Des *Dobble* mathématiques

Arnaud Gazagnes(*)

Le jeu d'ambiance(1) Dobble *connaît* son petit succès auprès du grand public… Thierry Lambre en a proposé une étude via la géométrie projective dans le BV 496. Nous allons nous intéresser à une création de jeux mathématiques utilisables en classe sur l'idée du *Dobble*. Le jeu initial repose entièrement sur la discrimination visuelle et le balayage du regard pour retrouver les motifs ainsi que sur la rapidité ; il n'est pas nécessaire que les jeunes qui jouent avec les *Dobble* mathématiques soient dans le même esprit de rapidité (et de compétition). En particulier, notre jeu peut être utilisé en petits groupes, en remédiation par exemple.

Rappelons les principes de ce jeu : d'une part *deux cartes distinctes ont toujours un motif commun et un seul* et d'autre part *deux motifs distincts étant donnés, il existe au plus une carte possédant ces deux figures*.

Première partie : quelques résultats théoriques(2)

Nous noterons

- m le nombre des motifs utilisés dans le jeu.
- n le nombre de motifs sur chaque carte, le même pour toutes les cartes ($n > 1$).
- f le nombre de cartes où apparaît un motif donné, le même pour tous les motifs.
- c le nombre total de cartes du jeu.

Le but de cette première partie est d'obtenir des relations nécessaires reliant ces quatre paramètres.

Cherchons d'abord de deux façons le nombre de couples de cartes : il est d'abord égal à $c \times (c - 1)$, par choix successifs de deux cartes distinctes.

D'autre part, on peut classer ces couples en les triant selon leur unique motif commun : il y a m classes, car les m motifs sont utilisés. Dans chacune de ces classes, il y a $f \times (f - 1)$ couples de cartes, par choix successifs de deux cartes distinctes parmi les f cartes comportant le motif en question. Il y a donc en tout $m \times f \times (f - 1)$ couples de cartes.

Quant au nombre total de motifs dessinés dans le jeu, il est à la fois

- égal à $m \times f$ puisque chacun des m motifs apparaît f fois,
- égal à $c \times n$, puisque chacune des c cartes comporte n motifs.

Par conséquent, on a à la fois

(*) arnaud.gazagnes@ac-lyon.fr, membre du groupe « Jeux » de l'APMEP

(1) Un jeu d'ambiance met en relation plusieurs joueurs, et souvent un grand nombre de joueurs. Le but du jeu n'est pas tant de gagner que de passer un moment agréable ensemble.

(2) Merci à Gilbert Gribonval pour cet apport.

$$c \times (c - 1) = m \times f \times (f - 1)$$

et

$$m \times f = c \times n.$$

On en déduit facilement :

$$c - 1 = n \times (f - 1) \qquad (1)$$

et

$$m \times f = c \times n \qquad (2)$$

Et donc :

$$\boxed{c = n \times (f - 1) + 1}$$

et

$$\boxed{m = c \times n \div f.}$$

Dans le cas du jeu du commerce, on a $f = n$. On obtient alors :

$$c = m = f \times (f - 1) + 1,$$

et la structure du jeu ne dépend que d'un paramètre, le nombre de motifs par cartes.

Ces formules ne constituent que des conditions nécessaires, mais elles permettent de restreindre le champ des possibles.
Cherchons par exemple s'il existe un jeu de 6 cartes : (1) s'écrit : $n \times (f - 1) = 5$. Puisque n est au moins égal à 2, on obtient : $n = 5$ et $f - 1 = 1$. Donc, $f = 2$, et $m = \dfrac{c \times n}{f} = \dfrac{6 \times 5}{2} = 15.$
On peut vérifier qu'il existe bien un tel jeu et sa construction peut être un bon exercice de logique pour des élèves de collège. En notant les 15 motifs par les entiers de 1 à 15, on peut par exemple construire :

$$1 - 2 - 3 - 4 - 5$$
$$1 - 6 - 7 - 8 - 9$$
$$2 - 6 - 10 - 11 - 12$$
$$3 - 7 - 10 - 13 - 14$$
$$4 - 8 - 11 - 13 - 15$$
$$5 - 9 - 12 - 14 - 15$$

Par contre, le quadruplet $(n, f, c, m) = (3, 6, 16, 8)$ vérifie bien nos formules, mais ne permet pas de construire un jeu : avec seulement 8 motifs, (par exemple les chiffres de 1 à 8) on ne peut même pas construire les 6 cartes qui doivent comporter le motif 1. Avec 3 motifs par carte, il nous faudrait au moins 12 autres motifs pour pouvoir le faire sans que d'autre motif que 1 y soit répété. C'est une preuve que les conditions trouvées ne sont pas suffisantes !

