Les problèmes de l'APMEP

Les propositions de problèmes, solutions ou commentaires, sont à envoyer à

Max HOCHART
13, rue des Garennes
63 800 Cournon d'Auvergne
ou
hochartmax@yahoo.fr

Énoncés des nouveaux problèmes

Problème 498 - 1 (Michel Lafond (Dijon))

Un entier naturel est dit « quarrable » s'il est la somme des chiffres d'un carré parfait (en base 10). Par exemple, l'entier 22 est quarrable puisque

$$22 = 5 + 4 + 7 + 6 \quad \text{et} \quad 5476 = 74^2.$$

Caractériser la suite (0, 1, 4, 7, 9, 10, 13, …) des entiers quarrables.

Problème 498 - 2 (Georges Kocher (Ravières))

Pour trois réels strictement positifs a, b, c dont la somme vaut 1, prouver l'inégalité

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right) \leq 64.$$

Problème 498 - 3

Tout polynôme non nul a-t-il toujours un multiple qui soit polynôme en $X^{1000000}$?

L'énoncé qui suit m'a été signalé par Fernand Canonico (Clermont-Ferrand) et Laurent Germa (Orcines). Je les en remercie vivement.

Problème 498 - 4

Soit a, b deux réels, avec $a < b$. On considère une application $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ dérivable sur le segment [a, b]. On note D l'image du segment $[a, b]$ par l'application dérivée f', et C désigne l'enveloppe convexe de D. Montrer que le rapport $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ appartient à l'adhérence de C.

Solutions des problèmes antérieurs

Problème 491 - 1

Soit F la suite de Fibonacci définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.
Montrer que pour $n \geq 1$,

$$\prod_{k=1}^{n} F_k \leq \frac{1}{n!}\exp\left(F_{n+4} - 2n - 3\right).$$

Solution de Robert Bourdon (Tourgeville) et de Jean-Claude Carréga (Lyon)

Robert Bourdon procède par récurrence, **Jean-Claude Carréga** obtient directement l'inégalité voulue. Tous deux utilisent la concavité du logarithme : pour $x > 0$, $\ln(x) \leq x - 1$, donc pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_n > 0$,

$$\ln\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} x_k - n,$$

puis

$$\prod_{k=1}^{n} x_k \leq \exp\left(\sum_{k=1}^{n} x_k - n\right).$$

En choisissant, pour $k \in [[1, n]]$, $x_k = (n - k + 1)\,\mathrm{F}_k$, on obtient

$$\prod_{k=1}^{n}(n-k+1)\prod_{k=1}^{n}\mathrm{F}_k \leq \exp\left(\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)\mathrm{F}_k - n\right),$$

soit encore

$$\prod_{k=1}^{n}\mathrm{F}_k \leq \frac{1}{n!}\exp\left(\mathrm{A}_n - \mathrm{B}_n - n\right) \tag{1}$$

où, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{A}_n = (n+1)\sum_{k=1}^{n}\mathrm{F}_k$ et $\mathrm{B}_n = \sum_{k=1}^{n} k\mathrm{F}_k$. Facilement,

$$\mathrm{A}_n = (n+1)\sum_{k=1}^{n}\left(\mathrm{F}_{k+1} - \mathrm{F}_{k-1}\right) = (n+1)\left(\mathrm{F}_{n+1} + \mathrm{F}_n - \mathrm{F}_1\right) = (n+1)\left(\mathrm{F}_{n+2} - 1\right).$$

De même,

$$\begin{aligned}
\mathrm{B}_n &= \sum_{k=1}^{n} k\left(\mathrm{F}_{k+1} - \mathrm{F}_{k-1}\right) \\
&= \sum_{k=2}^{n+1}(k-1)\mathrm{F}_k - \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\mathrm{F}_k \\
&= n\mathrm{F}_{n+1} + (n-1)\mathrm{F}_n - 2\sum_{k=2}^{n-1}\mathrm{F}_k - 2\mathrm{F}_1 \\
&= n\mathrm{F}_{n+2} - \mathrm{F}_n - 2\mathrm{F}_{n+1} + 2.
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\mathrm{A}_n - \mathrm{B}_n = \mathrm{F}_{n+2} + 2\mathrm{F}_{n+1} + \mathrm{F}_n - n - 3 = \mathrm{F}_{n+4} - n - 3,$$

ce qui conclut, en reportant dans (1).

