Exercices de ci, de là

Cette rubrique est faite à partir des propositions de collègues. Elle accueille bien volontiers des exercices même « modestes » mais un peu curieux imaginés ou rencontrés par les collègues soit dans des livres, soit dans des situations exploitées dans leurs classes. N'hésitez donc pas à nous envoyer les exercices piochés « de-ci de-là » qui vous ont plu ou vous ont intrigués. Nous les accepterons avec plaisir et en particulier ceux qui pourraient être mis à la portée d'élèves du secondaire.

Les propositions d'exercices ou les solutions sont à envoyer par mél à :

bruno.alaplantive@free.fr

ou par courrier à :

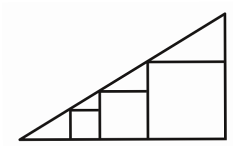
Jean Fromentin
17 rue de la Roussille
79000 NIORT

Pour l'envoi des propositions et des solutions, privilégiez, si possible, le courrier électronique. Si vous le pouvez, joignez à votre fichier initial une copie au format PDF pour contrôler en particulier les formules qui sont souvent perturbées d'un logiciel à l'autre. Vous faciliterez ainsi notre tâche. Merci d'avance.

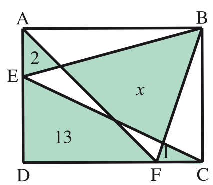
Exercices

Exercice 499-1 *piochés de-ci, de-là … à proposer à nos élèves*

A. Trois carrés sont placés côte à côte à l'intérieur d'un triangle rectangle, comme le montre la figure ci-contre. Le plus petit carré mesure 16 mm de côté et le côté du plus grand 36 mm. Combien mesure le côté du carré du milieu ?



B. Les segments [BE], [CE], [AF] et [BF] partagent le rectangle ABCD ci-contre en plusieurs régions. Quatre d'entre elles sont ombrées, deux triangles et deux quadrilatères. Leurs aires respectives sont 2, 1, 13 et x. Déterminer la valeur de x.



C. Déterminer tous les couples (x, y) de nombres entiers tels que :

$$\ln x - \ln y = \ln (x - y).$$

Exercice 499-2 (Georges Lion – Wallis)

Soit BAC un triangle tel que AB = AC et soit Γ le demi-cercle centré au milieu O de [BC], contenu dans le triangle et tangent à (AB) et (AC) respectivement en D et E.

Par un point variable M de Γ on mène la tangente à Γ qui coupe (AB) en P et (AC) en Q.

1) Exprimer l'angle $\widehat{POQ}$ en fonction des données fixes de la figure.

2) Trouver une relation caractérisant les points P et Q en termes de longueurs.

Exercice 499-3 (Bernard Collignon – Coursan)

Soit l'équation du second degré $x^2 + b\,x + c = 0$.

Les nombres b et c sont tirés au hasard dans l'intervalle [–5 ; 5] ; on appelle X la variable aléatoire égale au nombre de solutions réelles de cette équation.

Donner la loi de probabilité de X et calculer l'espérance E(X) dans les cas suivants :
1) b et c sont des nombres entiers relatifs.
2) b et c sont des nombres réels.

Exercice 499-4 (Georges Kocher – Ravières)

Prouver que pour tout entier naturel n non nul on a : $\sum_{k=1}^{n} \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n+1} = \frac{1}{2}$

Solutions

Exercice 497-1 (Daniel Reisz – Auxerre) *à proposer à nos élèves*

- Dans une feuille de papier on découpe un trou circulaire de 3cm de diamètre. Peut-on y faire passer une pièce de 4cm de diamètre ?

Solution de Michel Lafond (Dijon)

On peut faire passer une pièce de 4 cm de diamètre à travers une feuille de papier dans laquelle on a percé un trou circulaire de 3 cm de diamètre.
Supposons le trou de rayon r percé au centre d'une feuille carrée de côté $4r$ (Figure 1) :

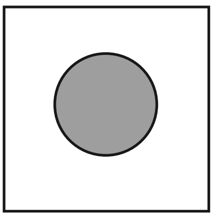


Figure 1

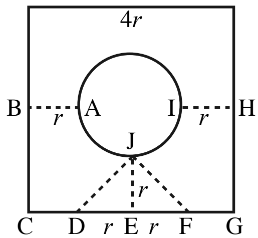


Figure 2

Marquons les 5 plis comme indiqués en pointillés sur la figure 2 avec DE = EF = r.
Rabattons la moitié haute de la figure 2 derrière la moitié basse selon le pli BH.