Voici quelques jeux construits avec de « petites valeurs » de n et de f, on pourra vérifier que ces quadruplets permettent de construire effectivement des jeux.

N	F	C	M
2	2	3	3
3	2	4	6
3	3	7	7
4	2	5	10
4	3	9	12
4	4	13	13

Deuxième partie : construction de jeux

Les motifs seront notés par des lettres : A, B, etc.

Un exemple avec $n = 3$ et $f = 2$

D'après les propriétés précédentes, les seules valeurs possibles de c et de m sont :
$c = 1 + 3 \times (2 - 1) = 4$ cartes et $m = 4 \times 3 \div 2 = 6$ motifs différents, notés A, B, C, D, E, F.
La carte 1 porte par exemple les motifs A, B et C.
La carte 2 porte les motifs A (élément commun avec la carte précédente) mais ne peut porter ni B ni C. Elle porte donc, par exemple, les motifs D et E.
A ne sera plus utilisé ($f = 2$). Une troisième carte doit porter un B. Elle ne peut porter un C, car il n'y aurait plus unicité de l'élément commun aux cartes 1 et 3 ; donnons lui un D. Elle ne peut alors porter un E car il n'y aurait plus unicité de l'élément commun aux cartes 2 et 3. Elle porte donc un F.
La quatrième carte porte alors les motifs C, E et F, pour que chaque motif apparaisse 2 fois.
On peut représenter ceci sous la forme suivante :

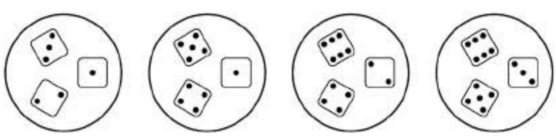
Carte 1	A	B	C			
Carte 2	A			D	E	
Carte 3		B		D		F
Carte 4			C		E	F

Notre jeu vérifie bien toutes les contraintes.

Pour que les jeux qui seront ensuite utilisés en classe gardent un côté ludique, il vaut mieux ne pas prendre n supérieur à 4.

Première utilisation possible : un dé

Voici de quoi faire un dé ! Il suffit de choisir pour motifs(3) les faces 1 à 6 d'un dé. Ainsi prendre deux cartes au hasard et observer leur motif commun revient à simuler un lancer de dé, et c'est un dé peu bruyant et qui ne roule pas par terre !



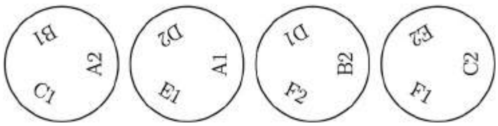
(3) Ou bien évidemment par toute autre permutation circulaire de ces six faces.

Deuxième utilisation possible : des tables de multiplication

Chaque lettre est utilisée deux fois. On peut donc penser aux tables de multiplication. Ce jeu permet à l'école primaire de travailler l'apprentissage des tables de multiplication. En effet, il y a dans toute table une multiplication et un produit. Par conséquent, on utilise la lettre A – par exemple – une fois avec une multiplication (ceci sera codé A1) et une autre fois avec le produit correspondant (et cela sera codé A2).
On crée donc les quatre cartes de la façon suivante :

Carte 1	A1	B1	C1			
Carte 2	A2			D1	E2	
Carte 3		B2		D2		F1
Carte 4			C2		E2	F2

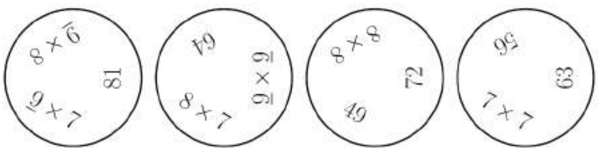
Ce qui donne les quatre cartes suivantes :



Il reste à créer effectivement les « *Dobble* de multiplication ».
Pour cela, on remplit d'abord un tableau à six lignes et deux colonnes tel que celui-ci :

	1	2
A	9×9	81
B	9×8	72
C	9×7	63
D	8×8	64
E	8×7	56
F	7×7	49

On crée ensuite les cartes associées suivantes(4) .



Un autre exemple avec $n = 4$ et $f = 3$

D'après nos formules, on a un jeu de $c = 1 + 4 \times (3 - 1) = 9$ cartes.
On a besoin de $m = 9 \times 4 \div 3 = 12$ motifs différents.

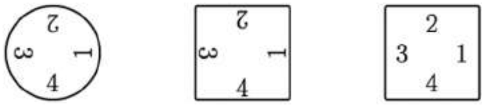
(4) Le 6 et le 9 sont en général soulignés pour éviter une confusion entre eux.