Problème 491-2 (Question de Fernand Canonico)

Soit P un polynôme complexe de degré $n \geq 1$. Pour $\omega \in \mathbb{C}$, soit v_ω le nombre de solutions complexes de l'équation $\mathrm{P}(z) = \omega$. Montrer que

$$\sum_{\omega \in \mathbb{C}}\left(n - v_\omega\right) = n - 1.$$

Solutions d'Alexandre Benchaouine (Chamalières), de Jean-Claude Carréga (Lyon), de George Lion (Wallis) et d'Éric Oswald (Borgo)

Pour $\omega \in \mathbb{C}$, la condition $v_\omega < n$ signifie que l'équation $P(z) = \omega$ possède au moins une racine double : il existe $u \in \mathbb{C}$ tel que $P(u) = \omega$ et $P'(u) = 0$. Pour chaque $u \in \mathbb{C}$ tel que $P'(u) = 0$, le complexe $\omega = P(u)$ fournit une valeur telle que $v_\omega < n$. Il n'y a donc qu'un nombre fini de tels complexes ω, ce sont les images par P des racines de P′, en nombre h inférieur ou égal à $\deg(P') = n - 1$. On note $\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_h\}$ l'ensemble des valeurs de ω telles que $v_\omega < n$. Pour toute autre valeur de ω, on a $v_\omega = n$ et il en résulte que

$$\sum_{\omega\in\mathbb{C}}\left(n - v_\omega\right) = \sum_{k=1}^{h}\left(n - v_{\omega_k}\right).$$

Pour $k \in [[1, h]]$, on note $E_k = \{u \in \mathbb{C} \mid P'(u) = 0 \text{ et } P(u) = \omega_k\}$. C'est l'ensemble des racines multiples du polynôme $P(X) - \omega_k$. Les ensembles E_k sont disjoints et $E = \bigcup_{k=1}^{h} E_k$ est l'ensemble des racines du polynôme $P'(X)$.

Si $u \in \mathbb{C}$ est une racine de $P'(X)$, on note α_u l'ordre de u dans le polynôme $P'(X)$. Si u est dans E_k, l'ordre de u dans le polynôme $P(X) - \omega_k$ est $\alpha_u + 1$.

Pour chaque $k \in [[1, h]]$, on a

$$n = v_{\omega_k} + \sum_{u\in E_k}\alpha_u.$$

En effet, l'entier n est le degré du polynôme $P(X) - \omega_k$. Mais n est aussi la somme des ordres des racines de ce polynôme et, dans le second membre, v_{ω_k} est le nombre de racines (comptées une fois) du polynôme $P(X) - \omega_k$, auquel on ajoute, pour chaque racine multiple u, son ordre dans le polynôme $P(X) - \omega_k$ diminué de 1, ce que l'on a noté α_u. D'où la formule ci-dessus.

Ainsi,

$$\sum_{\omega\in\mathbb{C}}\left(n - v_\omega\right) = \sum_{k=1}^{h}\left(n - v_{\omega_k}\right) = \sum_{k=1}^{h}\sum_{u\in E_k}\alpha_u = \sum_{u\in E}\alpha_u.$$

Le dernier terme écrit est la somme des ordres des racines du polynôme $P'(X)$ qui est de degré $n - 1$, d'où le résultat voulu.

Problème 492-1

Trouver tous les polynômes complexes P tels que si $|z| = 1$ alors $|P(z)| = 1$.

Solutions de Raymond Heitz (Lavergne), Éric Oswald (Borgo), Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Lazare Georges Vidiani (Fontaine Les Dijon)

On peut résoudre ce problème par la simple résolution d'un système. C'est ce que proposent **Éric Oswald** et **Pierre Renfer**. On note $\mathcal{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}$: pour tout z de module 1,

$|P(z)|^2 = 1$. En écrivant $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$,

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k z^k\right)\left(\sum_{l=0}^{n} \overline{a_l z}^{\,l}\right) = 1.$$

