Décomposition en valeurs singulières d'une matrice. Présentation intuitive

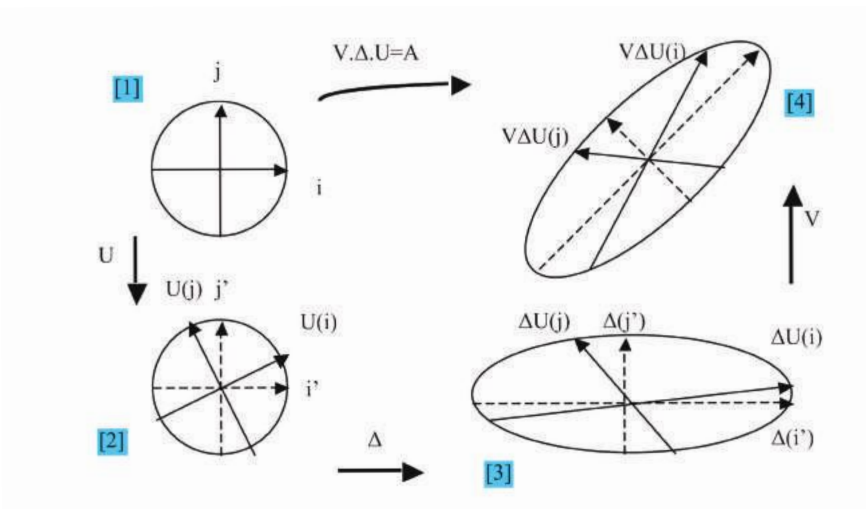
Jean Moussa(*)

Étant donnée une matrice A réelle quelconque, à m lignes et n colonnes, on peut décomposer A en produit de trois matrices :

$$A = V \times \Delta \times U$$

où U est une matrice orthogonale $n \times n$, V une matrice orthogonale $m \times m$, et Δ une matrice réelle $m \times n$ dont tous les éléments sont nuls sauf les éléments diagonaux $s_{i,i}$, pour $i = 0, 1, \ldots, \min(n,m)$, ceux-ci étant positifs et rangés par ordre décroissant :

$$s_{1,1} \geq s_{2,2} \geq \ldots \geq s_{\min(n,m),\min(n,m)} \geq 0.$$



Le but de ce texte est de donner une vision intuitive de la signification de ce théorème. On en trouve des démonstrations dans divers traités comme sur le web.

(*) jean.moussa@rocketmail.com

Le schéma ci-dessus illustre le cas où $m = n = 2$. La matrice A représente une transformation linéaire dans un espace à 2 dimensions. Elle est parfaitement précisée si l'on connaît les images d'une base orthonormée $\{i,j\}$. Dans la figure ci-dessus, on voit le cercle unité [1] et son image par A, [4]. La base est devenue

$$\left\{\mathrm{A}(i) = \mathrm{V}\Delta\mathrm{U}(i); \mathrm{A}(j) = \mathrm{V}\Delta\mathrm{U}(j)\right\},$$

qui est un système de deux vecteurs de longueurs quelconques, en général non perpendiculaires.
Le cercle de rayon 1, qui passait par les extrémités des vecteurs de base, s'est déformé, et il est devenu une ellipse qui passe encore par les extrémités de ces vecteurs. Il n'a pas pu devenir autre chose : du fait algébrique que la transformation est linéaire et le cercle une courbe bornée du second degré, son image est encore une courbe bornée du second degré.

Cette ellipse a deux axes de symétrie orthogonale, en pointillé sur [4]. Effectuer une rotation pour ramener ces axes à la position horizontale/verticale usuelle se fait en prenant à l'envers la flèche « V » de droite, et on arrive au dessin [3]. On peut alors ramener à la longueur 1 les vecteurs en pointillé, ce qui se fait en effectuant à l'envers la transformation Δ, qui est une affinité. L'ellipse redevient en [2] un cercle, qu'il suffit de faire tourner pour revenir à la position de départ [1].
Ce cheminement contient une idée de démonstration ; on remarquera que de telles représentations continuent d'exister en dimension quelconque pour une matrice carrée ; l'ellipse devient un ellipsoïde. Quelle que soit la dimension, l'ellipsoïde possède une base orthonormée constituée d'axes de symétrie droite, et on pourra effectuer une décomposition analogue utilisant une affinité et deux « rotations » d'un espace à n dimensions, en fait des transformations correspondant aux matrices orthogonales. Quand la matrice n'est pas carrée, ou quand il y a des éléments nuls dans Δ (ce qui traduit le fait que $\mathrm{A}_{m,n}$ n'est pas de rang maximum), on introduit une projection d'un côté et un plongement de l'autre : la projection supprime les dimensions « superflues » de l'espace de départ et le plongement rajoute les dimensions superflues de l'espace d'arrivée.

