# Voulez-vous des triplets ?

## Gérard Lopez

### Quelques mots de présentation

Objets mathématiques apparus depuis, au moins, quatre millénaires, les triplets de PYTHAGORE sont des triplets d'entiers tels que $x^2 + y^2 = z^2$.

La tablette 322 de la collection PLIMPTON de l'Université de Columbia, datant du XVIIIe siècle av. J.-C., présente un tableau de nombres en caractères cunéiformes et en numération sexagésimale, qui fut décodé en 1945 par Otto NEUGEBAUER. D'après lui, elle atteste de l'intérêt des mathématiciens babyloniens pour ces triplets et de leur compétence, plus d'un millénaire avant PYTHAGORE [1].

Le plus fameux d'entre eux est (3 ; 4 ; 5), triplet fondamental bien connu depuis la nuit des temps par les Babyloniens, les Égyptiens (triangle égyptien ou triangle d'ISIS), les Chinois (citons le livre de référence « *Neuf chapitres sur l'art mathématique* ») et, bien sûr, les Grecs. Rappelons que les maçons, avec une corde à 13 nœuds et 12 intervalles, vérifient depuis des millénaires que deux murs sont bien d'équerre, appliquant ainsi de façon concrète la réciproque du théorème de PYTHAGORE.

Ces triplets n'ont pas cessé de faire l'objet de recherches et de découvertes. Ils apparaissent là où on les attend (problèmes diophantiens dans un contexte géométrique), mais également dans des domaines qui, à première vue, sont assez éloignés des « triangles rectangles numériques » ainsi que certains historiens des Mathématiques, comme Roshi RASHED, les désignent [2]. Ils sont cités dans tous les ouvrages d'arithmétique de niveau universitaire [3], mais on les trouve parfois dans des publications qui s'adressent à des lecteurs moins spécialisés.

C'est ainsi que, dans le premier numéro d'une collection de livres, « *Le monde est mathématique* » [4] , éditée par une société espagnole(1), les triplets apparaissent au détour de la suite de FIBONACCI ! Nous allons y revenir mais nous reconnaissons que cette curiosité est à l'origine de ce texte.

### 1. Un peu d'ordre

Avant toute étude des triplets, il nous faut distinguer :

– **Les triplets de PYTHAGORE primitifs**, notés $(x\,;\,y\,;\,z)$, dont les trois termes sont premiers entre eux, tels (3 ; 4 ; 5), (5 ; 12 ; 13) ou (15 ; 8 ; 17), que nous désignerons par l'abréviation TPP.

(*) gerard.lopez054@orange.fr

(1) Disons rapidement que, si l'objectif de cette parution est évidemment commercial et si certaines erreurs et maladresses apparaissent ici et là (Jean-Michel KANTOR, dans une intervention au cours des Journées de Grenoble, nous a appris qu'elles sont dues à une traduction française défectueuse), il n'en demeure pas moins que l'éditeur ne manque pas d'audace pour oser attirer l'attention du public français sur des sujets mathématiques, si peu prisés par nos médias.

Si ($x$ ; $y$ ; $z$) est un TPP, alors ($y$ ; $x$ ; $z$) est aussi un TPP, mais on choisit arbitrairement de présenter le TPP avec $x$ impair et $y$ pair, $z$ étant naturellement toujours impair.
Précisons que le terme $y$ est en fait multiple de 4. En effet, si ($x$ ; $y$ ; $z$) est un TPP tel que $x = 2p + 1$ et $z = 2q + 1$, $p < q$, alors :

$$y^2 = z^2 - x^2 = (2q + 1)^2 - (2p + 1)^2 = 4\,[(q^2 + q) - (p^2 + p)]$$

Quelle que soit la parité de $p$ et de $q$, les sommes $p^2 + p$ et $q^2 + q$ sont paires et, par suite, la différence entre crochets est paire.
Donc $y^2 \equiv 0\ (8)$ ce qui entraîne nécessairement $y \equiv 0\ (4)$.

– **Les triplets de Pythagore composés** sont de la forme ($kx$ ; $ky$ ; $kz$) si $k$ est un entier naturel différent de 0 et de 1. C'est le cas de (6 ; 8 ; 10), (9 ; 12 ; 15), (21 ; 72 ; 75). Nous les désignerons par l'abréviation TPC.

– **Tout triplet de Pythagore sera noté TP, qu'il soit primitif ou composé.**

Pour fêter la nouvelle Année, nous avons trouvé 4 TP :
deux TPP : (253 005 ; 2 012 ; 253 013) et (1 012 035 ; 2 012 ; 1 012 037), deux TPC : (2 012 ; 506 016 ; 506 020) = 4 × (503 ; 126 504 ; 126 505) et (1 509 ; 2 012 ; 2 515) = 503 × (3 ; 4 ; 5).
On compte 16 TPP tels que $z < 100$, 80 TPP pour $z < 500$ et 158 TPP pour $z < 1000$. Le problème du nombre de TPP tels que $z <$ N est lié à la quantité de nombres sommes de deux carrés et inférieurs à N et, dans cette perspective, on s'orientera vers l'article de Marc Roux [5].

## 2. Quelques méthodes classiques d'obtention des TPP

Tous les TPC se déduisent des TPP et donc l'intérêt des mathématiciens se porte naturellement sur les méthodes, recettes ou algorithmes, permettant d'obtenir des TPP. On peut en citer quelques-unes sans jamais prétendre en faire une liste exhaustive.

