Les problèmes de l'APMEP

Les propositions de problèmes, solutions ou commentaires, sont à envoyer à

Max HOCHART
13, rue des Garennes
63 800 Cournon d'Auvergne
ou
hochartmax@yahoo.fr

Énoncés des nouveaux problèmes

Problème 499 - 1 (Michel Lafond (Dijon))

On pose $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{2n} = a_n$ et $a_{2n+1} = a_n + a_{n+1}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq n^{0{,}695}$. Montrer qu'il existe une infinité d'entiers naturels $n \in \mathbb{N}$ tels que $a_{2n} \geq n^{0{,}694}$.

Problème 499 - 2 (Xavier Reliquet (Paris))

Tout sous-corps de $\mathbb{C}$ est-il stable par conjugaison ?

Problème 499 - 3 (François Duc (Orange))

On pose $u_1 = 1$, $u_2 = 2$. Pour $n \geq 2$, u_{n+1} est le plus petit entier naturel strictement positif, différent de $u_1, u_2, \ldots, u_n$, premier avec u_n. Montrer que la suite u est une permutation de $\mathbb{N}^*$. Étudier son comportement en $+\infty$.

Solutions des problèmes antérieurs

Problème 492-3

Une droite Δ coupe un triangle ABC et le partage en deux polygones de même aire et même périmètre. Montrer que la droite Δ passe par le centre du cercle inscrit au triangle ABC.

Solutions de Maurive Bauval (Versailles), Robert Bourdon (Tourgeville), Marc Roux (Nîmes), Vincent Crombez (Clermont-Ferrand), Jean-Yves Hély (Rennes), Benoît Gugger (Aubière), Raymond Heitz (Lavergne), Georges Lion (Wallis), Richard Beczkowski (Chalon sur Saône), Bernard Lefrançois (Lyon), Alain Marcourt (Sainte Savine), Éric Oswald (Borgo), Alain Perron (Clelles), Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), David Vicente (Bourges).

Raymond Heitz précise que ce problème fut déjà posé par le passé, par exemple page 155 dans la brochure « Les 200 premiers problèmes de l'APMEP », ou encore pages 21-22 dans « Exercices de Géométrie Analytique », de Aubert et Papelier, publié chez Vuibert.

Voici une première solution, entièrement géométrique, due à **Georges Lion**. La droite Δ, partageant par hypothèse le triangle ABC en deux polygones, coupe deux côtés de ce triangle, par exemple [AB] en B′ et [AC] en C′. Les deux polygones introduits sont le triangle AB′C′ et le quadrilatère B′BCC′. La droite Δ coupe la bissectrice intérieure de $\widehat{\mathrm{BAC}}$ en K. On pose

$$d(K,(AB)) = r = d(K,(AC)) \quad \text{et} \quad r' = d(K,(BC)).$$

Si Ω désigne le centre du cercle inscrit dans ABC, l'égalité des distances $r = r'$ équivaut à l'égalité $K = \Omega$. Dans la suite des calculs, la lettre $\mathcal{A}$ désigne une mesure d'aire, la lettre $\mathcal{P}$ celle d'un périmètre. On peut alors écrire

$$2\mathcal{A}(\mathrm{AB'C'}) = r(\mathrm{AB'} + \mathrm{AC'})$$

et

$$2\mathcal{A}(\mathrm{B'BCC'}) = r(\mathrm{B'B} + \mathrm{C'C}) + r'\mathrm{BC}.$$

Donc

$$\begin{aligned} 2\mathcal{A}(\mathrm{AB'C'}) - 2\mathcal{A}(\mathrm{B'BCC'}) &= r(\mathrm{AB'} + \mathrm{AC'} - \mathrm{B'B} - \mathrm{C'C}) - r'\mathrm{BC} \\ &= r(\mathrm{AB'} + \mathrm{AC'} + \mathrm{B'C'} - \mathrm{B'B} - \mathrm{C'C} - \mathrm{B'C'}) - r'\mathrm{BC} \\ &= r\left[\mathcal{P}(\mathrm{AB'C'}) - \mathcal{P}(\mathrm{B'BCC'})\right] + (r - r')\mathrm{BC}. \end{aligned}$$