Comme $\bar{z} = \frac{1}{z}$, cette relation, multipliée par z^n, donne

$$\sum_{0 \le k,l \le n} a_k \overline{a_l} z^{n+k-l} = z^n.$$

Cette égalité polynomiale est vérifiée sur l'ensemble infini $\mathcal{U}$, elle est donc vraie sur $\mathbb{C}$. En posant $p = l - k$, on obtient, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{p=-n}^{n} \left(\sum_{k=0}^{n-p} a_k \overline{a_{k+p}}\right) z^{n-p} = z^n.$$

Le terme devant z^n donne $\sum_{k=0}^{n} |a_k|^2 = 1$ et l'on a également

$$\sum_{k=0}^{n-p} a_k \overline{a_{k+p}} = 0$$

pour $p \in [[1, n]]$. Comme le coefficient a_n est non nul, la relation pour $p = n$ donne $a_0\overline{a_n} = 0$ donc $a_0 = 0$. Pour $p = n - 1$, on $0 = a_0\overline{a_{n-1}} + a_1\overline{a_n} = a_1\overline{a_n}$, donc $a_1 = 0$ et ainsi de suite, jusqu'à obtenir $a_{n-1} = 0$. La première relation $\sum_{k=0}^{n} |a_k|^2 = 1$ donne alors $|a_n| = 1$. Ainsi, les polynômes cherchés sont de la forme $P(X) = aX^n$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $|a| = 1$. Réciproquement, un tel polynôme convient.

Lazare Georges Vidiani contourne la résolution du système ainsi : si $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ est tel que $P(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}$, il introduit les polynômes

$$R(X) = X^n \overline{P}\left(\frac{1}{X}\right) = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} X^{n-k} \text{ et } Q(X) = P(X)R(X).$$

Pour $z \in \mathcal{U}$, $\bar{z} = \frac{1}{z}$ donc

$$1 = |P(z)|^2 = P(z)\overline{P}(\bar{z}) = P(z)\overline{P}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z^n} Q(z).$$

Ainsi, sur l'ensemble infini $\mathcal{U}$, $Q(z) = z^n$ donc $X^n = Q(X) = P(X)R(X)$, ce qui montre que P divise X^n donc est de la forme αX^k avec $\alpha \in \mathcal{U}$.

Raymond Heitz affirme[(1)] qu'un polynôme P solution au problème doit vérifier $P(0) = 0$. On écrit donc $P(X) = XP_1(X)$ et P_1 vérifie la même propriété, mais est de degré strictement inférieur. En itérant le phénomène, on arrive à

$$P(X) = XP_1(X) = X^2P_2(X) = \ldots = X^nP_n(X)$$

où P_n est un polynôme constant, nécessairement un complexe de module 1.

Problème 492-2 (Question de Michel Lafond)

Soit P et Q deux polynômes réels du second degré. On suppose que les suites $(P(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(Q(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont strictement croissantes et sans terme commun. On intercale ces deux suites pour obtenir la suite $u = (1, 2, 8, 10, 18, 25, 32, 46, \ldots)$.

1. Calculer u_{1000}.
2. Donner un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Solutions de Maurice Bauval (Versailles), Richard Beczkowski (Chalon sur Saône), Bernard Collignon (Coursan), Michel Lafond (Dijon), Éric Oswald (Borgo) et Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques)

On commence par chercher P et Q. Plusieurs méthodes sont proposées : résolution d'un système, utilisation de l'opérateur aux différences finies, disjonction des cas. Par exemple, **Michel Lafond** note que tout polynôme A(X) de degré (au plus) deux est entièrement déterminé par ses valeurs en 1, 2, 3 et que ses valeurs sur les autres entiers strictement positifs sont obtenues par la relation

$$A(n+3) = A(n) + 3(A(n+2) - A(n+1)) \qquad (n \in \mathbb{N}). \tag{2}$$

Cette relation est linéaire en A et un calcul montre qu'elle est valable pour 1, X et X^2. On peut aussi introduire l'opérateur défini sur les polynômes par

$$\Delta(A) = A(X+1) - A(X). \tag{3}$$

Puisque $\deg(\Delta(A)) \leq \deg(A) - 1$, on a aussitôt $\Delta^3(A) = 0$ pour un polynôme de degré au plus 2, ce qui donne la relation voulue.