Je laisse le lecteur vérifier que le jeu suivant vérifie bien les hypothèses :

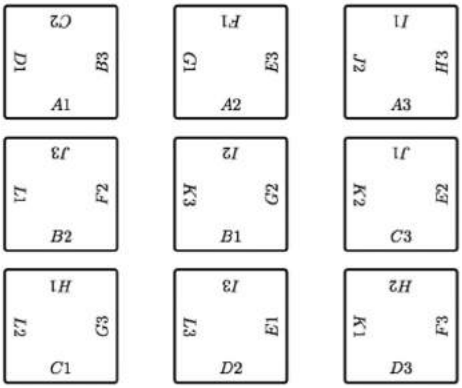
ABCD AEFG AHIJ BFJL BGIK CEJK CGHL DEIL DFHK

On va jouer avec ce *Dobble* pour travailler l'écriture décimale de $m = 12$ nombres. Chacun apparaîtra 3 fois, et sous 3 formes différentes et le but du jeu sera de reconnaître des écritures équivalentes.

Pour une question pratique, les cartes seront carrées : cela permet (à l'enseignant comme à l'élève) d'écrire plus facilement les énoncés sur les cartes. Une autre idée est d'écrire tous les nombres dans le même sens afin de faciliter leur lecture pour certains élèves.



Voici un jeu possible :

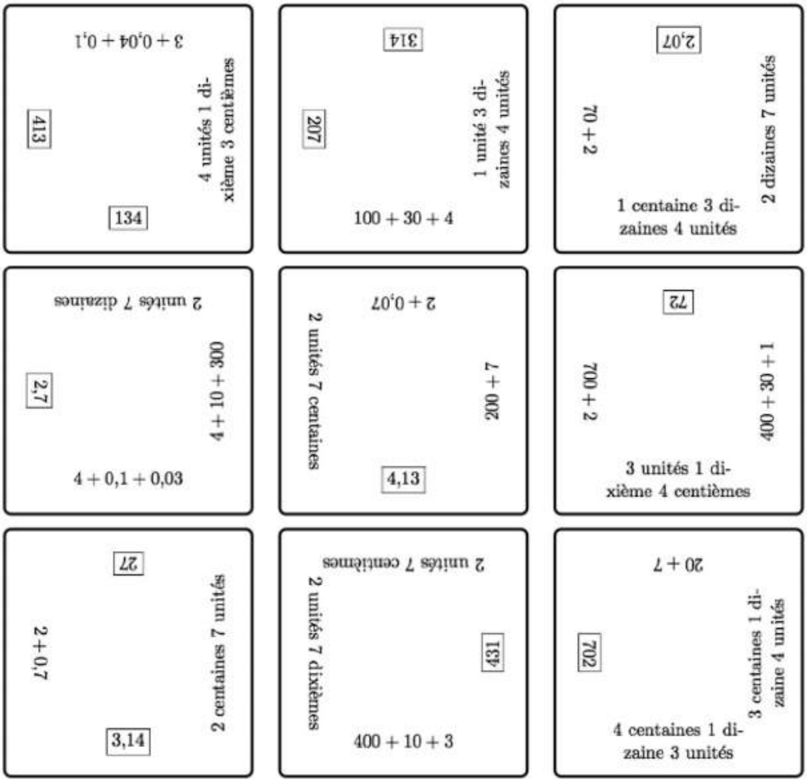


Comme plus haut, les 36 motifs utilisés sont les éléments d'un tableau à douze lignes et trois colonnes comme celui-ci :

	1	2	3
A	3,14	3 + 0,04 + 0,1	3 unités 1 dixième 4 centièmes
B	413	400 + 10 + 3	4 centaines 1 dizaine 3 unités
…	…	…	…
G	27	20 + 7	2 dizaines 7 unités
H	72	70 + 2	7 unités 2 dizaines
…	…	…	…

Sur les cartes, les nombres de la première colonne sont mis en valeur par un encadré.

Et voici le jeu associé[5] :



Quelques choix pédagogiques

• Le lecteur remarquera que les différents nombres sont écrits avec deux paires de mêmes chiffres (d'une part 1, 3 et 4 et d'autre part 0, 2 et 7). C'est un choix. En effet, l'élève, voyant par exemple douze nombres écrits avec des chiffres différents recherchera des écritures comportant ces chiffres : le travail mathématique escompté disparaît ! Par ailleurs, dans notre exemple, nous introduisons un travail sur la notion du « 0 inutile ».

• Le lecteur aura remarqué aussi que les nombres proposés ne sont pas décomposés dans le sens de lecture usuel. Aussi le nombre 3,14 est-il décliné ici sous la forme « 3 + 4/100 + 1/10 ». Cela permet de mettre en lumière l'importance de la position du chiffre dans l'écriture décimale et l'unicité de la décomposition.

