Problèmes additifs à transformations et représentations graphiques à l'école

Serge Petit

Le 28 janvier 2012, la dynamique Commission du premier degré se réunissait au local de l'APMEP sous la ferme houlette d'Agnès. À propos de la place des problèmes dans les nouveaux programmes de 2008, l'un d'entre nous, dont la discrète moustache ne cachait pas l'air taquin a proposé à notre petit groupe l'énoncé suivant, que nous dirons « du fil électrique », et qui est attribué à Gérard Vergnaud.

> Monsieur DURAND veut faire une installation électrique nouvelle dans 3 pièces de sa maison. Il estime qu'il lui faut 130 mètres de fil électrique, 4 interrupteurs et 9 prises ainsi que des douilles. Il lui reste d'une précédente installation 37 mètres de fil électrique qu'il va utiliser. Il est donc obligé de racheter du fil. Après avoir terminé son installation, il s'aperçoit qu'il a utilisé 4 mètres de fil de moins que prévu et qu'il lui en reste 11 mètres. Quelle longueur de fil a-t-il achetée ?

Quelques têtes se baissent, certains griffonnent, d'autres semblent rêvasser, mais tous cherchent. Viennent alors les premières propositions : 104 mètres, 93 mètres, … L'un d'entre-nous, dont nous apprîmes plus tard qu'il était bricoleur, souriait et ne disait mot. Il semblait avoir rapidement trouvé la solution. Afin de convaincre tout le monde, Jean-François, qui avait proposé l'énoncé, réalisa un petit schéma sur une miteuse feuille de papier attachée tant bien que mal à la porte de la salle sous la photo de Walusinski. Quelques traits associés à des écritures de nombres et deux ou trois flèches ont mis fin aux hésitations, montrant ainsi le poids des représentations dans la résolution de problèmes, même « simples ». Le schéma qui a été proposé, n'est peut-être pas à la portée immédiate des élèves, mais il a montré son efficacité, démontrant à nouveau, si cela était nécessaire, l'importance des changements de représentations dans la résolution de problèmes. Ce n'est pas du schéma réalisé par Jean-François qu'il sera question dans cette contribution, mais de l'élaboration d'une représentation graphique à la portée des élèves de l'école et susceptible de les aider. Ce problème, qui a fait hésiter certains d'entre nous, n'entre pourtant pas dans la catégorie des problèmes dits « difficiles », problèmes qui nécessiteraient des compétences mathématiques subtiles, mais dans celle des problèmes dits « complexes », problèmes à portée de tous du point de vue des concepts mathématiques mis en jeu mais qui imposent un certain *savoir lire* permettant de bien se représenter la situation décrite. Cette situation interroge sur l'activité mathématique elle-même. Faire des mathématiques à l'école ou des mathématiques du niveau de l'école est-ce seulement acquérir des automatismes de l'ordre du calcul ou est-ce aussi, et peut-être surtout, développer des compétences permettant de mieux lire, de mieux représenter une situation, de modéliser, etc. ?

Le but de cet article est de proposer un outil permettant cette lecture active des données et leur organisation. Cette approche semble d'autant plus justifiée que cet énoncé, donné au hasard à environ deux-cent-cinquante professeurs des écoles de cycle 2 et 3 de neuf circonscriptions différentes et à des formateurs non matheux, renvoie un taux de réussite atteignant péniblement vingt pour cent.

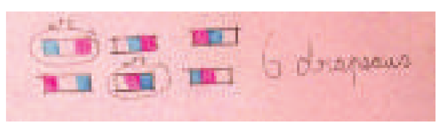
Nous présenterons en fin d'article une représentation graphique permettant aux élèves de résoudre ce problème, c'est-à-dire de lire de manière active cet énoncé en vue de sa résolution. Auparavant, nous analyserons plusieurs représentations des problèmes à une transformation observées dans des ouvrages de l'école (ou des situations auxquelles ils font référence) et nous proposerons une représentation pour ce type de problèmes.