### a/ Méthode attribuée à Pythagore (VI$^{e}$ siècle av. J.-C.)

Le légendaire mathématicien de Samos (~ 569 - ~ 500 av. J.C.) est-il vraiment l'auteur de cette méthode ? Il est plus probable qu'elle ait été trouvée en Mésopotamie ou en Égypte, ou découverte par l'un de ses nombreux disciples. Peu importe, elle a fait ses preuves !
Si $a$ est un entier impair supérieur à 1, alors le triplet ($x$ ; $y$ ; $z$) tel que :

$$x = a,\ y = \frac{1}{2}\left(a^2 - 1\right),\ z = \frac{1}{2}\left(a^2 + 1\right)$$

est un TPP.
Les cinq premières valeurs de $a$ donnent
(3 ; 4 ; 5), (5 ; 12 ; 13), (7 ; 24 ; 25), (9 ; 40 ; 41), (11 ; 60 ; 61), et, si $a = 2\,011$, nous trouvons (2 011 ; 2 022 060 ; 2 022 061).
Ces TPP se caractérisent par l'égalité : $z - y = 1$.
Avec cet algorithme, on peut écrire une suite infinie de triplets « consécutifs », comme, par exemple : (3 ; 4 ; 5), (5 ; 12 ; 13), (13 ; 84 ; 85), (85 ; 3 612 ; 3 613), (3 613 ; 6 526 884 ; 6 526 885), …

**b/ Méthode attribuée à PLATON[(2)] (IV$^{e}$ siècle av. J.C.)**

Si $k$ est un entier naturel non nul, alors le triplet $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ tel que

$$x = 4k^2 - 1,\ y = 4k\ ,\ z = 4k^2 + 1,$$

est un TPP.
Les cinq premières valeurs de $k$ donnent (3 ; 4 ; 5), (15 ; 8 ; 17), (35 ; 12 ; 37), (63 ; 16 ; 65), (99 ; 20 ; 101). Ces TPP se caractérisent par l'égalité : $z - x = 2$.

**c/ Méthode par les réduites de $\sqrt{2}$ [(3)] (VII$^{e}$ siècle ap. J.-C.)**

Les premières réduites de $\sqrt{2}$ sont : $R_0 = 1/1$, $R_1 = 3/2$, $R_2 = 7/5$, $R_3 = 17/12$, $R_4 = 41/29$, …
On constate que :

$$1^2 - 2 \times 1^2 = -1,\ 3^2 - 2 \times 2^2 = 1,\ 7^2 - 2 \times 5^2 = -1,$$
$$17^2 - 2 \times 12^2 = 1,\ 41^2 - 2 \times 29^2 = -1.$$

D'autre part, si on considère $R_2 = N_2 / D_2 = 7/5$, on constate que $N_2 = 7 = 3 + 4$ et $D_2 = 5$, ce qui nous amène au TPP (3 ; 4 ; 5) !
De même, pour $R_4 = N_4 / D_4 = 41/29$, on constate que $N_4 = 41 = 21 + 20$ et $D_4 = 29$, et on vérifie que (21 ; 20 ; 29) est bien un TPP.

Tout cela est bien mystérieux ! Mais tout s'explique. Cependant, dans le cadre de cet article, il est pratiquement impossible d'entrer dans les détails pour justifier cet algorithme qui permet d'obtenir les triplets $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ tels que $y = x - 1$ ou $y = x + 1$, autrement dit tels que $|y - x| = 1$.
« En gros », on introduit deux suites, $(N_n)$ et $(D_n)$, attribuées à THÉON de Smyrne (philosophe platonicien mais aussi mathématicien et astronome du II$^{e}$ siècle ap. J.-C.) et définies par récurrence [6] :

$$(N_n) : N_n = N_{n-1} + 2\,D_n - 1,$$
$$(D_n) : D_n = N_{n-1} + D_{n-1},$$
$$(N_0\ ;\ D_0) = (1;\ 1).$$

Elles permettent de démontrer que :
1/ $R_n = N_n/D_n$ est une réduite de $\sqrt{2}$, car $N_n/D_n$ tend vers $\sqrt{2}$ quand $n$ tend vers l'infini,
2/ $N_n/D_n$ sont les solutions de l'équation $N_n^2 - 2D_n^2 = (-1)^{n+1}$.

(2) On sait que PLATON (~ 427 - 348 av. J.C.), philosophe grec, contemporain d'EUCLIDE, fondateur de l'Académie, était proche de SOCRATE. Mais il était aussi un vrai pythagoricien car il accordait aux Mathématiques une place éminente et on trouve, dans ses textes, des notes sur les triplets pythagoriciens
(3) Rien n'est certain mais son origine remonte probablement aux travaux de BRAHMAGUPTA (598-668), le plus grand mathématicien et astronome indien du VII$^{e}$ siècle. Il a défini le zéro de façon radicale : $a - a = 0$ et fut le premier à utiliser le signe « 0 ». Il étudia particulièrement une équation du type $a^2 - pb^2 = \pm\ 1$ que l'on désigne sous le nom d'« équation de PELL–FERMAT ». Or, si $p = 2$, les solutions de cette équation s'obtiennent aisément à l'aide des réduites de $\sqrt{2}$, c'est-à-dire des fractions qui permettent d'approcher $\sqrt{2}$ autant qu'on le désire.

D'autre part, on montre que, si ($x$ ; $y$ ; $z$) est un TPP tel que $|y - x| = 1$ alors nous obtenons, dans tous les cas, l'égalité $(x + y)^2 - 2z^2 = -1$. Donc $(x + y)/z$ est alors une réduite de $\sqrt{2}$.