Ce qu'on voit est la figure 3.
À partir de maintenant, chaque manipulation se fera symétriquement sur ces deux moitiés.
Plions l'objet de la figure 3 selon les trois plis JD, JE, JF en maintenant le tout dans un plan, sauf évidemment la pyramide (DEFJ) qui est « au dessus », pour obtenir la figure 4 ci-dessous :

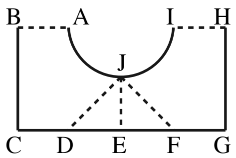


Figure 3

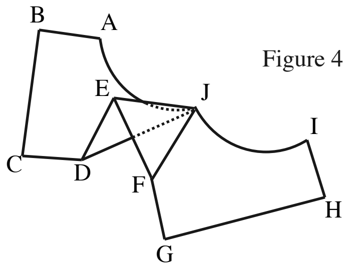


Figure 4

Poursuivons la manœuvre jusqu'à amener D sur F pour obtenir la figure plane 5 ci-dessous, dans laquelle le triangle rectangle isocèle gris (DEJ), situé ici en perspective au-dessus du plan, a une double épaisseur :

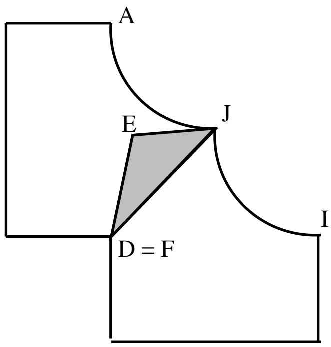


Figure 5

(AJ) et (JI) sont deux quarts de cercle de rayon r, et AIJ sont alignés avec $\mathrm{AI} = 2r\sqrt{2}$.
Si r = 3/2 cm, l'objet obtenu en figure 5 est accolé à son symétrique, mais la fente AI de longueur $3\sqrt{2} = 4,24\ldots$ cm permet largement le passage d'une pièce de 4 cm de diamètre.

Le plus drôle est que ça marche même avec un morceau de contreplaqué dans lequel on a percé un trou circulaire, et où les plis sont matérialisés par des charnières !

****

- Les équations $ax^2 + bx + c = 0$, $cx^2 + ax + b = 0$ et $bx^2 + cx + a = 0$ peuvent-elles avoir toutes les trois deux racines réelles ?

Solution de Richard Beczkowski (Chalon sur Saône)

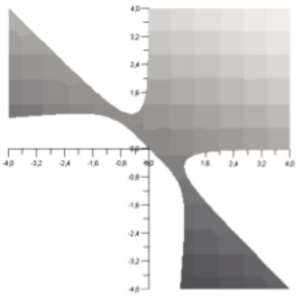
La réponse est OUI.

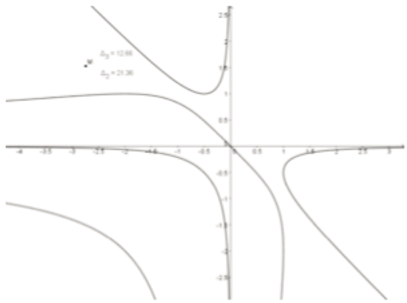
Si les trois coefficients sont de même signe on peut les choisir positifs.
Dans le cas où deux discriminants sont positifs le troisième est négatif car : $b^2 \geq 4ca$ et $c^2 \geq 4ab$ implique $bc \geq 16a^2$, ce qui rend $a^2 - 4bc \geq 0$ impossible.

Le seul autre cas est celui où un des coefficients a un signe différent de celui des deux autres.
Prenons $a > 0, b < 0$ et $c < 0$. Deux des discriminants $b^2 - 4ca$ et $c^2 - 4ab$ sont positifs ou nuls. Ce sera le cas du troisième $a^2 - 4bc$ à condition de prendre a dans l'intervalle $\left]2\sqrt{bc};+\infty\right[$.

