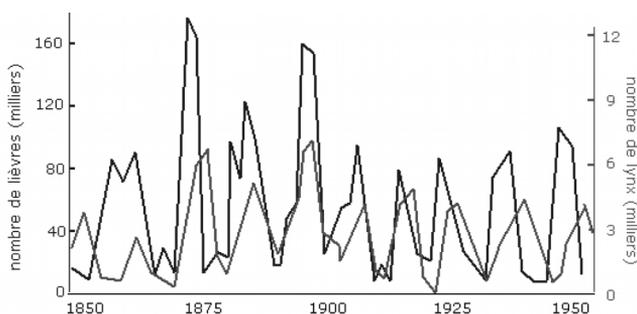
## Proies et prédateurs

Louis-Marie Bonneval(\*)

Le programme de spécialité de terminale S, dans sa rubrique « Matrices et suites », évoque comme exemple de problèmes le *modèle proie-prédateur discrétisé*, en précisant :

- *évolution couplée de deux suites récurrentes* ;
- *étude du problème linéarisé au voisinage du point d'équilibre*.

Pour aborder ce modèle, je propose de partir des statistiques de la Hudson Bay Company, qui commercialise les fourrures fournies par les trappeurs du Nord canadien. Sur un siècle, cette entreprise a pu évaluer l'évolution de la population de lynx et de lièvres arctiques dans cette vaste région. Elle a obtenu les résultats ci-dessous<sup>(1)</sup> :



On constate un phénomène qui peut surprendre : les effectifs de chaque population évoluent selon une périodicité approximative, avec un décalage temporel entre les deux espèces. On peut rechercher un modèle qui rende compte de cette évolution couplée, sachant que les lièvres constituent la nourriture quasi exclusive des lynx.

L'Italien Vito Volterra (1860-1940) [9] et l'Américain Alfred James Lotka (1880-1949) [5] ont travaillé, indépendamment l'un de l'autre, sur de telles populations (animales ou végétales) partageant un même territoire, et dont l'une est la proie de l'autre : requins et sardines<sup>(2)</sup>, lions et coqs, herbivores et plantes fourragères, protozoaires et bactéries, ...

(\*) lm.bonneval@gmail.com

(1) On peut supposer que le nombre de fourrures fournies par les trappeurs est à peu près proportionnel aux effectifs d'animaux.

(2) Le zoologiste Umberto d'Ancona, gendre de Volterra, s'occupait de statistiques portant sur la pêche dans le nord de la mer Adriatique. Elles montraient que pendant la période 1915-1920, où la pêche était moins intense à cause de la guerre, il y avait eu un accroissement relatif de la classe des Sélaciens (requins, raies, ...). Selon l'hypothèse de D'Ancona, la pêche perturbait l'équilibre naturel entre les espèces : elle favorisait une augmentation relative des espèces proies (poissons qui se nourrissent seulement de plancton), et une diminution des espèces prédatrices (poissons qui se nourrissent d'autres poissons). La diminution de la pêche due à la première guerre mondiale avait donc rétabli, au moins en partie, l'équilibre naturel. D'Ancona demanda à Volterra une justification mathématique de son hypothèse.

Ils ont élaboré différents modèles pour rendre compte de l'évolution de leurs effectifs dans le temps. Pour cela ils ont utilisé des systèmes d'équations différentielles, mais pour rester dans le cadre de la spécialité de Terminale S nous allons ici en donner une version discrète<sup>(3)</sup>.

### Un premier modèle

On note respectivement  $x_n$  et  $y_n$  les effectifs de proies et de prédateurs pour l'année  $n$ .