Mais toutes les réduites ne conviennent pas.
Par exemple: $R_3 = N_3/D_3 = 17/12$, on constate que $N_3 = 17 = 9 + 8$ et $D_3 = 12$ mais $9^2 + 8^2 \neq 12^2$.
On aboutit aux conclusions suivantes :

1. $N_n^2 + D_n^2 = -1$ si, et seulement si, $n$ est pair
2. À toute réduite de rang pair, notée $R_{2k} = N_{2k}/D_{2k}$, correspond un TPP ($x$ ; $y$ ; $z$) tel que :
   – Si $k$ est impair alors $x = (N_{2k} - 1)/2$, $y = (N_{2k} + 1)/2$, $z = D_{2k}$.
   Nous obtenons ainsi un TPP ($x$ ; $y$ ; $z$) tel que $y = x + 1$ comme (3 ; 4 ; 5), (119 ; 120 ; 169), (4 059 ; 4 060 ; 5 741), …
   – Si $k$ est pair alors $x = (N_{2k} + 1)/2$, $y = (N_{2k} - 1)/2$, $z = D_{2k}$.
   Nous obtenons ainsi un TPP ($x$ ; $y$ ; $z$) tel que $y = x - 1$ comme (21 ; 20 ; 29), (697 ; 696 ; 985), (23 661 ; 23 660 ; 33 461), …
3. Il existe une bijection entre l'ensemble des réduites de $\sqrt{2}$ de rang pair et l'ensemble des TPP ($x$ ; $y$ ; $z$) vérifiant $|y - x| = 1$.

Ces TPP sont beaucoup plus rares que les précédents. Même en acceptant le très contestable (1 ; 0 ; 1), on en trouve seulement 8 de cette forme parmi les quelques 159 200 TPP ($x$ ; $y$ ; $z$) tels que $z < 10^6$.

**d/ Vive Euclide et son théorème (IV$^e$ siècle av. J.-C.)**

Euclide, né vers 365 av. J.-C, est le plus illustre des membres de l'École d'Alexandrie. Son œuvre, *Les Éléments*, est un des « best-sellers » de l'humanité (plus de 1000 éditions différentes).

N'en déplaise à Jean Dieudonné qui a lancé en 1969, à la belle époque de Bourbaki, son fameux slogan « *À bas Euclide !* » (dirigé, en fait, contre un certain type d'enseignement de la Géométrie), dans le cas des triplets de Pythagore, impossible de ne pas le célébrer.

Toutes les formules précédentes donnent des triplets particuliers mais il existe une méthode générale qui permet d'obtenir tous les TPP et, par suite, tous les TPC.

Cette méthode repose sur un théorème dont la démonstration peut être attribuée à Euclide.

**Théorème d'Euclide – Al Khâzin**

Soit un couple d'entiers ($u$ ; $v$), non nuls, $u > v$, premiers entre eux et de parité différente. Si on pose $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$, $z = u^2 + v^2$, alors ($x$ ; $y$ ; $z$) est un TPP.

Nous appellerons couples d'Euclide les couples ($u$ ; $v$) ainsi définis. Par exemple, si ($u$ ; $v$) = (4 ; 3 ) alors nous obtenons (7 ; 24 ; 25).

Au X$^e$ siècle, Al Khâzin (900 – 971), démontre la réciproque du théorème (voir [5]).

Si $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ est un TPP avec $x$ impair, alors il existe un couple d'entiers naturels $(u\ ;\ v)$ non nuls tels que $u > v$, $u$ et $v$ premiers entre eux et de parité différente et qui vérifient : $u^2 - v^2 = x$, $2uv = y$, $u^2 + v^2 = z$.

On trouve la démonstration de ce théorème dans tous les ouvrages sérieux d'arithmétique - quelques uns sont cités dans [3] - ou sur les bons sites du Net [7].

C'est le théorème fondamental, absolument incontournable dans l'étude des triplets. Pratiquement, avec une grande souplesse de calcul, il permet de trouver rapidement des solutions à de nombreux problèmes. Entre autres, on peut se passer des méthodes de PYTHAGORE et de PLATON.

En effet, si l'on veut des TPP tels que $z - y = 1$ (méthode de PYTHAGORE) il suffit de poser l'équation : $(u^2 + v^2) - 2uv = 1$ qui s'écrit $(u - v)^2 = 1$ d'où $u = v + 1$. On en déduit que, si un couple d'EUCLIDE $(u\ ;\ v)$ est tel que $u = v + 1$, alors il engendre un TPP $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ tel que $z - y = 1$. Ainsi $(2\ ;\ 1)$ engendre $(3\ ;\ 4\ ;\ 5)$, $(3\ ;\ 2)$ donne $(5\ ;\ 12\ ;\ 13)$, etc.

On voit également que l'on peut généraliser à la recherche des TPP $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ qui vérifient $z - y = (2k + 1)^2$ car cela revient à trouver le couple $(u\ ;\ v)$ solution de $(u - v)^2 = (2\mathrm{k} + 1)^2$, c'est-à-dire $u = v + 2k + 1$. Par exemple, si $k = 2$, alors $2k + 1 = 5$ et donc, tout couple d'EUCLIDE $(u\ ;\ v)$ tel que $u = v + 5$, engendre un TPP $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ tel que $z - y = 5^2 = 25$. Ainsi $(6\ ;\ 1)$ engendre $(35\ ;\ 12\ ;\ 37)$, $(7\ ;\ 2)$ donne $(45\ ;\ 28\ ;\ 53)$, etc.