Solution de L.G Vidiani (Fontaine les Dijon)

On peut toujours se ramener à $a = 1$. Il y a une infinité de solutions car si on pose $(x - r)(x - s) = 0 = x^2 - (r + s)x + rs$ la première équation, alors la seconde équation est $rs\,x^2 + x - r - s = 0$ et la troisième $-(r + s)x^2 + rs\,x + 1 = 0$, dont les discriminants sont respectivement conditionnés par $1 + 4rs(r + s) \geq 0$ et $r^2s^2 + 4(r + s) \geq 0$.
Dans le plan des (r, s) tout le premier quadrant convient. On peut même préciser toute la zone convenable, en traçant les courbes séparatrices sur Maple.





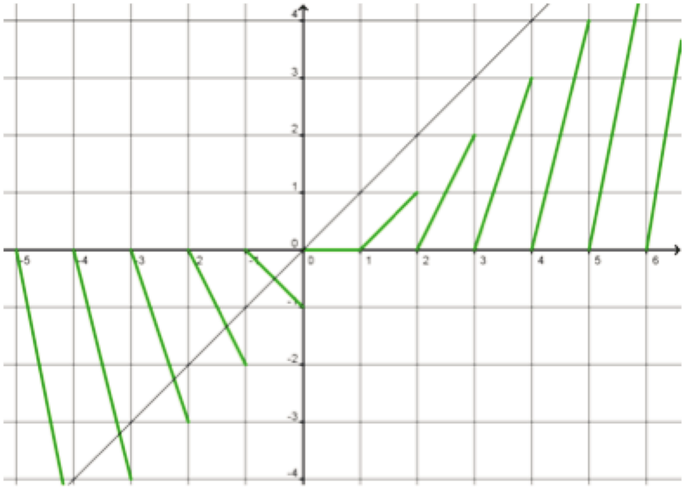
Remarque : à défaut de Maple on peut utiliser le tracé de courbes implicites sur Geogebra.

****

- Pour un nombre réel x, on note $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière (le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x) et on note $\{x\}$ sa partie décimale ($\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$). Existe-t-il des réels x tels que $\lfloor x \rfloor \times \{x\} = x$?

Solution de Henry Plane (Paris) transmise par Daniel Reisz

Dans la figure cidessouses segments verts représentent la fonction $y = \lfloor x \rfloor \{x\}$ et « on voit » qu'il n'y a pas de solutions du coté des réels positifs et qu'il y en a une et une seule dans chaque intervalle $\left[\lfloor x \rfloor;\lfloor x \rfloor + 1\right[$ du coté des réels négatifs.



On peut évidemment avoir envie de connaître la valeur de chacune de ces solutions. Posons $n = \lfloor x \rfloor$. Dans l'intervalle $[n\ ;\ n+1[$ la solution x est la racine de l'équation $x = n\,(x - n)$ soit

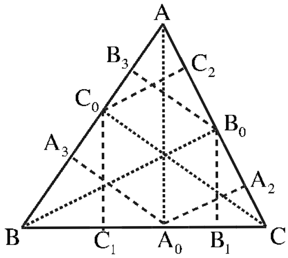
$$x = \frac{n^2}{n-1}.$$

Les premières valeurs sont : $-\dfrac{1}{2}\ ;\ -\dfrac{4}{3}\ ;\ -\dfrac{9}{4}\ ;\ \ldots$

Autres solutions : Bernard Collignon (Coursan), Daniel Reisz (Auxerre).

Exercice 497-2 Georges Lion – Wallis extrait du livre de Robin Hartshorne : Euclid and beyond

Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigus. A_0, B_0 et C_0 sont les pieds des hauteurs issues respectivement de A, B et C. A_2 et A_3 sont les projetés orthogonaux de A_0 sur (AC) et (AB) ; B_1 et B_3 ceux de B_0 sur (BC) et (BA) ; C_1 et C_2 ceux de C_0 sur (CB) et (CA). Démontrer que les six points A_2, A_3, B_1, B_3, C_2 et C_3 sont situés sur un même cercle.



On demande de préférence, une solution reposant exclusivement sur des propriétés des angles, des droites, des cercles et des quadrilatères inscriptibles, c'est-à-dire excluant tout recours aux proportions et aux triangles semblables.