On fait les hypothèses suivantes :

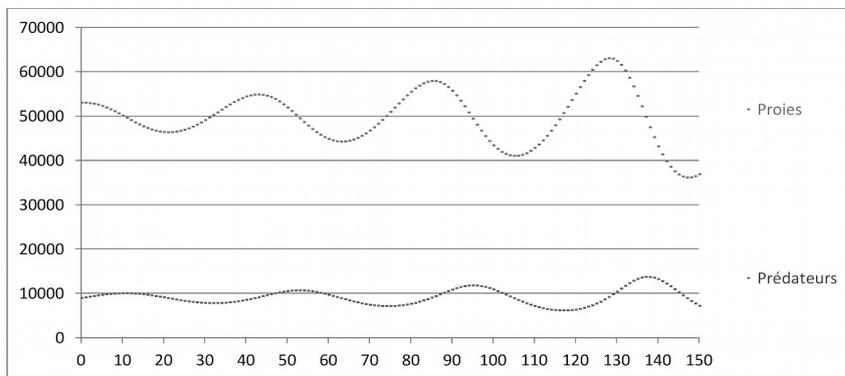
- le taux d'accroissement des proies résulte d'un taux de natalité constant  $a$  et d'un taux de mortalité  $by_n$  proportionnel au nombre de prédateurs.
- le taux d'accroissement des prédateurs résulte d'un taux de natalité  $cx_n$  proportionnel au nombre de proies, et d'un taux de mortalité constant  $d$ .

On obtient ainsi les relations :

$$\begin{cases} x_{n+1} - x_n = (a - by_n)x_n \\ y_{n+1} - y_n = (cx_n - d)y_n \end{cases}, \text{ soit } \begin{cases} x_{n+1} = (1 + a)x_n - by_n x_n \\ y_{n+1} = (1 - d)y_n + cx_n y_n \end{cases}.$$

On peut alors étudier au tableur<sup>(4)</sup> l'évolution de  $x_n$  et  $y_n$ , en fonction des valeurs initiales (entières positives)  $x_0$  et  $y_0$  et des coefficients (strictement positifs)  $a, b, c, d$ . Supposons par exemple  $x_0 = 53\ 000$  et  $y_0 = 9\ 000$ , et prenons comme coefficients<sup>(5)</sup> :  
 $a = 0,09$  ;  $b = 10^{-5}$  ;  $c = 5 \times 10^{-6}$  ;  $d = 0,25$ .

On obtient le graphique suivant :



(3) Le document ressource [4] part du système différentiel puis le discrétise : on peut éviter cette étape.

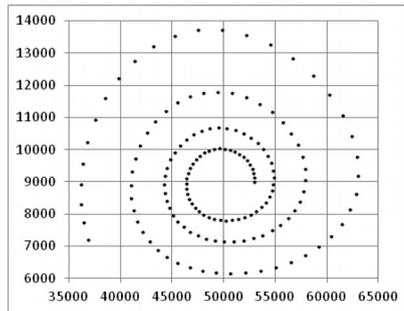
(4) Le fichier Excel proies\_predateurs.xls est disponible sur le site de l'APMEP en complément à cet article.

(5) Ces coefficients ont été choisis pour permettre ci-après des calculs assez simples et des formules exactes. Noter que les coefficients  $b$  et  $c$  doivent être nettement plus petits que les coefficients  $a$  et  $d$ , pour que  $by_n$  soit de l'ordre de grandeur de  $a$ , et  $cx_n$  de l'ordre de grandeur de  $d$ .

On constate effectivement des oscillations décalées, qu'on peut expliquer assez simplement :

Quand les prédateurs sont peu nombreux, les proies se développent. Les prédateurs, trouvant de la nourriture, se développent à leur tour. Mais devenant trop nombreux, ils déciment les proies, dont l'effectif diminue. Donc les prédateurs manquent de nourriture, et leur nombre se met à diminuer à son tour. Cela enclenche un nouveau cycle.

On peut envisager un autre graphique, en plaçant en abscisses les effectifs de proies et en en ordonnées les effectifs de prédateurs. On obtient une sorte de spirale divergente (le point de départ est le point le plus intérieur) :



### Linéarisation du modèle

On peut chercher s'il existe un état d'équilibre, c'est-à-dire un couple  $(x_e, y_e)$  d'effectifs de proies et de prédateurs tel que, si  $x_0 = x_e$  et  $y_0 = y_e$ , les effectifs de chaque espèce restent constants.