• Le jeu envisage enfin les confusions possibles entre « dixième » et « dizaine », par exemple, via la présence de nombres tels que 3,14 et 413.

De plus, la première colonne du tableau donne les nombres en écriture décimale usuelle et les autres colonnes, leurs décompositions. Cette première colonne permet aux élèves de donner facilement les nombres avec lesquels ils vont jouer. Remplacer

(5) Le lecteur intéressé par l'obtention de différents jeux peut m'envoyer un courriel.

le contenu de cette première colonne par un autre type de décomposition (par exemple, écrire 3 + 1/10 + 4/100 à la place de 3,14) complexifie le jeu pour les élèves (ils ne disposent que de décompositions). On peut aussi utiliser un jeu où chaque nombre a 4 écritures différentes, ce qui conduit à un jeu de 13 cartes avec : $(n, f, c, m) = (4, 4, 13, 13)$. Une quatrième colonne est alors ajoutée au tableau qui devient(6) :

	1	2	3	4
A	3,1	3 + 0,1	3 + 1/10	3 unités 1 dixième
B	3,01	3 + 0,01	3 + 1/100	3 unités 1 centième
…	…	…	…	…
E	3,25	3 + 0,2 + 0,05	3 + 2/10 + 5/100	3 unités 2 dixièmes 5 centièmes
	…	… …	…	

Troisième partie : mon (rapide) vécu en classe de Sixième pendant une heure de cours(7)

Lorsque le jeu est présenté, les élèves ont fait les activités « de mise en route » du début du chapitre.
Dans un premier temps, le « vrai » jeu est montré et expliqué aux élèves, répartis autour des tables par groupes de 4. Cette période de découverte et de manipulation est essentielle, même si elle est rapide.

Dans un second temps, les élèves jouent. Les cartes sont déposées en pile, faces cachées. La première carte est placée sur la table, face visible. L'un des élèves dépose celle qui se retrouve sur le haut de la pile à côté, face visible : l'élève qui trouve le premier leur nombre commun gagne un point. La carte qui se retrouve sur le haut de la pile est alors déposée sur l'avant-dernière déposée, pour alterner les piles construites au fur et à mesure. À la fin de la manche, une fois toutes les cartes déposées, elles sont de nouveau mélangées. Le premier qui arrive à 4 points a gagné la partie(8). Les groupes ont eu le choix de jouer une autre partie soit avec le même jeu soit avec un jeu construit sur d'autres nombres.

Dans un troisième temps, un bilan est fait. Les élèves peuvent d'abord donner leurs impressions(9). Le tableau qui a permis la construction du premier jeu est distribué aux élèves ; la première colonne est déjà remplie. Il est complété en commun au tableau et commenté avec une attention particulière sur les différents termes utilisés : dizaine, dixième, etc. et sur l'ordre « unité ® dixième ® centième ® millième » puis collé dans le cahier.

(6) Le jeu est de la forme : ABCD AEFG AHIJ AKLM BEHK BFIL BGJM CEIL CFHM CGJK DEIM DFJK DGHL.
(7) Merci à mon collègue C. G. qui m'a ouvert (encore une fois) ses portes.
(8) La partie compte donc un nombre de tours compris entre 4 + 0 + 0 + 0 = 4 et 4 + 3 + 3 + 3 = 13. La valeur 4 n'est que théorique : je ne l'ai pas vu apparaître. Tous les élèves avaient en général au moins 2 points.
(9) Sur ce qu'ils ont apprécié ou sur leurs difficultés (et la nature de celles-ci). Pas sur le fait que c'était une « activité chère bien » (sic) !

J'ai mentionné plus haut l'enseignant et l'élève lors de l'écriture des cartes. Il est vrai que c'est souvent l'enseignant qui apporte les cartes. Mais il ne faut pas sous-estimer la création des élèves[10] : lors d'un tel travail, ils font un réelle activité mathématique et s'approprient la notion travaillée[11].

Il n'y a rien de plus sérieux qu'un élève qui joue.

(10) E = CM2 ! Les documents mis en ligne sur http://www.apmep.asso.fr/Premier-degre-College-Lycee abondent en mon sens.
(11) Plus tard, des élèves m'apporteront avec plaisir un jeu qu'ils ont inventé ! (Et cela ne m'a pas surpris !) Ils avaient à la fois refait un tableau et un jeu. Sans aucune faute... Alors que ces mêmes élèves (qui n'étaient pas forcément tous de très bons élèves) auraient très probablement eu un investissement moindre face aux exercices (sur le même thème) du manuel...