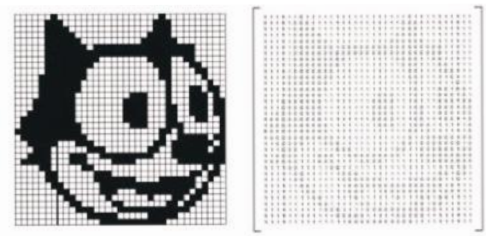
Matrices et images numériques

Dirce Uesu Pesco & Humberto José Bortolossi[*]

1. Images binaires, en noir et banc, et en couleurs

Les images que l'on trouve sur le net ainsi que celles des appareils numériques et des téléphones portables sont « numérisées ». Pour comprendre ce que cela signifie, on peut utiliser les matrices. Prenons par exemple la figure de Félix le chat.

On va la représenter par une matrice 35×35 dont les éléments valent 0 ou 1, 0 donnant un pixel[1] noir et 1 donnant un pixel blanc ; l'image sera ainsi constituée de $35 \times 35 = 1225$ pixels. De telles images sont nommées images binaires, ou images booléennes. Voici l'image avec ses pixels visibles et la matrice associée.



Les images dites en « noir et blanc » sont en fait des images en dégradé de gris. Elles peuvent aussi être représentées par des matrices : chaque élément de la matrice correspondra comme précédemment à un pixel, mais ces éléments seront des nombres entiers donnant l'intensité de gris voulue. On utilise habituellement des nombres de 0 à 255, 0 pour le noir et 255 pour le blanc, soit $256 = 2^8$ niveaux de gris, ce qui permet de coder l'image par 8N bits, si N est le nombre de pixels[2].

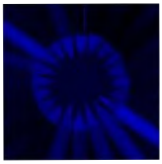
Les images en couleur sont représentées par trois matrices de taille identique, donnant l'intensité de Rouge, Vert, et Bleu pour chaque pixel. Cette méthode est désignée par le sigle RGB (Red, Green, Blue). Les éléments de ces trois matrices sont encore des entiers de 0 à 255. Dans le système RGB, il y a donc $256^3 = 2^{24} = 16\,777\,216$ teintes possibles pour chaque pixel. L'image finale est

(*) Fluminense Federal University.

(1) Le pixel est le plus petit élément graphique composant une image, il est rempli par une couleur unique.

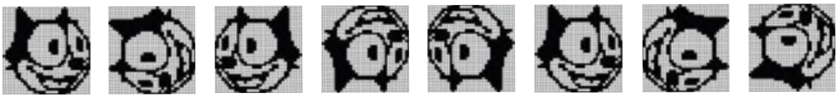
(2) Pour un travail ordinaire, ces 256 niveaux suffisent. Un nombre de niveaux plus élevé permet plus de détails, d'où moins d'erreurs d'arrondi quand on effectue des calculs à partir de l'image. C'est par exemple le cas en imagerie médicale.

obtenue en combinant les trois images(3). Ci-dessous, A est le résultat final.

A = , R = , G = , B = 

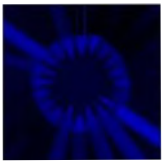
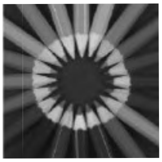
2. Traitement d'images numériques et opérations sur les matrices

À tout traitement effectué sur une image numérique va correspondre une transformation sur la matrice qui la représente, et vice-versa. Voici un exemple élémentaire(4). À l'image carrée A ci-dessous est associée la matrice $\mathrm{A} = \left(a_{i,j}\right)$. L'image suivante B est alors associée à $\mathrm{B} = \left(b_{i,j}\right) = \left(a_{j,i}\right) = \mathrm{A}^t$, c'est-à-dire la transposée de A, obtenue en échangeant les coefficients symétriques par rapport à la diagonale. L'image H correspond à la matrice $\left(a_{j,35-i+1}\right)$. À titre d'exercice, vous pouvez essayer de trouver les matrices de chacune des autres images.



A B C D E F G H

Un deuxième exemple. Pour passer une image colorée en noir et blanc, il suffit de former la matrice moyenne arithmétique des trois matrices R, G, B :

$\frac{1}{3}$  $+\frac{1}{3}$  $+\frac{1}{3}$  = 

Il se pose ici un petit problème d'arrondi, car l'élément de la matrice moyenne est un entier divisé par 3. On choisira l'entier le plus proche.