Petit rappel

Nous rappelons au lecteur l'article *Lire et écrire des énoncés de problèmes*(1). Cet article porte sur la résolution de problèmes additifs à une transformation et sur l'aide apportée à la compréhension d'énoncés de problèmes par l'immersion des élèves dans un projet d'écriture visant la rédaction d'énoncés. Un tel projet suppose en amont l'analyse de la structure d'un énoncé. Si les travaux de G. Vergnaud fournissent une grille de lecture de ce type d'énoncés, ils omettent cependant de prendre en compte les aspects textuels de l'énoncé. Un énoncé de problème additif à une transformation peut être considéré comme ayant été construit à partir d'une histoire souvent fictive, comportant un état initial, une transformation et un état final(2). Le temps intervenant nécessairement dans un problème de transformation, tout énoncé de problème additif à une transformation mobilise donc, même de manière implicite, trois périodes. Nous convenons de noter Bleu la première période dans l'ordre chronologique, Blanc la seconde (celle de la transformation) et Rouge la troisième (celle de l'état final).

Ainsi, à partir d'une même histoire, il est possible de fabriquer six énoncés de problèmes dans lesquels la question est posée à la fin. Chaque problème peut alors être caractérisé par ce que nous appelons son « drapeau », c'est-à-dire par l'ordre selon lequel apparaissent ces trois périodes dans le texte de l'énoncé.

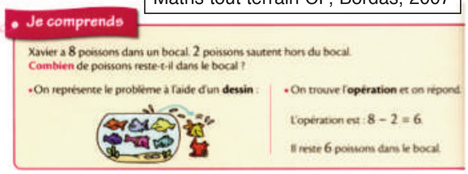
Six drapeaux sont possibles comme le démontre l'élève ayant produit l'ensemble des drapeaux ci-contre.



Vers une représentation graphique des problèmes à une transformation

Analysons tout d'abord quelques représentations rencontrées dans des ouvrages scolaires. Le drapeau de l'énoncé du problème ci-contre est

Maths tout terrain CP, Bordas, 2007


• Je comprends

Xavier a 8 poissons dans un bocal. 2 poissons sautent hors du bocal.
Combien de poissons reste-t-il dans le bocal ?

• On représente le problème à l'aide d'un **dessin** :

• On trouve l'**opération** et on répond.

L'opération est : 8 – 2 = 6.

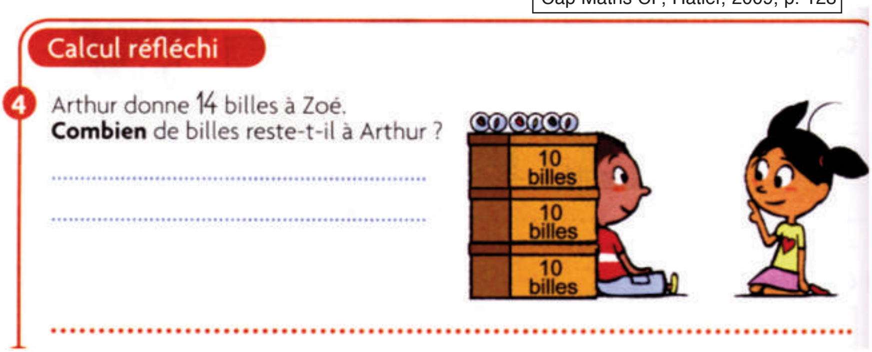
Il reste 6 poissons dans le bocal.

(1) Camenisch Annie, Petit Serge, Lire et écrire des énoncés de problème. *Bulletin de l'APMEP* nº 456, janvier-février 2005, p. 7-20. Article également disponible en ligne à l'adresse : http://www.apmep.asso.fr/IMG/pdf/Petit_Camenich_bulletin_456-2.pdf
(2) C'est G. Vergnaud qui désigne ainsi ces états.