Il suffit pour cela que  $\begin{cases} a - by_e = 0 \\ cx_e - d = 0 \end{cases}$ , soit  $\begin{cases} x_e = \frac{d}{c} \\ y_e = \frac{a}{b} \end{cases}$ ,

Posons alors pour tout  $n$  :  $u_n = x_n - x_e$  et  $v_n = y_n - y_e$ .

Les relations de récurrence s'écrivent :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n - \frac{bd}{c}v_n - bu_nv_n \\ v_{n+1} = \frac{ac}{b}u_n + v_n + cu_nv_n \end{cases}$$

Si  $x_n$  et  $y_n$  restent proches de  $x_e$  et  $y_e$ , alors  $u_n$  et  $v_n$  sont proches de 0, et si  $b$  et  $c$  sont petits on peut négliger les termes en  $u_nv_n$ .

Les relations précédentes deviennent  $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{bd}{c} \\ \frac{ac}{b} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ .

Si on appelle A la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{bd}{c} \\ \frac{ac}{b} & 1 \end{pmatrix}$ , on en déduit que, pour tout  $n$ ,

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}.$$

Or on peut démontrer (cf. annexe) que

$$A^n = r^n \left[ \frac{\sin(n\alpha)}{\sqrt{ad}}(A-I) + \cos(n\alpha)I \right],$$

où  $r$  et  $\alpha$  sont respectivement le module et un argument du nombre complexe<sup>(6)</sup>  $1 + i\sqrt{ad}$ .

En terminale S, cette formule peut être admise (après avoir été vérifiée pour  $n = 0$  et  $n = 1$ ), ou éventuellement démontrée par récurrence.

On en déduit

$$\begin{cases} u_n = r^n \left[ -\frac{b}{c} \sqrt{\frac{d}{a}} v_0 \sin(n\alpha) + u_0 \cos(n\alpha) \right] \\ v_n = r^n \left[ \frac{c}{b} \sqrt{\frac{a}{d}} u_0 \sin(n\alpha) + v_0 \cos(n\alpha) \right] \end{cases}$$

et par suite

$$\begin{cases} x_n = x_0 + u_n = \frac{d}{c} + r^n \left[ -\frac{b}{c} \sqrt{\frac{d}{a}} v_0 \sin(n\alpha) + u_0 \cos(n\alpha) \right] \\ y_n = y_0 + v_n = \frac{a}{b} + r^n \left[ \frac{c}{b} \sqrt{\frac{a}{d}} u_0 \sin(n\alpha) + v_0 \cos(n\alpha) \right] \end{cases}. \quad (*)$$

La présence des sinus et cosinus traduit les oscillations autour de l'état d'équilibre, avec une période  $\frac{2\pi}{\alpha}$ . Le facteur  $r^n$  traduit l'augmentation de leur amplitude, car

$$r = \sqrt{1+ad} > 1.$$

En reprenant l'exemple du début, on obtient :

$$x_e = 50\,000 ; x_e = 9\,000 ; u_0 = 3\,000 ; v_0 = 0.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -0,5 \\ 0,045 & 1 \end{pmatrix} ; r \cos\alpha = 1 ; r \sin\alpha = 0,15.$$

$$r = \sqrt{1,0225} \approx 1,011 ; \alpha = \arctan 0,15 \text{ (période 42 ans environ) ;}$$

(6) C'est l'une des deux valeurs propres de A, l'autre étant son conjugué.

$$\begin{cases} x_n = 50\,000 + 3\,000 r^n \cos(n\alpha) \\ y_n = 9\,000 + 900 r^n \sin(n\alpha) \end{cases}$$

On vérifie au tableur que ces formules donnent des résultats proches de ceux du modèle complet, du moins tant que  $n$  n'est pas trop grand<sup>(7)</sup>.