En conséquence, parmi les trois relations suivantes :

(1) $\mathcal{A}(\mathrm{AB'C'}) = \mathcal{A}(\mathrm{B'BCC'})$,

(2) $\mathcal{P}(\mathrm{AB'C'}) = \mathcal{P}(\mathrm{B'BCC'})$,

(3) Δ passe par Ω,

si deux ont lieu, alors la troisième aussi, ce qui conclut.

Richard Beczkowski, **Robert Bourdon**, **Jean-Yves Hély**, **Éric Oswald**, **Marc Roux**, **Vincent Crombez** proposent également une approche géométrique. Les autres lecteurs abordent cet exercice de façon plus analytique. Par exemple, on note α l'angle en A et l'on suppose que Δ coupe le segment [AB] en B′ et le segment [AC] en C′. On pose $a = \mathrm{BC}$, $b = \mathrm{AC}$, $c = \mathrm{AB}$ et aussi $c' = \mathrm{AB'}$ et $b' = \mathrm{AC'}$. Alors

$$\mathcal{A}(\mathrm{AB'C'}) = \frac{1}{2}\sin(\alpha)b'c' \quad \text{et} \quad \mathcal{A}(\mathrm{B'BCC'}) = \frac{1}{2}\sin(\alpha)bc - \frac{1}{2}\sin(\alpha)b'c'.$$

Ces deux aires sont égales si et seulement si

$$bc = 2b'c'. \tag{1}$$

Également,

$$\mathcal{P}(\mathrm{AB'C'}) = b' + c' + \mathrm{B'C'} \quad \text{et} \quad \mathcal{P}(\mathrm{B'BCC'}) = a + (b - b') + (c - c') + \mathrm{B'C'}.$$

Ces deux périmètres sont égaux si et seulement si

$$a + b + c = 2(b' + c'). \tag{2}$$

Un point M quelconque est barycentre des points A, B, C pour les poids respectifs $\mathrm{Det}(\overrightarrow{\mathrm{MB}}, \overrightarrow{\mathrm{MC}})$, $\mathrm{Det}(\overrightarrow{\mathrm{MC}}, \overrightarrow{\mathrm{MA}})$, $\mathrm{Det}(\overrightarrow{\mathrm{MA}}, \overrightarrow{\mathrm{MB}})$. Dans le cas du point Ω, centre du cercle inscrit dont le rayon est r, ces déterminants valent ra, rb, rc. Ainsi,

$$a\overrightarrow{\Omega\mathrm{A}} + b\overrightarrow{\Omega\mathrm{B}} + c\overrightarrow{\Omega\mathrm{C}} = \vec{0}.$$

La relation de Chasles donne alors

$$(a+b+c)\overrightarrow{\mathrm{A}\Omega} = b\overrightarrow{\mathrm{AB}} + c\overrightarrow{\mathrm{AC}}.$$

On travaille désormais dans le repère (non orthonormé) $\left(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$ dans lequel les coordonnées de Ω sont $\left(\dfrac{b}{a+b+c}, \dfrac{c}{a+b+c}\right)$. Dans ce même repère, l'équation de la droite $\Delta = (\mathrm{B'C'})$ est

$$\frac{c}{c'}x + \frac{b}{b'}y = 1.$$

Il reste à savoir si les coordonnées de Ω vérifient cette équation, c'est-à-dire si

$$\frac{c}{c'} \times \frac{b}{a+b+c} + \frac{b}{b'} \times \frac{c}{a+b+c} = 1,$$

soit encore

$$bc\left(\frac{1}{c'} + \frac{1}{b'}\right) = a+b+c.$$

D'après la relation (1), ceci équivaut à

$$2(b'+c') = a+b+c.$$

La relation (2) permet de conclure.