bleu, blanc, rouge. L'énoncé est rédigé au présent de narration. Le facteur temps intervient donc fortement par l'usage de ce temps qui veut que l'ordre chronologique soit l'ordre dans lequel sont rapportées les informations dans l'énoncé. Pourtant, cet ordre chronologique est absent de l'image où l'on semble ne vouloir représenter que la transformation proprement dite, l'état initial et l'état final n'étant pas représentés. L'état initial, pourtant nécessaire à la résolution du problème, est clairement mentionné dans le texte, mais ne figure pas sur le dessin. L'écriture mathématiques 8 – 2 = 6 à côté de l'image, renvoie à cet état initial puisque 8 indique le nombre de poissons dans le bocal avant que deux ne s'en échappent. Le dessin conduirait davantage à écrire 6 + 2 = 8 (qui indiquerait le nombre total de poissons sur le dessin, six poissons dans le bocal et deux poissons hors du bocal). Le dessin n'est ici d'aucune aide pour l'écriture de l'égalité résolvante. Il est peu utile à la résolution du problème et il n'y a d'ailleurs nul besoin de calcul pour dire combien de poissons restent dans le bocal. Tout enfant de CP sera capable de dire « six », même sans compter. Le dessin peut ainsi paraître plus préjudiciable qu'utile.

Dans l'exemple ci-dessous, la temporalité indiquée par l'ordre de lecture et le présent de narration n'est pas traduite dans la représentation graphique. Arthur vient-il de donner les billes, va-t-il les donner ? Le fait de ne pas voir les billes de Zoé indique-t-il qu'Arthur n'a pas encore donné ses billes ou Zoé a-t-elle placé ses billes derrière elle ? Là encore, l'image ne traduit pas la situation. Elle sert davantage d'illustration et n'est pas opérationnelle.

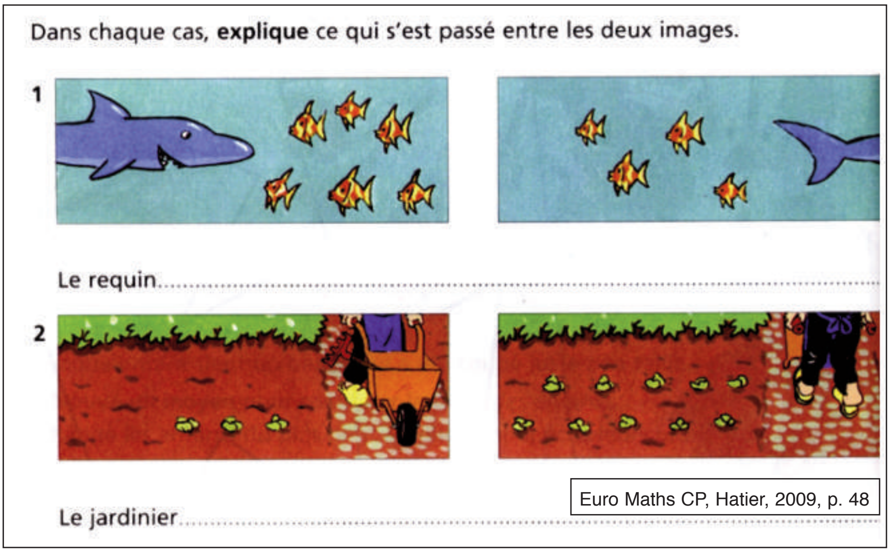
Cap Maths CP, Hatier, 2009, p. 128



Dans le même ouvrage, page 112, figure l'énoncé ci-contre.

Il semble s'agir d'un problème à une transformation, mais, ni l'énoncé, ni le dessin ne l'expriment clairement. L'énoncé impose à l'élève de considérer qu'il y avait un état initial (vraisemblablement la boîte pleine de pailles), qu'on a ensuite prélevé de cette boite les pailles figurant dans les gobelets et que le résultat de la transformation est illustré par le dessin. Le dessin, qui complète l'énoncé, ne fournit pas les repères temporels nécessaires à une bonne représentation de l'histoire sous-jacente. De plus, les élèves sont habitués à ce que la mention d'une quantité figurant sur un contenant indique le nombre d'objets présents dans ce contenant au moment où on l'observe et non avant. Ils peuvent donc être conduits à fournir comme réponse 18. Dans cet exercice, la transformation elle-même – qui porte sur le nombre de pailles dans la boite –, articulation de l'exercice, n'est pas indiquée et l'élève est peu ou prou livré à un travail divinatoire.

D'autres ouvrages s'attachent à marquer la temporalité comme on peut le voir sur les deux exemples suivants.



