Les problèmes de l'APMEP

Les propositions de problèmes, solutions ou commentaires, sont à envoyer à
Max HOCHART
13, rue des Garennes
63 800 Cournon d'Auvergne
ou
hochartmax@yahoo.fr

Énoncés des nouveaux problèmes

Problème 500 - 1

Soit f : $[0, 1] \to \mathbb{R}$ continue, telle que $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Montrer qu'il existe $x \in\ ]0, 1[$ tel que $\int_0^x t\,f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Problème 500 - 2 (Jean-Louis Trinquand (Clermont-Ferrand))

Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On extrait au hasard successivement et sans remise tous les jetons de l'urne. On note t_i le numéro porté par le jeton obtenu au i-ième tirage. On note x_i le plus petit nombre de séquences d'entiers consécutifs que l'on peut former en utilisant tous les entiers $t_1, \ldots, t_i$.
On définit enfin une variable aléatoire X par

$$\mathrm{X} = \max\left\{x_i \mid i \in [\![1,n]\!]\right\}.$$

Que dire d'icelle ?
Voici un exemple pour $n = 8$. Si on a

$$t_1 = 4, t_2 = 5, t_3 = 2, t_4 = 7, t_5 = 1, t_6 = 3, t_7 = 8, t_8 = 6,$$

alors

$$x_1 = \operatorname{card}\left\{\{4\}\right\} = 1, x_2 = \operatorname{card}\left\{\{4,5\}\right\} = 1, x_3 = \operatorname{card}\left\{\{2\},\{4,5\}\right\} = 2,$$
$$x_4 = \operatorname{card}\left\{\{2\},\{4,5\},\{7\}\right\} = 3, x_5 = \operatorname{card}\left\{\{1,2\},\{4,5\},\{7\}\right\} = 3,$$
$$x_6 = \operatorname{card}\left\{\{1,2,3,4,5\},\{7\}\right\} = 2, x_7 = \operatorname{card}\left\{\{1,2,3,4,5\},\{7,8\}\right\} = 2,$$
$$x_8 = \operatorname{card}\left\{\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\right\} = 1.$$

Dans ce cas, X prend la valeur 3.

L'énoncé suivant, proposé dans le bulletin 499, comportait une erreur. Voici donc une version correcte.

Problème 499 - 3 (François Duc (Orange))

On pose $u_1 = 1$, $u_2 = 2$. Pour $n \geq 2$, u_{n+1} est le plus petit entier naturel strictement positif, différent de $u_1, u_2, \ldots, u_n$, non premier avec u_n. Montrer que la suite u est une permutation de $\mathbb{N}^*$. Étudier son comportement en $+\infty$.

Solutions des problèmes antérieurs

Problème 494-3 (Question de Moubinool Omarjee)

Pour $t > 0$, on définit

$$\mathrm{H}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!(n+1)!}.$$

Montrer que

$$\mathrm{H}(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\mathrm{e}^{2\sqrt{t}}}{t^{\frac{3}{4}}}.$$

Solution de Moubinool Omarjee (Lycée Jean-Lurcat, Paris).

On commence par exprimer $\mathrm{H}(t)$ à l'aide d'une intégrale :

$$\mathrm{H}(t) = \frac{1}{\pi\sqrt{t}} \int_0^{\pi} \cos(u)\cdot\exp\left(2\sqrt{t}\cos(u)\right)\mathrm{d}u.$$

En effet, pour un $t > 0$ fixé, par le développement en série entière de l'exponentielle,

$$\frac{1}{\pi\sqrt{t}}\cos(u)\cdot\exp\left(2\sqrt{t}\cos(u)\right) = \sum_{p=0}^{+\infty} h_p(u),$$

avec

$$h_p(u) = \frac{1}{\pi p!} 2^p \left(\sqrt{t}\right)^{p-1} \cos^{p+1}(u).$$

Or

$$\left\|h_p\right\|_\infty = \sup_{u\in[0,\pi]}\left(\left|h_p(u)\right|\right) = \frac{1}{\pi p!} 2^p \left(\sqrt{t}\right)^{p-1}.$$

Donc, par convergence normale,

$$\frac{1}{\pi\sqrt{t}} \int_0^{\pi} \cos(u)\cdot\exp\left(2\sqrt{t}\cos(u)\right)\mathrm{d}u = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2^p\left(\sqrt{t}\right)^{p-1}}{\pi p!}\mathrm{I}_{p+1},$$

avec, classiquement,

$$\mathrm{I}_m = \int_0^{\pi} \cos^m(u)\mathrm{d}u = \begin{cases} 0 & \text{si } m \text{ est impair} \\ \dfrac{\pi}{4^k}\dbinom{2k}{k} & \text{si } m = 2k \end{cases}.$$