Marc Roux et **Raymond Heitz** signalent que la réciproque est fausse : une droite Δ passant par Ω ne coupe pas forcément le triangle en deux polygones de même aire et même périmètre. Par exemple, si le triangle ABC n'est pas isocèle, si la droite passe par A et Ω, centre du cercle inscrit, les triangles formés ne peuvent avoir simultanément même aire et même périmètre.

Trois lecteurs, **Richard Beczkowski**, **Jean-Yves Hély** et **Bernard Lefrançois**, abordent la question de l'existence d'une telle droite Δ. Dans le cas où Δ couperait les segments [AB] et [AC] en B′ et C′, l'existence de Δ revient à savoir, avec les notations de la partie précédente, s'il existe deux longueurs c' et b' vérifiant les conditions (1) et (2), à savoir

$$b'c' = \frac{bc}{2} \quad \text{et} \quad b'+c' = \frac{a+b+c}{2}.$$

Ceci revient à demander au polynôme $\mathrm{X}^2 - \dfrac{a+b+c}{2}\mathrm{X} + \dfrac{bc}{2}$ d'admettre deux racines réelles b', c' (éventuellement confondues) telles que

$$0 < b' < b \quad \text{et} \quad 0 < c' < c.$$

On obtient deux autres conditions par permutation des lettres a, b, c. Si le triangle (ABC) est isocèle, l'existence de la droite Δ est évidente. On peut donc supposer par exemple que $0 < a < b < c$. Alors

$$\left(a+b+c\right)^2-8ac \geq \left(2a+c\right)^2-8ac=\left(2a-c\right)^2 \geq 0,$$

ce qui signifie que le polynôme $X^2-\dfrac{a+b+c}{2}X+\dfrac{ac}{2}$ a un discriminant positif ou nul. En notant p le demi-périmètre, les racines du polynôme sont

$$a'=\frac{1}{2}\left(p-\sqrt{p^2-2ac}\right) \quad \text{et} \quad c'=\frac{1}{2}\left(p+\sqrt{p^2-2ac}\right).$$

La stricte positivité des racines est évidente (somme et produit sont positifs). L'inégalité $c' < c$ équivaut à

$$\sqrt{p^2-2ac} < 2c-p.$$

L'hypothèse $0 < a < b < c$ impose $2c > p$ et l'on peut donc élever au carré : $c' < c$ si et seulement si

$$p^2 - 2ac < 4c^2 + p^2 - 4pc,$$

soit $2p < 2c + a$, ce qui est vrai car $b < c$. L'inégalité $a' < a$ équivaut à

$$p-2a < \sqrt{p^2-2ac},$$

puis

$$p^2 - 4ap + 4a^2 < p^2 - 2ac,$$

soit $c + 2a < 2p$, ce qui est vrai car $a < b$. Ainsi, une telle droite Δ existe toujours. **Jean-Yves Hély** termine sa contribution en comptant le nombre de droites Δ possibles (une, deux ou trois) et donne des exemples pour chaque configuration.

Problème 493-2

Soit $\left(a_n\right)_{n\geq 1}$ une suite de réels telle que pour tous $i, j \in \mathbb{N}^*$, $a_{i+j} \leq a_i + a_j$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k} \geq a_n.$$

Solutions de Maurive Bauval (Versailles), Moubinool Omarjee (Paris), Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques).