De même pour la méthode de PLATON qui conduit à des TPP $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ tels que $z - x = 2$. Avec le théorème d'EUCLIDE, on détermine le couple $(u\ ;\ v)$ tel que : $(u^2 + v^2) - (u^2 - v^2) = 2$ ou encore $2v^2 = 2$ d'où $v = 1$. On en déduit que, si un couple d'EUCLIDE $(u\ ;\ v)$ est tel que $v = 1$, alors il engendre un TPP $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ tel que $z - x = 2$. Par exemple, les couples $(2\ ;\ 1)$, $(4\ ;\ 1)$, $(6\ ;\ 1)$ engendrent respectivement $(3\ ;\ 4\ ;\ 5)$, $(15\ ;\ 8\ ;\ 17)$, $(35\ ;\ 12\ ;\ 37)$.

On peut, là aussi, généraliser à la recherche des TPP $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ qui vérifient $z - x = 2\ (2k + 1)^2$ et le calcul aboutit à $v = 2k + 1$. Donc un couple d'EUCLIDE $(u\ ;\ v)$ tel que $v$ est impair, produit un TPP $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ tel que $z - x = 2v^2$. Par exemple, si $k = 3$, alors $2k + 1 = 7$, et, donc, tout couple d'EUCLIDE $(u\ ;\ 7)$ engendrera un TPP $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ tel que $z - x = 2 \times 7^2 = 98$. Ainsi $(10\ ;\ 7)$ donne $(51\ ;\ 140\ ;\ 149)$.

## 3. Quadruplets de FIBONACCI contre triplets de PYTHAGORE

**a/ Leonardo Pisano FIBONACCI (~1170 - ~1250)** est le plus grand des mathématiciens du Moyen Âge chrétien. Son œuvre est considérable. Il a fait le lien entre les mathématiques arabes et celles de la Renaissance. Fils d'un commerçant toscan, il a voyagé en Égypte, Sicile, Grèce et Syrie. Revenu en Italie vers 1200 et convaincu de la supériorité du système de notation des nombres par les chiffres arabes, il écrit son *Liber abaci* dans lequel il expose la notation de position, il développe les méthodes de calcul des opérations élémentaires et des racines carrées ou cubiques. Il résout également des équations et propose des problèmes, parmi lesquels on trouve la célèbre suite qui porte son nom.

**b/ La suite de FIBONACCI.**

Rappelons brièvement que la suite de FIBONACCI est une suite de termes positifs, définie par la relation de récurrence linéaire : $F_n + F_{n+1} = F_{n+2}$, initialisée par $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$.
Voici un tableau donnant les premiers termes :

| $F_0$ | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ | $F_4$ | $F_5$ | $F_6$ | $F_7$ | $F_8$ | $F_9$ | $F_{10}$ | $F_{11}$ | $F_{12}$ | $F_{13}$ | $F_{14}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | 21 | 34 | 55 | 89 | 144 | 233 | 577 |

Elle est croissante, strictement croissante pour $n \geq 2$, et on remarque que les termes dont le rang est multiple de 3 sont pairs.

**Rappels des principales propriétés de la suite de FIBONACCI**

Il existe une littérature impressionnante sur les nombres de FIBONACCI, encore plus sur le nombre d'or qui tourne parfois à l'ésotérisme. Il existe aussi des livres et des sites recommandables [ 9 ].

Rappelons, sans plus tarder, la formule découverte par Jacques BINET en 1843, qui permet de calculer directement un terme de la suite en fonction de son indice et sans recourir à la récursivité :

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

ou encore :

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\Phi^n - \Phi'^n\right]$$

dans laquelle $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ est le nombre d'or et où $\Phi' = -\dfrac{1}{\Phi}$.

Nous avons tenté de rassembler ci-dessous, sinon les « principales » propriétés des nombres de FIBONACCI, du moins les plus utilisées. On peut citer :
– la relation fondamentale : $F_n + F_{n+1} = F_{n+2}$, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$.
– $F_n$ et $F_{n+1}$ sont premiers entre eux,
– des relations faisant intervenir des sommes de termes :

$$F_0 + F_1 + F_2 + \ldots + F_n + 1 = F_{n+2},$$
$$F_0 + F_1 + F_2 + F_4 + F_6 + \ldots + F_{2n} = F_{2n+1},$$
$$F_n + F_{n+1} + F_{n+2} + \ldots + F_{n+9} = 11 \times F_{n+6},$$

– des relations faisant intervenir des différences et des produits de termes :

$$F_{n+1}\,F_{n+2} - F_n\,F_{n+3} = (-1)^n,$$
$$F_{n+1}\,F_{n-1} - F_n^{\,2} = = (-1)^n, \text{ (identité de CASSINI)},$$

– la relation de SIMSON (démontrée en annexe) :

$$F_n^{\,2} + F_{n+1}^{\,2} = F_{2n+1}.$$

### c/ Quadruplet magique !

Parmi les méthodes « exotiques » pour trouver des TPP, nous en avons rencontré une dans « *Le nombre d'or* », premier numéro de la collection de livres « *Le monde est mathématique* » [4] et sujet alléchant qui ciblait un large public. À la page 38, apparaît un paragraphe intitulé « Les triplets pythagoriciens » qui se termine à la page 41. L'auteur affirme, sans démonstration, que, si l'on se donne quatre termes consécutifs quelconques de la suite de FIBONACCI, alors on peut obtenir un triplet de PYTHAGORE.