Euro Maths CP, Hatier, 2009, p. 48

Le premier exemple est difficile à traiter puisque nous ne sommes pas certains que quelques poissons ne sont pas tout simplement sortis du champ. La conclusion pourrait être que le requin a croisé un banc de poissons… Il semblerait cependant que la conclusion attendue soit « le requin a mangé deux poissons ». Dans ces deux cas, on peut remarquer que les auteurs ont dessiné l'état initial (dessins de gauche) et l'état final (dessins de droite) et invitent l'élève à décrire la transformation dans le registre(3) de la langue naturelle. Sur ces deux exemples, le dessin est une illustration. Les objets dont on étudie la variation en nombre sont dessinés de manière ressemblante.

L'exemple du jardinier semble moins prêter à confusion que celui des poissons, et on peut aisément conclure que le jardinier a planté dix salades. Toutefois, à y regarder de plus près – et on connait la propension des jeunes enfants à observer les détails –, le profil de la bordure verte en haut de l'image n'est pas le même dans les deux images, les grosses taches blanches (fleurs) sont différentes et les galets de l'allée sur laquelle marche le jardinier ne se correspondent pas d'une image à l'autre. Il se

(3) Pour la notion de registres sémiotiques, voir les travaux de Raymond Duval, in *Sémiosis et pensée humaine*, Peter Lang, 1995.

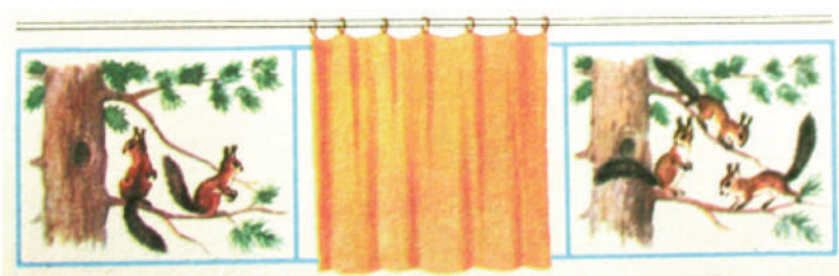
pourrait que le jardinier soit entré dans son jardin avec sa brouette en passant par une allée et en ressorte par une autre allée. Dans ce cas, la conclusion devient impossible. Certains diront qu'il ne faut pas « pinailler » à ce point…, mais on peut s'attendre à cette lecture de détail de la part de certains enfants.

Une conclusion s'impose cependant pour ces deux situations : il est fait appel à la langue française pour décrire une transformation en sous-entendant que la variation du temps se lit de manière croissante dans le sens de la lecture.

Les auteurs considèrent implicitement que la langue française permet de décrire la transformation et que les dessins permettent d'illustrer les états. On retrouve une attitude analogue d'autres auteurs dans la situation suivante, dans laquelle on pourrait cependant faire remarquer que l'emploi du déterminant *ce* aurait été préférable à celui de *le* si la réponse commence *par aujourd'hui*.

La Clé des maths CP, Bordas, 2008

Un ouvrage russe de CP, qui m'a été offert en 1992, lors des échanges entre l'APMEP et la PAYM (Association russe des professeurs de mathématiques) présente les transformations de la manière suivante :



$\boxed{2}$ $\boxed{2}\,\boxed{}\,\boxed{1}$ $\boxed{3}$

Il faut naturellement (en russe ou en français) lire de gauche à droite et c'est ce sens de la lecture qui impose de manière implicite un axe du temps. L'état initial est donc représenté par l'image de gauche, le nombre d'écureuils est mentionné sous cette case. De même l'image de droite représente l'état final. Par contre, si pudiquement la transformation n'a pas été représentée par un dessin, elle semble vouloir être indiquée par 2 + 1. La différence entre 2 + 1 et 3 est assez subtile puisque 2 + 1 égale

3. Les deux écritures (2 + 1 et 3) ont le même référent, à savoir le suivant de 2. Par contre, la première n'a pas le même sens que 3, puisqu'elle semble garder une trace de la manière dont elle a été engendrée (ajout d'un élément à un ensemble de cardinal 2). Cependant, si 2 + 1 conserve trace de l'arrivée d'un écureuil, cette écriture se situe après l'arrivée de l'écureuil et revient donc à celle de la troisième case. Elle ne saurait donc représenter le processus d'arrivée de l'écureuil qui, lorsqu'il arrive, est hors champ et dès qu'il est arrivé est dans le champ. Le dessin ne peut représenter à la fois, dans le même cadre deux écureuils et un écureuil qui arrive, ce qui ferait trois écureuils en tout. D'où la nécessité d'éviter de représenter par un dessin la transformation et de représenter celle-ci par une phrase écrite en langue française.