### Modèle en milieu limité

Le modèle ci-dessus est assez simpliste, mais Volterra et Lotka l'ont raffiné de plusieurs façons. On peut par exemple supposer le milieu limité en ressources pour les proies. Le taux d'accroissement des proies est alors diminué d'un terme  $kx_n$  proportionnel au nombre de proies.

Les relations de récurrence deviennent :

$$\begin{cases} x_{n+1} - x_n = (a - by_n - kx_n)x_n \\ y_{n+1} - y_n = (cx_n - d)y_n \end{cases},$$

soit

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1+a)x_n - kx_n^2 - by_n x_n \\ y_{n+1} = (1-d)y_n + cx_n y_n \end{cases}.$$

L'état d'équilibre est alors  $\begin{cases} x_e = \frac{d}{c} \\ y_e = \frac{a}{b} - \frac{kd}{bc} \end{cases}$ . Il faut donc  $k \leq \frac{ac}{d}$  pour que  $y_e$  soit positif.

Le modèle linéarisé devient

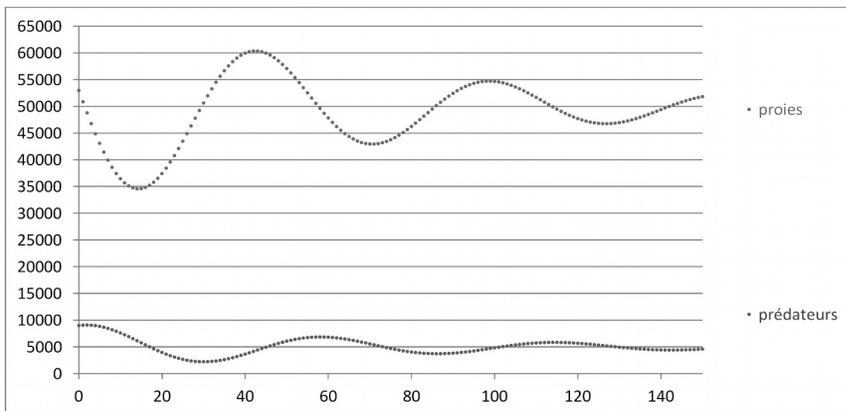
$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{kd}{c} & -\frac{bd}{c} \\ \frac{ac - kd}{b} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}.$$

On peut alors démontrer (cf. annexe) que selon la valeur de  $k$  on peut avoir soit des oscillations expansives (comme dans le premier modèle où  $k = 0$ ), soit des oscillations sinusoïdales, soit des oscillations amorties qui convergent vers l'état d'équilibre, soit une convergence vers l'état d'équilibre sans oscillation.

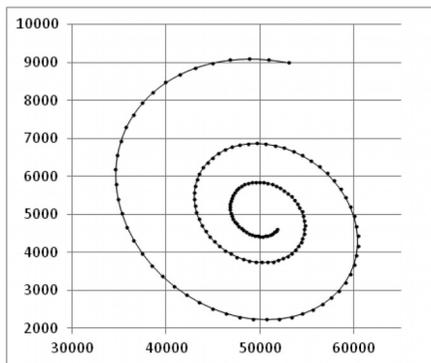
Cette étude théorique n'est pas accessible aux élèves de Terminale. En revanche, on peut leur faire observer au tableur comment évoluent les courbes quand on change la valeur de  $k$ .

Par exemple, avec les mêmes valeurs initiales et les mêmes coefficients  $a, b, c, d$  que plus haut, en prenant  $k = 8 \times 10^{-7}$  on obtient l'évolution suivante :

(7) La courbe portant les  $(x_n, y_n)$ , obtenue en remplaçant dans les formules (\*) le paramètre entier  $n$  par le paramètre réel  $t$ , est alors, à une transformation affine près, une spirale logarithmique.