Solution de Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques)

1) Triangle de lumière
On sait que le triangle $A_0B_0C_0$ est une trajectoire de lumière dans le triangle ABC[(1)].
Les symétriques A′ et A″ de A_0 par rapport à (AB) et (AC) appartiennent donc à la droite (B_0C0).
L'homothétie, de centre A_0, de rapport 2, transforme A_3 en A′ et A_2 en A″.
Donc les droites (A_2A_3) et (B_0C_0) sont parallèles.
De même les droites (B_3B_1) et (C_0A_0) sont parallèles ; les droites (C_1C_2) et (A_0B_0) sont parallèles.

2) Autres parallélismes
Les points B, C, B_0, C_0 appartiennent au cercle de diamètre [BC].
On en déduit l'égalité d'angles orientés de droites : (C_0B,C_0B_0) = (CB,CB_0) ou (AB,C_0B_0) = (CB,CA).
Les points B_3, C_0, B_0, C_2 appartiennent au cercle de diamètre [B_0C_0].
On en déduit l'égalité d'angles orientés de droites : (C_0B_3,C_0B_0) = (C_2B_3,C_2B_0) ou (AB,C_0B_0) = (C_2B_3,CA).
Des deux égalités on déduit (CB,CA) = (C_2B_3,CA) : . Les droites (C_2B_3) et (CB) sont donc parallèles.
De même les droites (A_3C_1) et (AC) sont parallèles ; les droites (B_1A_2) et (BA) sont parallèles.

3) Des points cocycliques
D'après 2) : (C_0B_3,C_0B_0) = (C_2B_3,C_2B_0).
Et comme (A_2A_3) et (B_0C_0) sont parallèles : (C_0B_3,C_0B_0) = (A_3B_3,A_3A_2).
Des deux égalités on déduit : (C_2B_3,C_2B_0) = (A_3B_3,A_3A_2) ou (C_2B_3,C_2A_2) = (A_3B_3,A_3A_2).
Donc les points A_2, A_3, B_3, C_2 sont cocycliques .
De même les points B_3, B_1, C_1, A_3 sont cocycliques ; les points C_1, C_2, A_2, B_1 sont cocycliques.

4) D'autres points cocycliques
Les points A, B, A_0, B_0 appartiennent au cercle de diamètre [AB].
On en déduit l'égalité d'angles orientés de droites : (AB_0,AB) = (A_0B_0,A_0B), (AB_0,AB) = (C_1C_2,A_0B) puisque les droites (C_1C_2) et (A_0B_0) sont parallèles.
Donc : (AB_0,AB) = (C_1C_2,A_0B) ou (AC,AB) = (C_2C_1,CB).
(C_2C_1,CB) = (C_2C_1,C_2B_3) puisque les droites (BC) et (C_2B3) sont parallèles.
Donc : (AC,AB) = (C_2C_1,C_2B_3).
(AC,AB) = (C_2C_1,A_3B_3) puisque les droites (AC) et (A_3C_1) sont parallèles.
Donc : ($A_3C_{1,2}$,A_3B) = (C_2C_1,C_2B_3)
Cette dernière égalité montre que les points A_3, C_1, C_2, B_3 sont cocycliques.
De même les points sont cocycliques B_1, A_2, A_3, C_{13} ; les points C_2, B_3, B_1, A_2 sont cocycliques.

(1) En imaginant que les côtés sont des miroirs, une source lumineuse émise depuis A_0 en direction de C_0, « rebondira » vers B_0 avant de finalement revenir en A_0, bouclant ainsi le trajet (qui est également un trajet de plus court chemin).

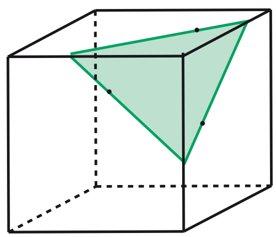
5) Conclusion
Le cercle $A_2A_3B_3C_2$ est égal au cercle $A_3C_1C_2B_3$ (ils ont trois points communs).
Le cercle $B_3B_1C_1A_3$ est égal au cercle $A_3C_1C_2B_3$ (ils ont trois points communs).
Le cercle $A_3C_1C_2B_3$ contient donc les six points

Autre solution : Raymond Heitz (Piriac), Richard Beczkowski (Chalon sur Saône), Bernard Collignon (Coursan).