Cet ouvrage russe représente donc les transformations additives en imposant un axe du temps (certes implicite) et en représentant les états par des dessins.

On pourrait penser que cet ouvrage évite de représenter les transformations par un dessin. Il n'en est rien comme le montre l'extrait ci-contre où les trois lapins de la case du milieu sont supposés représenter la transformation. Une convention semble être établie implicitement dans l'ouvrage : les lapins qui tournent le dos et qui sont dessinés en plus petit s'en vont. D'où l'écriture 3 – 2. Pourtant, un calcul élémentaire montre que 3 – 2 vaut 1. Le cardinal de l'ensemble des lapins sous la deuxième image ne correspond donc pas à l'ensemble des lapins que l'élève peut dénombrer dans cette image. Cette difficulté peut être surmontée en décidant que les transformations ne se décrivent pas par des écritures chiffrées, mais qu'elles doivent être décrites par des mots de la langue. Les deux registres, le registre iconographique (pour les états) et le registre de la langue naturelle (pour les transformations) se complètent alors et permettent de reconstituer complètement l'histoire sous-jacente à la situation, histoire qui peut être écrite en langue naturelle, par trois phrases. L'énonciation se fait alors au présent de narration, la temporalité étant marquée par le sens de lecture.

L'histoire[4] des écureuils pourrait s'écrire ainsi :

Deux écureuils sont dans un arbre. Un écureuil arrive dans l'arbre. Il y a maintenant trois écureuils dans l'arbre.

Une nécessaire décontextualisation

La grande majorité des ouvrages de cycle 2 n'échappent pas à la tentation de demander aux élèves de dessiner pour résoudre les problèmes additifs à une transformation. À l'impossibilité de représenter une transformation à ce niveau autrement qu'avec une phrase, s'ajoute la difficulté (et la lenteur) de dessiner des vaches quand le problème porte sur cet animal, des lapins, des oiseaux, etc. Ces activités très chronophages, n'entrainent pas l'élève à abstraire, objectif pourtant essentiel des apprentissages mathématiques. Il est donc fondamental de permettre

(4) Voir BV 456.

aux élèves d'accéder à l'abstraction. Cette affirmation pose la question du mode de représentation des données.

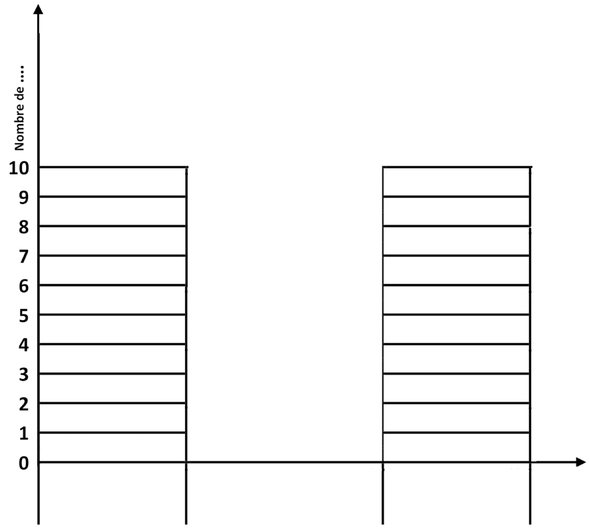
S'il est en effet facile de représenter des entités par des points (premier niveau d'abstraction au dessus du dessin illustratif), qu'en est-il d'objets d'autres natures ? Revenons au fil électrique du début. Comment représenter 12 mètres de fil ?