La spirale converge vers le point limite  $(x_e, y_e) = (50\,000, 5\,000)$  (le point de départ est cette fois le point le plus extérieur) :



Après avoir linéarisé le modèle, on peut comme plus haut obtenir des formules explicites :

$$x_e = 50\,000 ; x_e = 9\,000 ; u_0 = 3\,000 ; v_0 = 4\,000.$$

$$A = \begin{pmatrix} 0,96 & -0,5 \\ 0,025 & 1 \end{pmatrix} ; r \cos \alpha = 0,98 ; r \sin \alpha = 0,11.$$

$$r = \sqrt{0,9725} \approx 0,986 ; \alpha = \arctan\left(\frac{11}{98}\right) \approx 0,111 \text{ (période 56 ans environ) ;}$$

$$\begin{aligned} A^n &= r^n \left[ \frac{\sin(n\alpha)}{r \sin(\alpha)} (A - r \cos(\alpha)I) + \cos(n\alpha)I \right] \\ &= r^n \left[ \frac{\sin(n\alpha)}{11} (100A - 98I) + \cos(n\alpha)I \right] \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_n = 50\,000 + 1\,000 r^n \left[ -\frac{206}{11} \sin(n\alpha) + 3 \cos(n\alpha) \right] \\ y_n = 5\,000 + 100 r^n \left[ \frac{155}{11} \sin(n\alpha) + 40 \cos(n\alpha) \right] \end{cases}.$$

### Conclusion

La théorie esquissée ci-dessus peut sembler difficile pour des élèves de Terminale S. Elle me paraît cependant accessible, à condition de travailler uniquement sur des coefficients numériques, et d'admettre l'expression générale de  $A^n$ .

On peut aussi, comme le suggère le document ressource, et compte tenu du temps disponible (lui aussi limité), se contenter d'explorer au tableur les formules de récurrence. Mais à mon avis on perd une partie de l'intérêt de l'étude : pourquoi linéariser, si on n'explique pas  $A^n$  ? D'autant que les formules obtenues expliquent les oscillations éventuelles ainsi que leur caractère expansif ou amorti.

En tout cas ce travail permet, en liaison si possible avec le professeur de SVT, de montrer comment un modèle peut être construit à partir d'hypothèses explicites pour rendre compte d'observations expérimentales<sup>(8)</sup>, puis exploité pour faire des prévisions, en vue par exemple de réguler l'élevage, la chasse ou la pêche<sup>(9)</sup>, ou de gérer les grands parcs d'animaux sauvages.

### Bibliographie :

- [1] BACAËR Nicolas, *Histoire de mathématiques et de populations*, Cassini 2009.
- [2] BAIR Jacques et MAWHIN Jean, *Modèles de type proie-prédateur*, in Tangente Hors-série n° 42 (avril 2011).
- [3] DELAHAYE Pascal, *Le modèle prédateur-proie*.  
[www.crdp.ac-grenoble.fr/imel/delahaye/predateur/](http://www.crdp.ac-grenoble.fr/imel/delahaye/predateur/)
- [4] Document ressource Spécialité de terminale S, *Matrices*, pages 57 à 63.  
[http://media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/89/3/maths-S-specialite\\_207893.pdf](http://media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/89/3/maths-S-specialite_207893.pdf)
- [5] LOTKA Alfred James, *Elements of physical biology*, 1925.  
<http://ia600307.us.archive.org/35/items/elementsofphysic017171mbp/elementsofphysic017171mbp.pdf>
- [6] MAGAL Christelle, *Mathématiques en dynamique des populations*, conférence aux Journées Nationales APMEP d'Orléans 2004, BV 459, p. 439-440.
- [7] MILLET Damien, *Introduction à l'interaction des proies et des prédateurs*, in Quadrature n° 10 (1991), p. 35-39.
- [8] PAVÉ Alain, *Modélisation en biologie et écologie*, Aléas 1994, p. 98-100 et 258-275.
- [9] VOLTERRA Vito, *Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie*, Gauthier-Villars, 1931 (réimpr. Jacques Gabay en 1990)

(8) Les curseurs disponibles dans le fichier proies\_predateurs.xls permettent de faire varier commodément les coefficients  $a, b, c, d, k$ .