Troisième exemple, les effets de transition. Pour donner l'illusion optique d'une image se transformant progressivement en une nouvelle image (ou d'une image qui disparaît), on peut utiliser une famille de matrices. Si A est l'image de départ et Z celle d'arrivée, on va définir pour tout réel t, $t \in [0,1]$ la matrice

$$\mathrm{M}(t) = (1-t)\mathrm{A} + t\,\mathrm{Z}.$$

On remarque que $\mathrm{M}(0) = \mathrm{A}$, $\mathrm{M}(1) = \mathrm{Z}$, et que quand t varie, chaque élément de $\mathrm{M}(t)$ varie linéairement de la valeur qu'il a dans A à celle qu'il a dans Z. Pour des images

(3) La manière dont l'œil perçoit les couleurs à partir des trois composantes R, G, B n'est pas étudiée ici.

(4) Nous désignons par la même lettre l'image et sa matrice ; dans ce texte, la confusion n'est pas gênante.

en couleurs, on procédera de même pour chacune des trois matrices. Là encore, à chaque étape il faudra effectuer des arrondis.

M(0) = A M(0.13) M(0.25) M(0.38) M(0.50) M(0.63) M(0.75) M(0.88) M(1) = Z

Ce procédé est utilisé dans tous les logiciels de création visuelle, diaporamas, films, présentation de diapos, etc.

3. Une méthode de compression

Malgré les progrès fantastiques en termes de taille des mémoires, l'explosion du trafic des images a poussé les mathématiciens à chercher des moyens de transmettre des images autrement que pixel par pixel. Dans une image en effet, il y a de nombreuses plages qui ne contiennent pas ou très peu d'information, et on a trouvé des moyens de tenir compte de ce fait pour alléger le codage des images, c'est ce qu'on appelle la compression.

Notre méthode utilisera des techniques du niveau du premier cycle universitaire ou de celui des classes préparatoires. Nous pensons cependant qu'elle sera utile au lecteur. Il s'agit d'utiliser une décomposition des matrices en un produit d'une forme particulière.

Le théorème à la base de cette méthode est le suivant : toute matrice réelle $A_{m,n}$, ayant m lignes et n colonnes peut être écrite sous la forme :

$$A_{m,n} = U_{m,m} \times S_{m,n} \times V^t_{n,n}$$

où $U_{m,m}$ et $V_{n,n}$ sont des matrices orthogonales et $S_{m,n}$ est une matrice dont tous les éléments $s_{i,j}$ sont nuls sauf ceux de la « diagonale » et ceux-ci sont tels que

$$s_{1,1} \geq s_{2,2} \geq \ldots \geq s_{k,k} \geq 0$$

où $k = \min(m,n)$.

Cette décomposition est dite « en valeurs singulières » (SVD, singular values decomposition). En voici un exemple :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= USV^t = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}^t$$

La démonstration de l'existence d'une telle décomposition peut se trouver dans [2] et [3]

De plus, ces décompositions s'obtiennent par des algorithmes que l'on peut installer dans tout logiciel de calcul. Revenons à notre image représentée par la matrice $A_{m,n}$.
Une autre forme de la décomposition, du fait que $S_{m,n}$ a presque tous ses termes nuls, est :

$$A = USV^t = s_{1,1}U_1V_1^t + s_{2,2}U_2V_2^t + \ldots + s_{k,k}U_kV_k^t$$

où U_i désigne la i-ième ligne de U et V_j^t la j-ième colonne de V.
Les nombres m, n peuvent être très grands ; comme la matrice $S_{m,n}$ contient des nombres qui deviennent généralement petits assez vite, pour compresser l'image, on décide de remplacer par zéro les termes de $S_{m,n}$ à partir d'un certain rang. C'est dans la nullité ou la quasi-nullité des termes éloignés de cette diagonale de S que se « cachent » les pixels pas ou peu informatifs de l'image !

Supposez qu'une sonde spatiale doive transmettre à la Terre une image 1000×1000. Il y aura un million de nombres à transmettre. Si l'on néglige les termes de S au-delà du rang 20, il suffit de transmettre 20 colonnes de U et 20 de V, ainsi que 20 nombres de S, ce qui ne fait que 40 020 nombres à transmettre, soit une compression de l'image à environ 4% de sa taille initiale. Voici un exemple. L'image représente Félix Klein (1849-1925), et elle est composée de $720 \times 524 = 377\,280$ pixels.