Dessiner comme ceci - - - - - - - - - - - - par une succession de douze segments de droite qui représenteraient chacun un mètre ? Ce serait créer une rupture entre la continuité du morceau de fil (qui n'est pas une collection de douze morceaux d'un mètre) et sa représentation. Donc, le représenter par un segment de droite ou une ligne continue. Mais comment alors distinguer 11 m de 12 m de fil ? Comment représenter une grande longueur de fil ? Par le dessin d'une bobine ? Peut-être car une telle représentation illustrerait bien la réalité. Mais comment alors distinguer une bobine de 50 m d'une bobine de 100 m ? Une mention comme *x mètres* portée à côté du dessin devent nécessaire. Le dessin seul est en effet insuffisant à traduire l'information, il doit être accompagné d'une indication de mesure ou d'une échelle (ce qui revient au même). On rencontre les mêmes difficultés pour représenter des températures ou des durées, c'est-à-dire des grandeurs continues alors que le dessin convient pour représenter des entités qu'il suffit de dénombrer, à condition toutefois qu'elles soient en nombre restreint.

Si l'on veut permettre à l'élève d'abstraire, il faut lui fournir un mode de représentation qui convienne quelle que soit la nature des objets représentés puisque les raisonnements et les opérations mathématiques à effectuer sont de même nature (addition ou soustraction). Un outil permet d'unifier les représentations.

Vers une représentation graphique

La nécessité de représenter les problèmes à une transformation en mobilisant un axe des temps apparait clairement dans l'ouvrage russe (1992) et dans certains ouvrages français. Régina Damm confirme cette idée dans sa thèse (1995). Ceci est cependant insuffisant. Il convient en effet de décontextualiser pour faire des mathématiques (ce que ne fait pas R. Damm dans les représentations qu'elle propose). Dès la première année du cycle 2, les élèves sont invités à résoudre des problèmes portant sur des entités ou des grandeurs continues. Les nombres représentés sont les nombres réels, ce qui permet de représenter des températures, des longueurs, même si les seuls nombres étudiés explicitement en Cycle 2 sont les entiers naturels. Il est donc possible de représenter graphiquement les données en utilisant un graphique comme celui présenté ci-dessous. L'axe des réels est pour partie représenté par l'axe des ordonnées.



L'axe des temps est partagé en trois périodes, une pour chacune des périodes de l'histoire. La première concerne ce qui est avant la transformation et permet de représenter l'état initial. La seconde est réservée à la transformation et n'est pas graduée, on y décrit la transformation par une phrase, au présent ; la troisième permet de décrire l'état final.

Un tel graphique permet de représenter complètement l'histoire dans ses aspects mathématiques. Il convient pour tout type de données en usage à l'école élémentaire. Les expériences réalisées en classes montrent que les élèves se l'approprient facilement, mais au début de CP on veillera cependant à travailler sur le principe de l'ouvrage russe avec des illustrations, en n'utilisant que la langue française pour décrire la transformation dans la case intermédiaire.

Cet outil permet aux élèves

- de repérer l'ordre chronologique et de le porter dans le graphique à partir du texte,
- de mieux visualiser les variations (augmentation, diminution),
- de mieux choisir l'opération à effectuer.

Un exemple d'utilisation de ce graphique

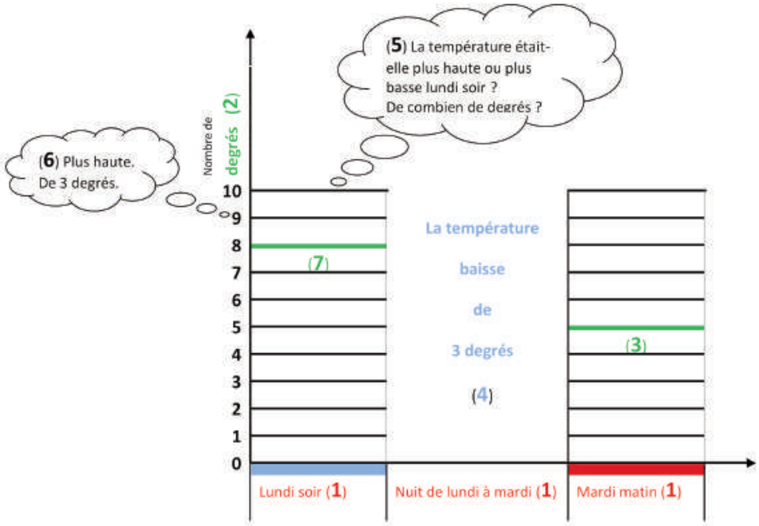
Il s'agit de résoudre le problème donné dans le cadre suivant, massivement échoué encore en CE2, voire en CM1.