Ainsi, en ne gardant dans la somme que les termes tels que $p + 1$ soit pair (disons égal à $2n + 2$ pour $n \in \mathbb{N}$), on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi\sqrt{t}}\int_0^{\pi}\cos(u)\cdot\exp\left(2\sqrt{t}\cos(u)\right)\mathrm{d}u &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{2n+1}}{\pi(2n+1)!}\frac{\pi}{4^{n+1}}\binom{2n+2}{n+1}t^n\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2}\frac{1}{(2n+1)!}\frac{(2n+2)!}{\left((n+1)!\right)^2}t^n\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{n!(n+1)!} = \mathrm{H}(t).\end{aligned}$$

L'idée est maintenant de négliger dans l'intégrale la partie « loin de 0 ». On coupe donc l'intégrale en deux :

$$\left|\frac{1}{\pi\sqrt{t}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos(u)\cdot\exp\left(2\sqrt{t}\cos(u)\right)\mathrm{d}u\right| \leq \frac{1}{\pi\sqrt{t}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left|\cos(u)\right|\mathrm{d}u = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right).$$

Donc

$$\mathrm{H}(t) \underset{t\to+\infty}{=} \frac{1}{\pi\sqrt{t}}\mathrm{A}(t) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right).$$

avec

$$\mathrm{A}(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(u)\cdot\exp\left(2\sqrt{t}\cos(u)\right)\mathrm{d}u.$$

On pose $v = 1 - \cos(u)$:

$$\mathrm{A}(t) = \mathrm{e}^{2\sqrt{t}}\int_0^1\frac{1-v}{\sqrt{2v-v^2}}\cdot\exp\left(-2v\sqrt{t}\right)\mathrm{d}v.$$

Le changement de variable $v = \dfrac{w^2}{2\sqrt{t}}$ donne

$$\mathrm{A}(t) = \frac{\mathrm{e}^{2\sqrt{t}}}{t^{\frac{1}{4}}}\int_0^{\sqrt{2}t^{\frac{1}{4}}}\frac{1-\dfrac{w^2}{2\sqrt{t}}}{\sqrt{1-\dfrac{w^2}{4\sqrt{t}}}}\cdot\mathrm{e}^{-w^2}\,\mathrm{d}w.$$

Enfin, le théorème de convergence dominée donne

$$\int_0^{\sqrt{2}t^{\frac{1}{4}}}\frac{1-\dfrac{w^2}{2\sqrt{t}}}{\sqrt{1-\dfrac{w^2}{4\sqrt{t}}}}\cdot\mathrm{e}^{-w^2}\,\mathrm{d}w \underset{t\to+\infty}{\to} \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-w^2}\,\mathrm{d}w = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

et, comme annoncé,

$$\mathrm{H}(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{\mathrm{e}^{2\sqrt{t}}}{t^{\frac{3}{4}}}.$$

Problème 495-4 (Question de Jean-Louis Trinquand)

Soit f : [0, 1] $\to$ [0, 1] une application continue. On considère la suite x définie par $x_1 = 1$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$x_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)x_n + \frac{1}{n} f\left(x_n\right).$$

Étudier la convergence de cette suite. Que dire de l'éventuelle limite ?

Solutions de Raymond Heitz (Lavergne) et Xavier Reliquet (Paris)

On commence par quelques rappels. Soit $x = \left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée.

1. Un réel λ est une valeur d'adhérence de x s'il existe une suite extraite de x qui converge vers λ.
2. On note l et L les limites inférieure et supérieure de la suite x :

$$l = \lim_{n\to+\infty}\left(\inf_{k\geq n}\left(x_k\right)\right),$$

$$\mathrm{L} = \lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{k\geq n}\left(x_k\right)\right).$$

   Les réels l et L sont respectivement la plus petite et la plus grand valeur d'adhérence de la suite x. En particulier, toute valeur d'adhérence de x se situe dans le segment $[l, \mathrm{L}]$.
3. La suite x converge si et seulement si $l = \mathrm{L}$.

On se place maintenant dans les conditions de l'exercice. On remarque que, la fonction f étant à valeurs dans [0, 1], la suite x est bien définie, à valeurs dans [0, 1], donc bornée. On peut donc définir l et L comme ci-dessus. On va établir les points suivants :

(A) l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite x est le segment $[l, \mathrm{L}]$;
(B) les réels l et L sont égaux (donc la suite x converge) ;
(C) la limite de la suite x est un point fixe de f.

Le point (A) résulte essentiellement de l'observation suivante :

$$x_{n+1} - x_n = \frac{f\left(x_n\right) - x_n}{n}. \tag{1}$$

Comme les réels x_n et $f\left(x_n\right)$ appartiennent à [0, 1],

$$\left|x_{n+1} - x_n\right| \leq \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{2}$$

Soit $\lambda \in\ ]l, \mathrm{L}[$. Pour montrer que λ est une valeur d'adhérence de x, il faut montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$, il existe $p \geq \mathrm{N}$ tel que $\left|x_p - \lambda\right| < \varepsilon$.