**Considérons un quadruplet de nombres de FIBONACCI consécutifs : $(F_n ; F_{n+1} ; F_{n+2} ; F_{n+3})$. Le triplet $(x ; y ; z)$ tel que : $x = F_n F_{n+3}$ ; $y = 2 F_{n+1} F_{n+2}$ ; $z = {F_{n+1}}^2 + {F_{n+2}}^2$ est un TP.**

Calculons les TP obtenus avec les premiers quadruplets de FIBONACCI.

| Valeur de $n$ ; quadruplet | TP obtenu | Nature du TP |
|---|---|---|
| 0 ; (0 ; 1 ; 1 ; 2) | (0 ; 2 ; 2)(4) | Voir note de bas de page |
| 1 ; (1 ; 1 ; 2 ; 3) | (3 ; 4 ; 5) | TPP |
| 2 ; (1 ; 2 ; 3 ; 5) | (5 ; 12 : 13) | TPP |
| 3 ; (2 ; 3 ; 5 ; 8) | (16 ; 30 ; 34) revenant à $2 \times (15 ; 8 ; 17)$ | TPC |
| 4 ; (3 ; 5 ; 8 ; 13) | (39 ; 80 ; 89) | TPP |
| 5 ; (5 ; 8 ; 13 ; 21) | (105 ; 208 ; 233) | TPP |
| 6 ; (8 ; 13 ; 21 ; 34) | (272 ; 546 ; 610) revenant à $2 \times (273 ; 136 ; 305)$ | TPC |

Remarque : Il semble que les TP obtenus vérifient tous $y = 2x + 2$ ou $y = 2x - 2$.

***Comment démontrer cette propriété ?***

Si l'on se précipite, on peut développer brutalement les expressions :

$$\mathrm{A} = \left(F_n F_{n+3}\right)^2 + \left(2F_{n+1}F_{n+2}\right)^2$$

et

$$\mathrm{B} = \left({F_{n+1}}^2 + {F_{n+2}}^2\right)^2$$

et trouver que :

$$\mathrm{A} = \mathrm{B} = 4\left({F_{n+1}}^4 + 2{F_n}^2{F_{n+1}}^2 + 2F_n F{F_{n+1}}^3 + {F_n}^3 F_{+1}\right) + {F_n}^4 .$$

C'est une démonstration (tout à fait inélégante), mais on peut aussi remarquer que les formules donnant les deux derniers termes du triplet, c'est-à-dire $y = 2 F_{n+1} F_{n+2}$ et $z = {F_{n+1}}^2 + {F_{n+2}}^2$ doivent nous interpeller et nous ramener au théorème d'EUCLIDE cité plus haut. Bien entendu, on voit que le couple $(u ; v)$ se trouve ici remplacé par le couple $(F_{n+2} ; F_{n+1})$.

(4) Il est un peu étrange, sinon marginal, car il est associé à un triangle plat, mais il vérifie $x^2 + y^2 = z^2$ et c'est un TPC (0 ; 2 ; 2), soit $2 \times (0 ; 1 ; 1)$.

Il reste donc à montrer que le terme $x = F_n \times F_{n+3}$ peut être obtenu par la différence $F_{n+2}^2 - F_{n+1}^2$.
Rien n'est plus simple :

$$F_{n+2}^2 - F_{n+1}^2 = (F_{n+2} - F_{n+1})(F_{n+2} + F_{n+1}).$$

Or, par définition :

$$F_{n+2} - F_{n+1} = F_n$$

et

$$F_{n+2} + F_{n+1} = F_{n+3}.$$

Donc :

$$F_{n+2}^2 - F_{n+1}^2 = F_n \times F_{n+3}.$$

La merveilleuse propriété des quatre nombres de FIBONACCI consécutifs donnant un TP s'explique donc aisément. **En fait, deux nombres de FIBONACCI consécutifs suffisent pour « produire » un TP**.
**Si $F_n$ et $F_{n+1}$ sont deux nombres de FIBONACCI consécutifs alors le triplet ($x$ ; $y$ ; $z$) tel que : $x = F_{n+1}^2 - F_n^2$ ; $y = 2\ F_n\ F_{n+1}$ ; $x = F_{n+1}^2 + F_n^2$ est un triplet de PYTHAGORE.**

***Un TPC et deux TPP***

Considérons la dernière colonne à droite du tableau. À compter du premier quadruplet ($F_0$ ; $F_1$ ; $F_2$ ; $F_3$), nous trouvons, dans l'ordre, un TPC et deux TPP. Est-ce que cette alternance se poursuit ? Nous allons démontrer que le quadruplet ($F_n$ ; $F_{n+1}$ ; $F_{n+2}$ ; $F_{n+3}$) permet d'obtenir un TPC si le rang de $n$ est multiple de 3, ce qui arrive évidemment une fois sur trois nombres consécutifs, et un TPP dans les deux autres cas où $n$ n'est pas multiple de 3.
On sait que $x = F_n\ F_{n+3}$, $y = 2\ F_{n+1}\ F_{n+2}$, $z = F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2$.
Nous avons constaté (voir Remarque en bas du tableau) que $y = 2x \pm 2$. Montrons-le.
Pour cela, il est naturel de calculer $|y - 2x|$ :