Après décomposition de sa matrice, nous proposons les images obtenues en tronquant $S_{720,524}$ à des valeurs r diverses.

$r = 1$ $r = 5$ $r = 10$ $r = 20$

Si l'on choisissait $r = 524$ on retrouverait l'image initiale. L'image de droite ne « pèse » que 24 900 pixels, soit à peu près un quinzième de l'image initiale. Le résultat est quand même impressionnant, non ?

4. D'autres applications

Le traitement des images numériques est utilisé dans de nombreux domaines, tels que l'analyse et l'expérimentation à distance, la transmission des données, la médecine, la robotique, l'industrie cinématographique. Des images acquises par satellite servent à estimer les richesses naturelles, cartographier le terrain, étudier la croissance urbaine, suivre l'évolution d'une forêt, d'un glacier ou d'une banquise, suivre une pollution ou une éruption volcanique, etc. La transmission des images s'effectue par fax, par réseau, par le web, par des circuits fermés de télévision dans les entreprises ou les espaces publics. Dans le domaine médical on pratique l'analyse d'images obtenues par les rayons X, la tomographie, l'échographie, le scanner, l'IRM, etc.

L'acquisition ou la transmission des images peuvent générer du parasitage de l'image par des « bruits ». Le filtre médian est une technique de traitement d'image destinée à réduire l'effet de tels bruits. Pour chaque élément x de la matrice, nous classons les éléments voisins puis nous choisissons l'élément situé au milieu de la liste, et on remplace enfin x par cette nouvelle valeur. L'idée est de corriger une erreur s'étant produite sur un pixel isolé, dont la valeur associée sera « anormale », et donc en général anormale par rapport à celle de ses voisins immédiats.

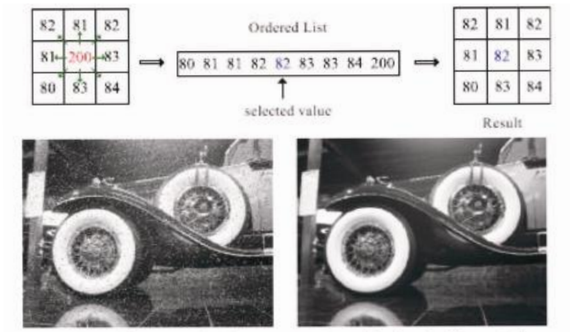


Image brute avec bruit — Après application du filtre médian

Voici d'autres exemples de traitement d'image en fonction d'objectifs divers.

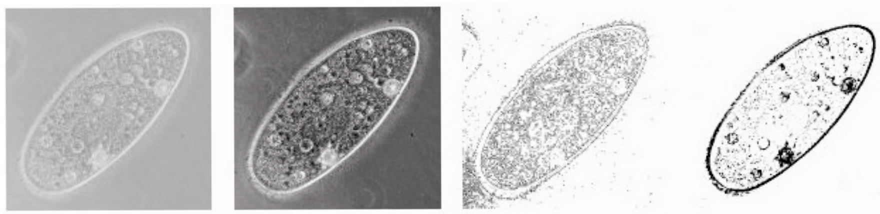


Image originale — Amélioration du contraste — Détection de bord — Effets de seuil

5. Conclusion

L'objectif était de présenter une application mal connue du calcul matriciel aux enseignants et à leurs élèves : le traitement d'image. Les outils mathématiques employés dans ce domaine sont très variés et vont bien au-delà des matrices, c'est un sujet moderne et très riche. Pour le lecteur désireux d'aller au-delà de cette présentation limitée, nous recommandons [4] et [5].

(traduction et adaptation de Jean Moussa)

Bibliographie

[1] Les sites http://www.uff.br/cdme/matrix/index-en.html
ou http://www.cdme.im-uff.mat.br/matrix/index-en.html
proposent des applets interactifs illustrant ce texte, ainsi qu'un doc contenant des suggestions d'exercices.

[2] Lay D. *Linear algebra and its applications*. Addison Wesley, 2011

[3] Poole D. *Linear algebra : A modern introduction*. Brooks Cole, 2005.

[4] Gomes J., Velho L. *Image processing for computer graphics and vision*. Springer Verlag, 2008.

[5] Gonzales R.C., Woods R.E. *Digital image processing*. Prentice Hall, 2007.