Maurice Bauval et **Moubinool Omarjee** procèdent par récurrence forte. Voici une méthode possible. Pour $n = 1$, l'inégalité est évidente. On suppose les inégalités établies jusqu'à un certain rang $n \in \mathbb{N}$: pour $k \in [\![1,n]\!]$,

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{i} \geq a_k.$$

On somme ces relations pour $k \in [\![1,n]\!]$:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{i}\right) \geq \sum_{k=1}^{n}a_k.$$

On permute les sommes du membre de gauche en l'écrivant sous la forme

$$\sum_{1\le i\le k\le n}\frac{a_i}{i}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n}\frac{a_i}{i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{n+1-i}{i}a_i.$$

Ainsi,

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{n+1-i}{i}a_i\ge\sum_{k=1}^{n}a_k.$$

On ajoute alors $\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}a_{n+1-k}$ des deux côtés :

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{n+1}{i}a_i\ge 2\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\left(a_k+a_{n+1-k}\right).$$

Par hypothèse, $a_k + a_{n+1-k} \ge a_{n+1}$. Ainsi,

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{i}\ge\frac{n}{n+1}a_{n+1}.$$

On ajoute $\frac{a_{n+1}}{n+1}$ des deux côtés pour terminer la récurrence forte.

Pierre Renfer utilise très joliment la structure des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$. On suppose $n \ge 2$ et l'on note E l'ensemble des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$ et F l'hyperplan de E formé des formes linéaires nulles en $(1, 2, 3, \ldots, n)$. On introduit les formes linéaires suivantes :

$$\mathrm{L}\left(x_1,\ldots,x_n\right)=x_n-\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{k}$$

et pour $m\in[\![1,n-1]\!]$, si $n = qm + r$ est la division euclidienne de n par m, on pose

$$\mathrm{L}_m\left(x_1,\ldots,x_n\right)=x_n-qx_m-x_r.$$

Toutes ces formes linéaires appartiennent à F. La stratégie est alors la suivante :

(1) montrer que $(\mathrm{L}_1, \ldots, \mathrm{L}_{n-1})$ est une base de F,

(2) montrer que L est combinaison linéaire à coefficients positifs des formes linéaires $\mathrm{L}_1, \ldots, \mathrm{L}_{n-1}$.

Admettons pour le moment ces deux points. Si la suite $\left(a_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est sous-additive, on montre facilement que, pour tout $n \ge 2$ et tout $m\in[\![1,n-1]\!]$, avec $n = qm + r$,

$$a_n = a_{qm+r} \le qa_m + a_r,$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{L}_m\left(a_1,\ldots,a_n\right)\le 0$$

et d'après le second point,

$$\mathrm{L}\left(a_1,\ldots,a_n\right)\le 0,$$

ce qui est l'inégalité souhaitée.

Prouvons le premier point. Pour des raisons de dimension, il suffit de prouver que la famille $(\mathrm{L}_1, \ldots, \mathrm{L}_{n-1})$ est libre. Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ sont des réels tels que

$$\lambda_1\mathrm{L}_1 + \ldots + \lambda_{n-1}\mathrm{L}_{n-1} = 0,$$

puisque la variable x_{n-1} apparaît dans L_{n-1} (et seulement là), le coefficient λ_{n-1} doit être nul (on le voit en testant en (0, …, 0, 1, 0)). De même, λ_{n-2} est nul, et ainsi de suite. D'où le premier point. Le vecteur L de F s'écrit donc de manière unique

$$L = \lambda_1 L_1 + \ldots + \lambda_{n-1} L_{n-1}. \qquad (3)$$

Prouvons le second point, c'est-à-dire la positivité des λ_i. La valeur de λ_{n-1} s'obtient en testant en $(0, \ldots, 0, 1, 0)$: $\lambda_{n-1} = \dfrac{1}{n-1}$. On procède alors par récurrence descendante sur $m \in [\![1, n-1]\!]$. On suppose que pour un certain $m \in [\![1, n-1]\!]$, on a établi pour tout $m' \in [\![m+1, n-1]\!]$ l'encadrement

$$0 \leq \lambda_{m'} \leq \frac{1}{q'm'},$$

avec, comme d'habitude,

$$n = q'm' + r' \text{ et } 0 \leq r' < m'.$$

La variable x_m intervient dans L_m ainsi que dans les formes linéaires L_v pour les indices v tels que m soit le reste de la division euclidienne de n par v. Pour un tel v, on écrit