Remarque. Pierre Renfer propose également une solution utilisant les coordonnées barycentriques et conclut que ce problème sur le cercle de Taylor est très riche !
La figure de l'exercice a évoqué à Bernard Collignon celle figurant sur la couverture du livre « La géométrie du triangle » d'Yvonne et René Sortais (édition Hermann, novembre 2002). Le cercle de Taylor y est traité pages 28 à 39.

Exercice 497-3 *pioché de-ci, de-là…*

En perspective cavalière on sait dessiner sur un cube la trace de sa section par un plan passant par 3 points donnés, comme sur l'exemple ci-contre dans lequel les points ont été choisis sur les faces de dessus, de devant et de droite.
Indiquer une procédure permettant d'obtenir cette trace dans la réalité, c'est à dire sur un vrai cube ; ou sur la perspective mais à l'aide de tracés limités exclusivement aux faces.



Solution de Jean Lefort (Wintzenheim)

Une fois marqués les trois points sur les trois faces, plonger le cube délicatement dans un bain de teinture colorée de façon à ce que les trois points affleurent la surface de la teinture. Puis retirer le cube tout aussi délicatement pour ne pas faire de vague. La trace de la section apparaît alors parfaitement !
Je pense ainsi répondre au problème qui demande de tracer cette section dans la réalité !

Nota. Jean Lefort indique que ce problème avait été donné, dans une forme voisine, lors des toutes premières sessions du Rallye Mathématique d'Alsace et que c'est un des concurrents qui avait soumis la solution proposée ci-dessus. Le jury avait apprécié précise-t-il.
Par cette réponse non conformiste, Jean Lefort veut « souligner que nos élèves ne sont pas des “ homo mathematicus ” et que c'est peut-être parce que l'enseignement ne prend pas assez en compte ce genre de situation que les mathématiques apparaissent à certains de nos élèves d'une sécheresse qui finit par les dégoûter ».

Solution de Bruno Alaplantive (Beyrouth)

On se place dans un repère orthonormal d'origine le sommet commun O et d'axes portés par les arêtes partant de O. On mesure les coordonnées des points par lesquels le plan doit passer. Il est alors facile de calculer les distances de O aux points d'intersections du plan avec les axes.

Dans le cas proposé par la figure le calcul d'une seule distance suffit.

Autres solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Richard Beczkowski (Chalon sur Saône).

Nota. La solution de Richard Beczkowski ainsi qu'un fichier Geogebra sont disponibles sur le site.

Exercice 497-4 ***pioché de-ci, de-là…***

Calculer $\mathrm{I} = \int_0^1 \left[\frac{1}{x} - \mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right)\right] dx$ (où E désigne la partie entière).

Solution de Raymond Heitz (Piriac)

Découpons l'intervalle [0;1] en intervalles partiels, du type $\left[\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n}\right]$ (n entier strictement positif) ; posons $\mathrm{I}_n = \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \left[\frac{1}{x} - \mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right)\right] dx$.

Si $\frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n}$, alors $\mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right) = n$, donc sur cet intervalle $\frac{1}{x} - \mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - n$, (on ne tient pas compte des bornes, où $\frac{1}{x} - \mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$) ; et

$$\mathrm{I}_n = \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \left[\frac{1}{x} - n\right] dx = \left[\ln x - nx\right]_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} = \ln(n+1) - \ln n - \frac{1}{n+1}.$$

Il est clair que

$$\mathrm{I} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{I}_n = \lim_{m \to \infty} \left[\ln m - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{m}\right)\right] = 1 - \gamma,$$

où γ désigne la constante d'Euler.
Donc I = 1 − γ soit environ 0,422784335…

Autres solutions : L.G Vidiani (Fontaine les Dijon), Jean Gounon (Chardonnay), Jean-Yves LeCadre (Saint Avé), Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Richard Beczkowski (Chalon sur Saône), Bernard Collignon (Coursan), Jean-Claude Carréga (Lyon).

Remarque. Dans sa réponse, L.G Vidiani indique le résultat suivant :

Si pour tout couple (n, p) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ on note n_p le reste de la division euclidienne de n par p, alors la moyenne arithmétique des n_p/p est I.