(9) Réguler la chasse ou la pêche d'espèces prédatrices revient à jouer sur le coefficient  $d$ .

## ANNEXE : les calculs

### 1) Formule explicite pour $A^n$

Soit  $A$  une matrice carrée  $A$  d'ordre 2 ayant deux valeurs propres distinctes  $\lambda$  et  $\mu$ .

D'après le théorème de Cayley-Hamilton,  $A^2 = (\lambda + \mu)A - \lambda\mu I$ .

On en déduit par récurrence :  $A^n = a_n A + b_n I$ ,

$$\text{avec } \begin{cases} a_0 = 0 \\ b_0 = 1 \end{cases}, \begin{cases} a_1 = 1 \\ b_1 = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} a_{n+1} = (\lambda + \mu)a_n + b_n \\ b_{n+1} = -\lambda\mu a_n \end{cases}.$$

On en déduit  $a_{n+1} = (\lambda + \mu) a_n - \lambda\mu a_{n-1}$ .

L'équation associée est l'équation caractéristique de  $A$ , de solutions  $\lambda$  et  $\mu$ .

Comme  $\lambda \neq \mu$ , on en déduit  $a_n = \alpha\lambda^n + \beta\mu^n$  pour tout naturel  $n$ .

$$n = 0 \text{ fournit } \alpha + \beta = 0 ; n = 1 \text{ fournit } \alpha\lambda + \beta\mu = 1. \text{ Donc } \alpha = \frac{1}{\lambda - \mu} \text{ et } \beta = \frac{-1}{\lambda - \mu}.$$

$$\text{Finalement } a_n = \frac{\lambda^n - \mu^n}{\lambda - \mu} \text{ d'où } b_n = -\lambda\mu \frac{\lambda^{n-1} - \mu^{n-1}}{\lambda - \mu}.$$

$$\text{Donc } A^n = \frac{\lambda^n - \mu^n}{\lambda - \mu} A - \lambda\mu \frac{\lambda^{n-1} - \mu^{n-1}}{\lambda - \mu} I \text{ pour tout naturel } n.$$

### 2) Cas où les valeurs propres sont complexes conjuguées

Si  $\lambda = re^{i\alpha}$  et  $\mu = re^{-i\alpha}$ , cette formule devient

$$A^n = \frac{r^{n-1}}{\sin(\alpha)} \left[ \sin(n\alpha) A - r \sin((n-1)\alpha) I \right].$$

Autrement dit,

$$\begin{aligned} A^n &= \frac{r^{n-1}}{\sin(\alpha)} \left[ \sin(n\alpha) A - r \sin(n\alpha) \cos(\alpha) I + r \cos(n\alpha) \sin(\alpha) I \right] \\ &= r^n \left[ \frac{\sin(n\alpha)}{r \sin(\alpha)} (A - r \cos \alpha I) + \cos(n\alpha) I \right]. \end{aligned}$$

### 3) Premier modèle linéarisé

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{bd}{c} \\ \frac{ac}{b} & 1 \end{pmatrix}, \text{ les valeurs propres sont } \lambda = 1 + i\sqrt{ad} \text{ et } \mu = 1 - i\sqrt{ad}, \text{ donc}$$

$$r = \sqrt{1+ad}, \alpha = \arctan(\sqrt{ad}), r \cos(\alpha) = 1, r \sin(\alpha) = \sqrt{ad}.$$

$$\text{On en déduit } A^n = r^n \left[ \frac{\sin(n\alpha)}{\sqrt{ad}} (A - I) + \cos(n\alpha) I \right].$$