$$|y-2x| = |2F_{n+1}F_{n+2} - 2F_nF_{n+3}| = 2|F_{n+1}F_{n+2} - F_nF_{n+3}|.$$

D'après la propriété des nombres de FIBONACCI : $F_{n+1}\ F_{n+2} - F_n\ F_{n+3} = (-1)^n$, on peut écrire : $|y - 2x| = 2 \times |(-1)^n| = 2 \times 1 = 2$
Or, pgcd ($x$ ; $y$ ; $z$) divise naturellement $y - 2x$, donc 2.
Par conséquent : pgcd ($x$ ; $y$ ; $z$) = 1 ou pgcd ($x$ ; $y$ ; $z$) = 2. Il y a donc deux cas possibles :
– Si le rang $n$ est multiple de 3, c'est-à-dire si $n = 3k$, alors
  – $F_n$ et $F_{n+3}$ sont pairs, donc le produit $F_n\ F_{n+3}$ est pair.
  – $F_{n+1}$ et $F_{n+2}$ sont impairs mais le produit $2 \times F_{n+1}\ F_{n+2}$ est pair.
  – $F_{n+1}$ et $F_{n+2}$ sont impairs mais la somme $F_{n+2}^2 + F_{n+1}^2$ est paire.
Donc si $n = 3k$, alors pgcd ($x$ ; $y$ ; $z$) = 2. Par conséquent ($x$ ; $y$ ; $z$) est un TPC, double d'un TPP.
– Si le rang $n$ n'est pas multiple de 3, c'est-à-dire si $n \neq 3k$, alors
  – $F_n$ et $F_{n+3}$ sont impairs alors que $F_{n+1}$ et $F_{n+2}$ sont de parités différentes.
  – Le produit $F_n\ F_{n+3}$ et la somme $F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2$ sont donc impairs.
  – Le produit $2 \times F_{n+1}\ F_{n+2}$ est toujours pair.

Donc si $n \neq 3k$, alors pgcd $(x\ ;\ y\ ;\ z) = 1$. Par conséquent $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ est un TPP.
On peut conclure ainsi :

**$(F_n\ ;\ F_{n+1}\ ;\ F_{n+2}\ ;\ F_{n+3})$ donne un TPC si $n = 3k$, et un TPP si $n \neq 3k$.**

**REMARQUE 1.** On a vu que le triplet $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ tel que : $x = F_n\ F_{n+3}$, $y = 2\ F_{n+1}\ F_{n+2}$, $z = F_{n+1}^{\ 2} + F_{n+2}^{\ 2}$ est un TP.
Le triangle rectangle lié à ce TP a donc pour aire : A = ½ $(xy)$ soit A = ½ $(F_n\ F_{n+3})$ $(2\ F_{n+1}\ F_{n+2})$ ou encore : **$A = F_n\ F_{n+1}\ F_{n+2}\ F_{n+3}$**.
Conclusion : Le produit de quatre nombres de FIBONACCI consécutifs est égal à l'aire d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit ont pour longueur $F_n\ F_{n+3}$ et $2\ F_{n+1}\ F_{n+2}$, et pour hypoténuse $F_{n+1}^{\ 2} + F_{n+2}^{\ 2}$.

**REMARQUE 2.** Grâce à la relation de SIMSON, nous pouvons remplacer $F_{n+1}^{\ 2} + F_{n+2}^{\ 2}$ par $F_{2n+3}$. Par exemple, $F_3^{\ 2} + F_4^{\ 2} = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$ et $F_7 = 13$.
Ainsi, on peut remplacer le quadruplet $(F_n\ ;\ F_{n+1}\ ;\ F_{n+2}\ ;\ F_{n+3})$ par le quintuplet

$$(F_n\ ;\ F_{n+1}\ ;\ F_{n+2}\ ;\ F_{n+3}\ ;\ F_{2n+3}).$$

Ils donnent le même TP, TPP ou TPC, qui peut donc s'écrire de deux façons :

$$(x\ ;\ y\ ;\ z) = (F_n\ F_{n+3}\ ;\ 2\ F_{n+1}\ F_{n+2}\ ;\ F_{n+1}^{\ 2} + F_{n+2}^{\ 2}) = (F_n\ F_{n+3}\ ;\ 2\ F_{n+1}\ F_{n+2}\ ;\ F_{2n+3}).$$

**REMARQUE 3.** La suite de LUCAS, cousine germaine de celle de FIBONACCI, permet, elle aussi, de générer des triplets pythagoriciens ; rappelons brièvement que la suite de LUCAS est définie de manière identique : $L_n + L_{n+1} = L_{n+2}$, mais initialisée par $L_0 = 2$ et $L_1 = 1$.
Les premiers termes sont : 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, …
Le quadruplet constitué par quatre nombres de LUCAS, consécutifs $(L_n\ ;\ L_{n+1}\ ;\ L_{n+2}\ ;\ L_{n+3})$ donne un TP $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ tel que : $x = L_n\ L_{n+3}$ ; $y = 2\ L_{n+1}\ L_{n+2}$ ; $z = L_{n+1}^{\ 2} + L_{n+2}^{\ 2}$.
Par exemple,
(2 ; 1 ; 3 ; 4) nous donne le TPC (8 ; 6 ; 10) ou (6 ; 8 10) = 2 × (3 ; 4 ; 5),
(1 ; 3 ; 4 ; 7) nous donne le TPP (7 ; 24 ; 25),
(3 ; 4 ; 7 ; 11) nous donne le TPP (33 ; 56 ; 65).
On vérifie bien que : $L_n\ L_{n+3} = L_{n+2}^{\ 2} - L_{n+1}^{\ 2}$.