On peut supposer ε strictement inférieur à $\min(\lambda - l, \mathrm{L} - \lambda)$ et N strictement supérieur à $\frac{1}{\varepsilon}$, cette dernière condition garantissant la majoration $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$ pour tout $k > \mathrm{N}$ en vertu de (2). Puisque l est une valeur d'adhérence de x et que $l \in [0, l + \varepsilon[$, il existe $k > \mathrm{N}$ tel que

$$x_k \in [0, l + \varepsilon[.$$

De même, puisque L est aussi une valeur d'adhérence de x, il existe $\mathrm{K} > k$ tel que

$$x_{\mathrm{K}} \in]\mathrm{L} - \varepsilon, 1].$$

Comme $\mathrm{L} - \varepsilon > \lambda - \varepsilon$, l'ensemble

$$\left\{ j \in \mathbb{N} \mid j \geq k, x_j > \lambda - \varepsilon \right\}$$

est non vide, puisque qu'il contient K. On note p son plus petit élément. Par définition, $p > k$ (donc $p > \mathrm{N}$ donc $\frac{1}{p} < \varepsilon$) et $p - 1$ n'est pas dans l'ensemble, donc

$$x_{p-1} \leq \lambda - \varepsilon < x_p,$$

donc

$$x_p = x_{p-1} + \left(x_p - x_{p-1}\right) \leq \lambda - \varepsilon + \frac{1}{p} < \lambda.$$

Ainsi, x_p appartient à l'intervalle $]\lambda - \varepsilon, \lambda]$, comme souhaité.

On démontre maintenant le point (B), à savoir $l = \mathrm{L}$. On raisonne par l'absurde, en supposant $\mathrm{L} > l$. On distingue deux cas, selon que la restriction de f au segment $[l, \mathrm{L}]$ est ou non la fonction identité.

Dans le cas où $f\big|_{[l,\mathrm{L}]} = \mathrm{id}_{[l,\mathrm{L}]}$, en prenant pour valeur d'adhérence $\lambda = \frac{l + \mathrm{L}}{2}$, il existe un entier n tel que $x_n \in]l,\mathrm{L}[$. Mais $f\left(x_n\right) = x_n$ donc

$$x_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)x_n + \frac{1}{n} f\left(x_n\right) = x_n.$$

S'ensuit, sans difficulté, que x est stationnaire, ce qui est absurde (car $\mathrm{L} > l$).

Dans le cas où $f\big|_{[l,\mathrm{L}]} \neq \mathrm{id}_{[l,\mathrm{L}]}$, il existe un intervalle ouvert non vide $]\alpha,\beta[$, contenu dans $]l,\mathrm{L}[$ et sur lequel $f > \mathrm{id}$ ou $f < \mathrm{id}$. On traite par exemple le cas $f\big|_{]\alpha,\beta[} < \mathrm{id}_{]\alpha,\beta[}$.

On choisit pour valeur d'adhérence $\lambda = \frac{\alpha + \beta}{2}$. Il existe donc $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > \frac{1}{\beta - \alpha}$ et $x_n \in]\alpha,\beta[$. Mais puisque L est valeur d'adhérence et que $\mathrm{L} > \beta$, il existe un entier $p > n$ tel que $x_{p+1} > \beta$. On choisit p minimal. Alors $x_p \leq \beta$ mais

$$x_p = x_{p+1} - \left(x_{p+1} - x_p\right) > \beta - \frac{1}{p} > \alpha.$$

Ainsi, x_p appartient à $]\alpha,\beta[$, donc $f\left(x_p\right) < x_p$ et

$$x_{p+1} = \left(1 - \frac{1}{p}\right)x_p + \frac{1}{p}f\left(x_p\right) < x_p < \beta,$$

ce qui est absurde.
En conclusion, $\mathrm{L} = l$ et la suite x converge. On note l sa limite.

Le point (C) est basé sur la divergence de la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$. On montre par l'absurde que l est un point fixe. On suppose donc le réel $f(l) - l$ non nul, et l'on note σ son signe et M sa valeur absolue. La suite $\left(\sigma\left(f\left(x_n\right) - x_n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors vers $\mathrm{M} > 0$ et il existe donc $\mathrm{N} > 0$ tel que, pour $n > \mathrm{N}$,

$$\sigma\left(f\left(x_n\right) - x_n\right) \geq \frac{\mathrm{M}}{2}.$$

D'après (1),

$$\sigma\left(x_{n+1} - x_{\mathrm{N}}\right) > \frac{\mathrm{M}}{2n}.$$

En sommant,

$$\sigma\left(x_{n+1} - x_{\mathrm{N}}\right) > \frac{\mathrm{M}}{2}\sum_{k=\mathrm{N}}^{n}\frac{1}{k}.$$

Quand n tend vers $+\infty$, cette minoration contredit le caractère borné de la suite x. Ainsi, la suite x converge vers un point fixe de f.