Exemple numérique. Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$. Le schéma du début correspond assez grossièrement à la matrice A. On va construire la décomposition de manière très concrète, en suivant *très précisément* le schéma.

On étudie d'abord la fonction $\theta \to f(\theta) = \left\| \mathrm{A}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \right\|^2$ qui donne le carré de la longueur de l'image d'un vecteur tournant sur le cercle unité. Elle s'écrit, après calculs :

$$f(\theta) = \frac{69}{2} + \frac{35}{2}\cos(2\theta) - 10\sin(2\theta) = \frac{1}{2}\left(69 + 5\sqrt{65}\cos(2\theta - \varphi)\right)$$

avec $\cos\varphi = \dfrac{7}{\sqrt{65}}$.

Elle atteint ses extrémums pour $\theta = \dfrac{\varphi}{2} \bmod 2\pi$ et $\theta = \dfrac{\varphi}{2} + \dfrac{\pi}{2} \bmod 2\pi$.

On en déduit alors $\cos\dfrac{\varphi}{2}$ et $\sin\dfrac{\varphi}{2}$ qui fournissent la matrice de U. En effet, on voit sur le schéma que les vecteurs $\vec{i}'$ et $\vec{j}'$ (en pointillé) sont ceux qui sont transformés en les axes de symétrie de l'ellipse.
Cette matrice est ici :

$$\mathrm{U} = \begin{pmatrix} 0,966499648764\ldots & 0,25666793515\ldots \\ -0,25666793515\ldots & 0,966499648764\ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{C}_1 & -\mathrm{S}_1 \\ \mathrm{S}_1 & \mathrm{C}_1 \end{pmatrix}.$$

On calcule les images des vecteurs $\vec{i}'$ et $\vec{j}'$ en effectuant simplement $\mathrm{A}\begin{pmatrix} \mathrm{C}_1 \\ \mathrm{S}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{X}_1 \\ \mathrm{Y}_1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{A}\begin{pmatrix} -\mathrm{S}_1 \\ \mathrm{C}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{X}_2 \\ \mathrm{Y}_2 \end{pmatrix}$, puis on calcule les longueurs des vecteurs ainsi obtenus ; cela donne ici :

$$\mathrm{L}_1 = 7,39294558148\ldots \; ; \mathrm{L}_2 = 3,787394306017\ldots$$

(on peut vérifier que les carrés de ces deux nombres sont les valeurs propres de la matrice symétrique ${}^{t}\mathrm{AA}$).
La matrice de l'affinité Δ est donc :

$$\Delta = \begin{pmatrix} 7,39294558148\ldots & 0 \\ 0 & 3,787394306017\ldots \end{pmatrix}.$$

Et on obtient le troisième terme de la décomposition en considérant qu'il s'agit de la rotation amenant le repère canonique sur celui formé par les axes de l'ellipse, c'est-à-dire :

$$\mathrm{V} = \begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{X}_1}{\mathrm{L}_1} & -\dfrac{\mathrm{Y}_1}{\mathrm{L}_1} \\ \dfrac{\mathrm{Y}_1}{\mathrm{L}_1} & \dfrac{\mathrm{X}_1}{\mathrm{L}_1} \end{pmatrix}.$$

On pouvait utiliser l'autre axe ; cela donne le même résultat, et d'ailleurs on peut vérifier que $\dfrac{\mathrm{X}_2}{\mathrm{L}_2} = -\dfrac{\mathrm{Y}_1}{\mathrm{L}_1}$; $\dfrac{\mathrm{Y}_2}{\mathrm{L}_2} = \dfrac{\mathrm{X}_1}{\mathrm{L}_1}$.
On a, numériquement,

$$\mathrm{V} = \begin{pmatrix} 0,661802563235\ldots & -0,749678175815\ldots \\ 0,749678175815\ldots & 0,661802563235\ldots \end{pmatrix}.$$

et bien entendu, au final, $\mathrm{A} = \mathrm{V}\Delta\mathrm{U}$.