## 4. Un soupçon d'histoire récente et conclusion

Nous avons retracé plusieurs méthodes historiques pour obtenir des triplets pythagoriciens. Il a fallu attendre la deuxième moitié du XX$^{\text{e}}$ siècle pour obtenir tout TP à partir de (1 ; 0 ; 1) ou, si l'on préfère, du premier non trivial (3 ; 4 ; 5).
En effet, en 1977, J. ROBERTS a démontré, dans « *Elementary Number Theory ; A Problem Oriented Approach* » (Cambridge, MA; MIT Press 1977) que tout TPP $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ est le produit de (3 ; 4 ; 5) par un produit fini de matrices prises parmi les trois matrices $M_1$, $M_2$, $M_3$ :

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix},\ M_2 = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix},\ M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Par exemple, $(3\ ;\ 4\ ;\ 5) \times M_1 = (5\ ;\ 12\ ;\ 13)$, $(3\ ;\ 4\ ;\ 5) \times M_2 = (15\ ;\ 8\ ;\ 17)$, $(3\ ;\ 4\ ;\ 5) \times M_3 = (21\ ;\ 20\ ;\ 29)$, $(3\ ;\ 4\ ;\ 5) \times M_1 \times M_2 = (45\ ;\ 28\ ;\ 53)$, …

Si vous voulez des triplets, ces objets mathématiques au charme discret, vous avez donc un grand choix, mais, entre nous, la bonne vieille méthode d'EUCLIDE suffit largement pour les besoins courants.

## 5. Bibliographie – Sites Internet

[1] http://fr.wikipedia.org/wiki/Plimpton_322
http://www.bibmath.net/dico/index.php?action=affiche&quoi=./b/babylonien.html

[2] Mathématiques en Méditerranée - Des tablettes babyloniennes au théorème de Fermat.
Édisud / Musées de Marseille

[3] – Arithmétique- Des résultats classiques par des moyens élémentaires.
Mathieu SAVIN - Brochure APMEP nº 129 (Septembre 2000).
– Introduction à l'Arithmétique.
Mahdi ABDELJAOUAD - Centre de Publication Universitaire.
– Arithmétique pour amateurs - PYTHAGORE, EUCLIDE et toute la clique.
Marc GUINOT - Aléas Éditeur Lyon.
– Découvrir l'Arithmétique (collection Opuscules).
Pierre DAMPHOUSSE - Ellipses.

[4] Le Nombre d'or - Le langage mathématique de la beauté.
Fernando CORBALAN - Collection « Le monde est mathématique » Éditions RBA Coleccionables.

[5] Les triplets pythagoriciens : une source d'exercices et problèmes au lycée et au collège ?
Marc ROUX - Bulletin APMEP nº 487 (Mars – Avril 2010).

[6] Sur les suites de THÉON de Smyrne :
http://fr.wikipedia.org/wiki/Racine_carr%C3%A9e_de_deux

[7] Pour la démonstration du théorème fondamental d'EUCLIDE – AL KHÂZIN, consulter un des ouvrages signalés en [3] ou aller sur :
http://fr.wikipedia.org/wiki/Triplet_pythagoricien
http://mathafou.free.fr/themes/kpytri.html

[8] Autour des nombres pythagoriciens.
Richard CHOULET - Bulletin APMEP nº 460 (Septembre – Octobre 2005).

[9 ] Sur les suites de FIBONACCI et de LUCAS :
http://fr.wikipedia.org/wiki/Suite_de_Fibonacci
http://www.les-suites.fr/suite-de-fibonacci.htm

# ANNEXE
## Démonstration de la relation de SIMSON

Pour tout entier naturel $n$ :

$$F_n^{\,2} + F_{n+1}^{\,2} = F_{2n+1}.$$

Nous allons utiliser la récurrence, mais, en fait, pour éviter une démonstration matricielle, nous ajoutons une deuxième relation à celle de SIMSON et nous nous proposons de démontrer à la fois :

$$F_n\,(F_{n-1} + F_{n+1}) = F_{2n} \qquad (1)$$

$$F_n^{\,2} + F_{n+1}^{\,2} = F_{2n+1} \qquad (2)$$

(pour une vérification « confortable », utiliser le tableau, énoncé précédemment, des valeurs de $F_n$)

• Initialisons :
Si $n = 1$,

$$F_1\,(F_0 + F_2) = 1 \times (0 + 1) = 1 = F_{2\times 1} = F_2.$$

$$F_1^{\,2} + F_2^{\,2} = 1^2 + 1^2 = 2 = F_{2\times 1+1} = F_3.$$

• Supposons que (1) et (2) soient vérifiés au rang $n$ et démontrons (1) au rang $n + 1$.
Par définition, $F_{2n+2} = F_{2n+1} + F_{2n}$.
En additionnant (1) et (2), on obtient :

$$F_{2n+2} = F_n^{\,2} + F_{n+1}^{\,2} + F_n\,(F_{n-1} + F_{n+1}),$$

$$F_{2n+2} = F_n\,(F_n + F_{n-1}) + F_{n+1}\,(F_n + F_{n+1}),$$

$$F_{2n+2} = F_n\,F_{n+1} + F_{n+1}\,F_{n+2}.$$

En factorisant $F_{n+1}$ on trouve bien la relation (1) au rang $n + 1$ :

$$F_{2n+2} = F_{n+1}\,(F_n + F_{n+2}) \qquad (3)$$

• Toujours en supposant que (1) et (2) sont vérifiés au rang $n$, démontrons maintenant la relation (2), c'est-à-dire la relation de SIMSON au rang $n + 1$.
Par définition : $F_{2n+3} = F_{2n+2} + F_{2n+1}$.
En additionnant (2) et (3), on obtient :

$$F_{2n+3} = F_n^{\,2} + F_{n+1}^{\,2} + F_{n+1}\,(F_n + F_{n+2}),$$

$$F_{2n+3} = F_{n+1}^{\,2} + F_n\,(F_{n+1} + F_n) + F_{n+1}\,F_{n+2},$$

$$F_{2n+3} = F_{n+1}^{\,2} + (F_n + F_{n+1})\,F_{n+2}.$$

On remplace $F_n + F_{n+1}$ par $F_{n+2}$ et on reconnaît la relation (2) au rang n + 1 :

$$F_{2n+3} = F_{n+2}^{\,2} + F_{n+1}^{\,2}.$$

La relation de SIMSON est démontrée.
[On peut l'écrire sous la forme : $F_{2(n+1)+1} = F_{(n+1)+1}^{\,2} + F_{n+1}^{\,2}$].