## 4) Deuxième modèle (milieu limité) linéarisé

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \frac{kd}{c} & -\frac{bd}{c} \\ \frac{ac - kd}{b} & 1 \end{pmatrix}. \text{ Étudions son polynôme caractéristique :}$$

$$\text{Det}(A - xI) = \left(1 - \frac{kd}{c} - x\right)(1 - x) + ad - \frac{kd^2}{c} = x^2 + \left(\frac{kd}{c} - 2\right)x + 1 + ad - \frac{kd}{c}(1 + d).$$

$$\text{Le discriminant s'écrit } \Delta = \frac{a^2}{c^2} \left(k^2 + 4kc - 4\frac{ac^2}{d}\right) = \frac{a^2}{c^2} \left[(k + 2c)^2 - 4c^2 \left(1 + \frac{a}{d}\right)\right].$$

$$\Delta \text{ est négatif si } k < 2c \left(\sqrt{1 + \frac{a}{d}} - 1\right).$$

La matrice a alors deux valeurs propres complexes conjuguées :

$$\lambda = 1 - \frac{kd}{2c} + i \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = re^{i\alpha} \text{ et } \mu = 1 - \frac{kd}{2c} - i \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = re^{-i\alpha}.$$

La formule du 2) indique qu'on a alors des oscillations de période  $\frac{2\pi}{\alpha}$  : expansives si  $r > 1$ , sinusoidales si  $r = 1$ , amorties si  $r < 1$ .

$$\text{Or } r^2 = \left(1 - \frac{kd}{2c}\right)^2 - \frac{\Delta}{4} = 1 + ad - \frac{kd}{c}(1 + d).$$

$$r < 1 \text{ quand } ad - \frac{kd}{c}(1 + d) < 0, \text{ soit } k > \frac{ac}{1 + d}.$$

Finalement :

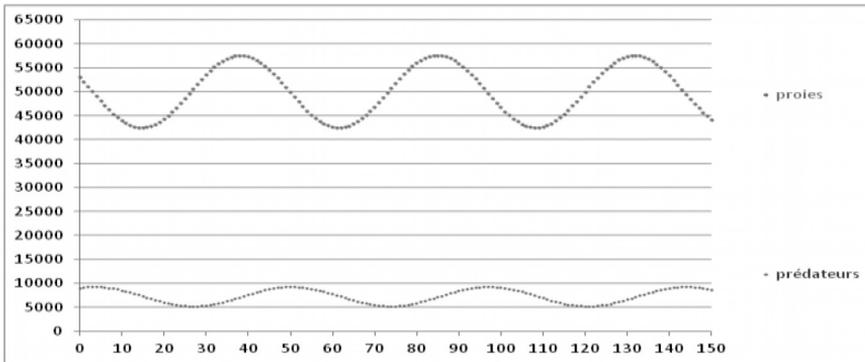
- si  $0 \leq k < \frac{ac}{1 + d}$ , on a des oscillations expansives, comme dans le premier modèle où  $k = 0$  ;
- si  $k = \frac{ac}{1 + d}$ , on a des oscillations sinusoidales ;
- si  $\frac{ac}{1 + d} < k < 2c \left(\sqrt{1 + \frac{a}{d}} - 1\right)$ , on a des oscillations amorties qui convergent vers l'état d'équilibre ;
- si  $2c \left(\sqrt{1 + \frac{a}{d}} - 1\right) \leq k \leq \frac{ac}{d}$ , les valeurs propres sont réelles de valeur absolue inférieure à 1, et on a une convergence vers l'état d'équilibre sans oscillations.

Avec les coefficients indiqués dans l'exemple ( $a = 0,09$  ;  $b = 10^{-5}$  ;  $c = 5 \times 10^{-6}$  ;  $d = 0,25$ ),

$$\frac{ac}{1+d} = 36 \times 10^{-8} ; 2c \left( \sqrt{1 + \frac{a}{d}} - 1 \right) \approx 166 \times 10^{-8} ; \frac{ac}{d} = 180 \times 10^{-8}.$$