$$qm + r = n = uv + m \text{ avec } 0 \leq r < m < v.$$

Donc $n - m = uv = (q-1)m + r < qm$ et $u < q\dfrac{m}{v} < q$, puis $u \leq q - 1$. Le nombre des diviseurs v de $n - m$ strictement supérieurs à m est donc majoré par $q - 1$. Pour chacun de ces entiers v, par hypothèse de récurrence,

$$0 \leq \lambda_v \leq \frac{1}{uv}.$$

On applique maintenant (3) au m-ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$:

$$q\lambda_m + \sum_{\substack{v \mid n-m \\ v > m}} \lambda_v = \frac{1}{m},$$

donc

$$q\lambda_m = \frac{1}{m} - \sum_{\substack{v \mid n-m \\ v > m}} \lambda_v \leq \frac{1}{m}.$$

Ainsi,

$$\lambda_m \leq \frac{1}{qm}.$$

Par ailleurs, pour chaque v,

$$\lambda_v \leq \frac{1}{uv} = \frac{1}{n-m} = \frac{1}{(q-1)m + r} \leq \frac{1}{(q-1)m},$$

donc, comme les indices v sont au plus en nombre $q - 1$,

$$q\lambda_m = \frac{1}{m} - \sum_{\substack{v \mid n-m \\ v > m}} \lambda_v \geq \frac{1}{m} - \frac{q-1}{(q-1)m} = 0,$$

ce qui termine la récurrence. **Pierre Renfer** conclut sa lettre en traitant l'exemple de $n = 13$ et le calcul des λ_i, effectivement strictement positifs.

Voici une dernière solution[1], remarquable, utilisant le groupe S_n des permutations de l'ensemble $[\![1,n]\!]$. Pour une permutation $\sigma \in S_n$ et un entier $k \in [\![1,n]\!]$, on note $N(\sigma, k)$ le nombre de k-cycles intervenant dans la décomposition de σ en cycles à supports disjoints. Puisque $[\![1,n]\!]$ est réunion disjointe des orbites de σ, on a la relation

$$\sum_{k=1}^{n} k\mathrm{N}(\sigma,k) = n \quad (\sigma \in S_n)$$

Par ailleurs, pour $k \in [\![1,n]\!]$, la quantité $\sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{N}(\sigma,k)$ représente le nombre total de k-cycles (intervenant dans une permutation quelconque). Or pour construire un k-cycle intervenant dans une permutation quelconque, on choisit k éléments de $[\![1,n]\!]$ de $\binom{n}{k}$ façons, puis le k-cycle de $(k - 1)!$ façons et enfin, on fait une permutation avec les éléments restants, de $(n - k)!$ façons, ce qui fait un total de $\frac{n!}{k!(n-k)!}(k-1)!(n-k)! = \frac{n!}{k}$. Ainsi,

$$\sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{N}(\sigma,k) = \frac{n!}{k} \qquad \text{pour } k \in [\![1,n]\!].$$

On en vient au problème : pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k} = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{k=1}^{n} a_k \mathrm{N}(\sigma,k).$$

Mais la condition $a_i + a_j \geq a_{i+j}$ donne pour toute famille d'entiers $i_1, \ldots, i_p \in \mathbb{N}^*$ l'inégalité

$$\sum_{j=1}^{p} a_{ij} \geq a_{\sum_{j=1}^{p} i_j}.$$

Ainsi, pour $\sigma \in S_n$ fixé,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \mathrm{N}(\sigma_k) \geq a_{\sum_{k=1}^{n} k\mathrm{N}(\sigma,k)} = a_n,$$

et finalement,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k} \geq \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} a_n = a_n.$$

(1) Cette solution est attribuée à Andreas Kaseorg dans « 104 Number Theory Problems » de Andreescu, Andrica et Feng (Birkhaüser).