Le « drapeau » de ce problème est Blanc-Rouge-Bleu (avec question sur le bleu). Il est massivement échoué par les élèves en début de CE2, voire encore en CM1 et ceci pour deux raisons essentielles : le non respect de l'ordre chronologique et le fait que traduire la baisse de température nécessite de mobiliser une addition (sauf à procéder par une soustraction à trou).

Pendant la nuit de lundi à mardi, la température dans la cour de l'école a baissé de 3 degrés. Mardi matin, la température est de 5 degrés. Quelle était la températures lundi soir ?

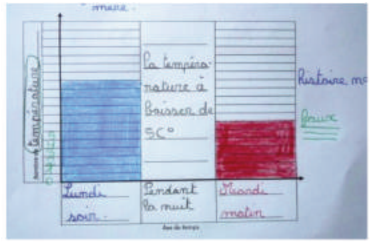
Le travail pour les élèves consistera à

- repérer les trois périodes qui apparaissent à la lecture dans l'ordre suivant (ordre du drapeau) : la nuit de lundi à mardi, mardi matin, lundi soir.
- à les placer dans l'ordre chronologique : lundi soir, la nuit de lundi à mardi, mardi matin.
- à reporter les désignations de ces périodes dans la grille (fournie) (1)
- à repérer ce qui varie : un nombre de … (nombre de degrés) (2)
- à repérer les valeurs fixes (5° mardi matin) (seule valeur fixe dans ce problème) (3)
- à repérer la transformation (la température a baissé de 3° dans la nuit de lundi à mardi)
- à la reformuler au présent de narration (la température baisse de 3°). Il n'est pas nécessaire de répéter le complément de phrase (dans la nuit de lundi à mardi) puisque cette indication est fournie par l'axe des temps et à la porter sur le graphique (4)
- à interroger le graphique : *lundi soir, la température était-elle plus haute ou plus basse que mardi matin ?* (5)
  - à y répondre *Plus haute !*
- de combien de degrés ? (6)
  - de trois degrés
- à compléter le graphique avec cette indication.(7)



Le problème est ainsi résolu par le graphique, l'histoire sous-jacente à l'énoncé de problème étant totalement reconstituée.

De tels graphiques, qui contraignent entre autres les élèves à reconstituer l'ordre chronologique, qui permettent une visualisation des transformations et qui sont valables quels que soit la nature de la grandeur variable se révèlent être une aide à la résolution de problèmes.



Production d'un élève de CM1 sur le même énoncé aux données numériques près. L'élève chargé de la correction a indiqué *faux* car il ne s'agit pas d'un nombre de *température*, mais d'un nombre de *degrés*.

Un tel graphique permet aussi de fabriquer des histoires et devient donc un support visuel pour écrire tous les énoncés de problèmes possibles[5].

Problèmes à plus d'une transformation

Un problème à plus d'une transformation peut se résoudre de la même manière grâce à cet outil. Il suffit en effet de considérer, ce que l'énoncé ne dit presque jamais, qu'entre une première transformation et la suivante, il y a une période qui est à la fois l'état final de la première transformation et l'état initial de la deuxième transformation. Il est toujours possible de considérer de manière théorique cette période, même si ce laps de temps est excessivement bref.

Retour à l'énoncé du fil électrique

Résolvons avec cet outil le problème du fil électrique donné au début. L'analyse de l'énoncé montre qu'il s'agit d'un problème additif à deux transformations.

Ce qui varie : le nombre de mètres de fils (1) du stock de M. Durand.