# À propos de l'article de Gérard Lopez « Voulez-vous des triplets ? »

Richard Choulet

**Le résultat principal** : (trouvé ? retrouvé ? à vrai dire je n'en sais rien. Ce qu'il y a de sûr, c'est que je ne l'ai pas vu avant d'écrire cette note.)

Pour tous entiers $a$, $b$, X et Y , le triplet ($x$ ; $y$ ; $z$), où $x$, $y$ et $z$ sont données par les formules suivantes est un triplet pythagoricien.

$$x = (a^2 + 2ab)\mathrm{X}^2 + (2a^2 + 4ab + 2b^2)\mathrm{XY} + (2ab + 3b^2)\mathrm{Y}^2,$$
$$y = 2(ab + b^2)\mathrm{X}^2 + 2(a^2 + 3ab + 3b^2)\mathrm{XY} + 2(a^2 + 3ab + 2b^2)\mathrm{Y}^2,$$
$$z = (a^2 + 2ab + 2b^2)\mathrm{X}^2 + (2a^2 + 8ab + 6b^2)\mathrm{XY} + (2a^2 + 6ab + 5b^2)\mathrm{Y}^2.$$

D'où vient l'idée ?

Dans l'article de Gérard Lopez, on découvre que le quadruplet de nombres de FIBONACCI consécutifs ($\mathrm{F}_n$ ; $\mathrm{F}_{n+1}$ ; $\mathrm{F}_{n+2}$ ; $\mathrm{F}_{n+3}$) permet de construire un triplet pythagoricien ($x$ ; $y$ ; $z$) avec $x = \mathrm{F}_n\,\mathrm{F}_{n+3}$, $y = 2\mathrm{F}_{n+1}\,\mathrm{F}_{n+2}$ et $z = \mathrm{F}_{n+1}^{\,2} + \mathrm{F}_{n+2}^{\,2}$ et la suite de FIBONACCI classique pour laquelle $\mathrm{F}_0 = 0$, $\mathrm{F}_1 = 1$ (convention dans ce qui suit $\mathrm{F}_{-1} = 1$) ainsi que $\mathrm{F}_{n+2} = \mathrm{F}_{n+1} + \mathrm{F}_n$ pour tout $n$. Il en est de même avec les nombres de LUCAS en remplaçant F par L.

Ces deux résultats m'ont incité à regarder s'il en était ainsi avec **toute suite récurrente d'ordre deux « à la FIBONACCI »**, c'est-à-dire qui vérifie la récurrence ci-dessus (avec des valeurs initiales $a$ et $b$).

Or, en gardant la notation générique de L pour une suite récurrente fibonaccienne ($\mathrm{L}_0 = a$ et $\mathrm{L}_1 = b$, sans oublier $\mathrm{F}_{-1} = 1$), on a pour tout $n$ :

$$\mathrm{L}_n = a\mathrm{F}_{n-1} + b\mathrm{F}_n.$$

Un quadruplet quelconque de nombres consécutifs est alors du type :

$$(a\mathrm{F}_{n-1} + b\mathrm{F}_n \,;\, a\mathrm{F}_n + b\mathrm{F}_{n+1} \,;\, a\mathrm{F}_{n+1} + b\mathrm{F}_{n+2} \,;\, a\mathrm{F}_{n+2} + b\mathrm{F}_{n+3}),$$

ou encore si l'on préfère :

$$(a\mathrm{F}_{n-1} + b\mathrm{F}_n \,;\, b\mathrm{F}_{n-1} + (a + b)\mathrm{F}_n \,;\, (a + b)\mathrm{F}_{n-1} + (a + 2b)\mathrm{F}_n \,;$$
$$(a + 2b)\mathrm{F}_{n-1} + (2a + 3b)\mathrm{F}_n).$$

Le triplet ($x$ ; $y$ ; $z$) donné par :

$$x = (a^2 + 2ab)\mathrm{F}_{n-1}^{\,2} + (2a^2 + 4ab + 2b^2)\mathrm{F}_{n-1}\mathrm{F}_n + (2ab + 3b^2)\mathrm{F}_n^{\,2},$$
$$y = 2(ab + b^2)\mathrm{F}_{n-1}^{\,2} + 2(a^2 + 3ab + 3b^2)\mathrm{F}_{n-1}\mathrm{F}_n + 2(a^2 + 3ab + 2b^2)\mathrm{F}_n^{\,2},$$
$$z = (a^2 + 2ab + 2b^2)\mathrm{F}_{n-1}^{\,2} + (2a^2 + 8ab + 6b^2)\mathrm{F}_{n-1}\mathrm{F}_n + (2a^2 + 6ab + 5b^2)\mathrm{F}_n^{\,2}$$

est un triplet pythagoricien.

En faisant le calcul de $z^2 - x^2 - y^2$, je me suis aperçu que cela revenait à établir une identité dans $\mathbb{Z}[\mathrm{X} ; \mathrm{Y}]$, les $\mathrm{F}_i$ ne jouant aucun rôle particulier, mais seulement les coefficients dirigeant $\mathrm{F}_{n-1}^{\,2}$, $\mathrm{F}_{n-1}\mathrm{F}_n$ et $\mathrm{F}_n^{\,2}$.

Je ne détaille pas ici les calculs que j'ai fait, mais tout logiciel de calcul formel se débrouille très bien dans cette tâche ingrate.