### 5) Exemple d'oscillations sinusoïdales

Pour  $k = 36 \times 10^{-8}$ , on observe des oscillations sinusoïdales autour de l'état d'équilibre (50 000, 7 200) :



$$x_e = 50\,000 ; y_e = 7\,200 ; u_0 = 3\,000 ; v_0 = 1\,800.$$

$$A = \begin{pmatrix} 0,982 & -0,5 \\ 0,036 & 1 \end{pmatrix} ; r \cos \alpha = 0,991 ; r \sin \alpha = 0,003\sqrt{1991}.$$

$$r = 1 ; \alpha = \arccos 0,991 \approx 0,134 \text{ (période 47 ans environ)} ;$$

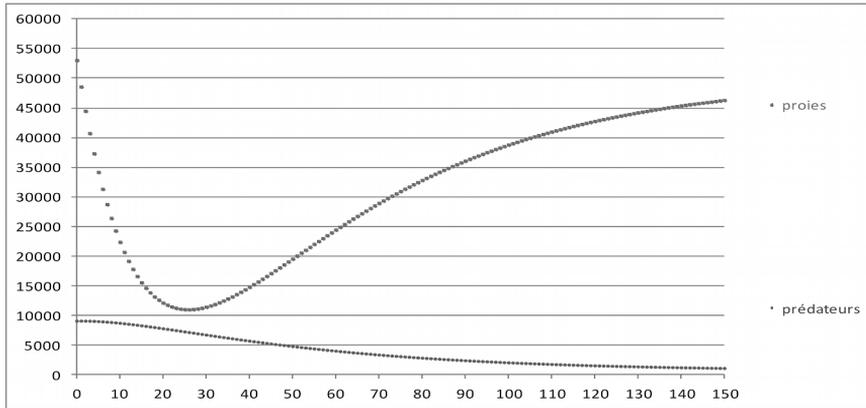
$$\begin{aligned} A^n &= r^n \left[ \frac{\sin(n\alpha)}{r \sin(\alpha)} (A - r \cos(\alpha)I) + \cos(n\alpha)I \right] \\ &= \frac{\sin(n\alpha)}{3\sqrt{1991}} (1000A - 991I) + \cos(n\alpha)I. \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_n = 50\,000 - \frac{309\,000}{\sqrt{1991}} \sin(n\alpha) + 3\,000 \cos(n\alpha) \\ y_n = 7\,200 - \frac{41\,400}{\sqrt{1991}} \sin(n\alpha) + 1\,800 \cos(n\alpha) \end{cases}$$

La spirale portant les  $(x_n, y_n)$  se réduit alors à une ellipse.

### 6) Exemple de convergence sans oscillations

Pour  $k = 169 \times 10^{-8}$ , on observe une convergence vers l'état d'équilibre (50 000, 550) sans oscillations :



$$x_e = 50\,000 ; y_e = 550 ; u_0 = 3\,000 ; v_0 = 8\,450.$$

$$A = \begin{pmatrix} 0,9155 & -0,5 \\ 0,0275 & 1 \end{pmatrix} ; \lambda = 0,978 ; \mu = 0,9375 \text{ (valeurs exactes).}$$

~~$r = 1 ; \alpha = \arccos 0,991 \approx 0,134$  (période 47 ans environ) ;~~ (Erratum)

$$\begin{aligned} A^n &= \frac{\lambda^n - \mu^n}{\lambda - \mu} A - \lambda\mu \frac{\lambda^{n-1} - \mu^{n-1}}{\lambda - \mu} I = \lambda^n \frac{A - \mu I}{\lambda - \mu} + \mu^n \frac{A - \lambda I}{\mu - \lambda} \\ &= \frac{0,978^n}{81} \begin{pmatrix} -44 & -1000 \\ 5,5 & 125 \end{pmatrix} + \frac{0,9275^n}{81} \begin{pmatrix} 125 & 1000 \\ -5,5 & -44 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_n = 50\,000 - \frac{8\,582\,000}{81} 0,978^n + \frac{8\,825\,000}{81} 0,9375^n \\ y_n = 550 + \frac{1\,072\,750}{81} 0,978^n - \frac{388\,300}{81} 0,9375^n \end{cases}$$