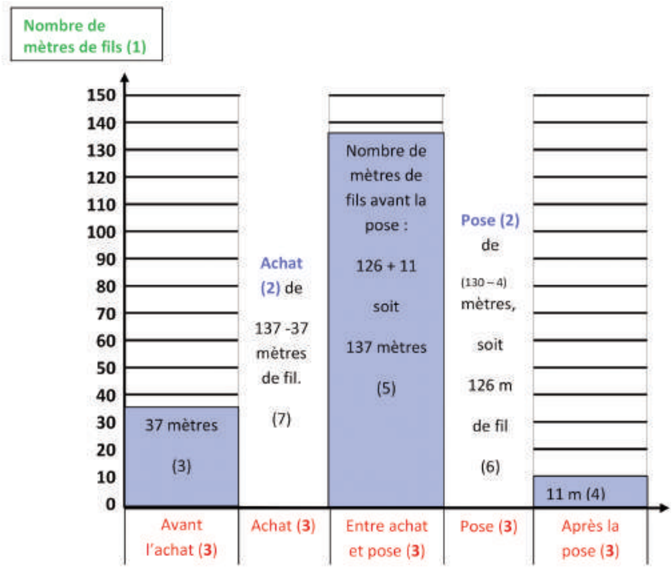
Les deux transformations de ce stock sont l'achat de fil et la pose du fil (2).

L'axe du temps comporte donc cinq périodes : avant l'achat, l'achat, entre l'achat et la pose (ce qui est un implicite de l'énoncé), la pose, après la pose (3).

Le graphique comporte cinq colonnes, deux pour indiquer les transformations et trois pour repérer les états.

La résolution s'effectue en suivant les étapes numérotées.

(5) Voir BV n° 456.

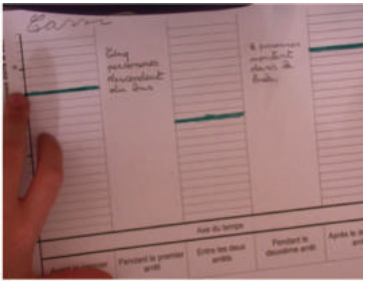


Note : la lecture d'un tel énoncé est retorse et il est bon de mobiliser une stratégie de lecture active avec prises de notes.

1. Le temps intervient-il ? si « oui » : axe des temps et repérage des périodes,
2. Ce qui varie est un nombre de… ? (ici mètres de fil électrique),
3. Qu'est-ce qui fait varier ce nombre (ici : la pose et l'achat),
4. Quelles sont les valeurs données directement (états ou valeurs des transformations) ? Ici : stock avant l'achat et après la pose,
5. Le graphique guide ensuite pour trouver les valeurs à déterminer (ici le nombre de mètres posés, puis le stock entre l'achat et la pose et enfin, le nombre de mètres achetés).

Des graphiques à deux transformations ont été proposés à des élèves de CE2 qui les ont adoptés comme ils avaient adopté des graphiques à une transformation. Ces graphiques leur ont permis de résoudre de manière relativement simple des problèmes difficiles comme le suivant :

Un bus s'arrête à un premier arrêt, 5 personnes descendent à cet arrêt. Il s'arrête ensuite à un deuxième arrêt où 7 personnes descendent. Y-a-t-il plus ou moins de personnes dans le bus après le deuxième arrêt ? Combien de plus ? Combien de moins ?



L'image montre une élève de CE2 en train de résoudre ce problème par le graphique en plaçant un nombre arbitraire de personnes dans le bus avant le premier arrêt. Sa conclusion émergera de la comparaison de l'état final (cinquième colonne) et de l'état initial (première colonne) et sera comparée à celle d'autres élèves ayant considéré un nombre différent de personnes dans le bus avant le premier arrêt.

Conclusion

Les problèmes additifs à une ou plusieurs transformations peuvent être résolus par des graphiques du type de ceux construits ci-dessus et qui présente les avantages suivants par rapport aux représentations classiques – plus illustratives qu'opérationnelles pour les résolutions de problèmes – :

- apport d'un axe du temps (abscisses) qui favorise la résolution par la reconstruction de l'ordre chronologique,
- apport d'un deuxième axe (des ordonnées) permet de représenter la grandeur qui varie par des valeurs numériques et donc de faire abstraction de la nature des grandeurs représentées, conférant ainsi à ces représentations un caractère général,
- meilleure représentation des variations par la visualisation, montrant ainsi l'avantage de la représentation de données de différentes manières.

Ces graphiques se simplifieront par l'usage et évolueront vers d'autres représentations plus classiques permettant de résoudre ce type de problèmes.