Soit E l'ensemble $\{1, 2, 8, 10, 18\}$ formé des cinq premiers termes de la suite u. Par le principe des tiroirs, trois des termes de E appartiennent à l'une des deux suites $(P(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ ou $(Q(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$. Par symétrie, et compte tenu de la stricte croissance des suites, on peut supposer que P(1), P(2), P(3) sont dans E. Il y a $\binom{5}{3} = 10$ cas à envisager, regroupés ci-dessous. La donnée initiale est (P(1), P(2), P(3)). On trouve P(4) et P(5) par la formule (2) et l'on s'arrête si l'une de ces valeurs n'est pas cohérente. On trouve ensuite Q(1), Q(2), Q(3) : ce sont, parmi les valeurs de u données dans l'énoncé, celles restantes et que l'on prend par ordre croissant. La relation (2) fournit la valeur de Q(4).

(1) Son argument est basé sur la propriété de la moyenne. Comme le demande lui même **Raymond Heitz** dans sa lettre, « est-ce vraiment rigoureux ? ». J'avoue ne pas être convaincu par cet argument (mais ne demande qu'à l'être).

cas	P(1)	P(2)	P(3)	P(4)	P(5)	Q(1)	Q(2)	Q(3)	Q(4)
1	1	2	8	19					
2	1	2	10	25	47	8	18	32	50
3	1	2	18	49		8	10	25	53
4	1	8	10	7					
5	1	8	18	31					
6	1	10	18	25	31				
7	2	8	10	8					
8	2	8	18	32	50	1	10	25	46
9	2	10	18	26					
10	8	10	18	32	52	1	2	25	70

Les cas 1, 4, 5, 6, 9 sont impossibles car une des deux valeurs P(4) ou P(5) n'est pas un terme de u. Les cas 2, 3 ou 10 sont impossibles car ils conduisent à une valeur de Q(4) trop élevée (certains termes de u donnés dans l'énoncé seraient manquants). Le cas 7 ne respecte pas la croissance de la suite $(\mathrm{P}(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Reste le cas 8. Les conditions (P(1), P(2), P(3)) = (2, 8, 18) et deg(P) = 2 imposent $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = 2\mathrm{X}^2$ tandis que les conditions (Q(1), Q(2), Q(3)) = (1, 10, 25) et deg(Q) = 2 donnent $\mathrm{Q}(\mathrm{X}) = 3\mathrm{X}^2 - 2$.

Pour arriver à ce résultat, **Bernard Collignon** et **Pierre Renfer** utilisent l'opérateur Δ introduit dans la formule (3) pour former ce que **Pierre Renfer** appelle « une table de différence d'un polynôme ». Dans une telle table, la première ligne contient les valeurs en 0, 1, 2, … d'un polynôme A(X), la seconde ligne contient les valeurs en 0, 1, 2, … du polynôme $\Delta(\mathrm{A}) = \mathrm{A}(\mathrm{X}+1) - \mathrm{A}(\mathrm{X})$, etc. Chaque terme est la différence des deux termes du dessus. Voici par exemple la table du polynôme $\mathrm{A}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^2 + \mathrm{X} + 1$:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & & 3 & & 7 & & 13 & & 21 \\ & 2 & & 4 & & 6 & & 8 & \\ & & 2 & & 2 & & 2 & & \end{array}$$

Pour un polynôme A de degré 2, le polynôme $\Delta(\mathrm{A})$ est de degré 1, ce qui explique que les termes de la seconde ligne sont en progression arithmétique, la troisième ligne étant alors constante. En notant Q celui des deux polynômes de l'énoncé pour lequel Q(1) = 1, et en formant les différentes tables selon les valeurs de Q(1), Q(2), Q(3), **Bernard Collignon** et **Pierre Renfer** trouvent l'unique table pour laquelle la seconde ligne est arithmétique. Celle de Q est

$$\begin{array}{ccccccccc} -2 & & 1 & & 10 & & 25 & & 46 \\ & 3 & & 9 & & 15 & & 21 & \\ & & 6 & & 6 & & 6 & & \end{array}$$

et celle de P est

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & & 2 & & 8 & & 18 & & 32 \\ & 2 & & 6 & & 10 & & 14 & \\ & & 4 & & 4 & & 4 & & \end{array}$$

La reconstitution d'un polynôme est aisée à partir du « bord gauche de la table » (c'est-à-dire la liste des premiers termes de chaque ligne) : si ce bord est (a, b, c) alors

$$A(X) = a + bX + c\frac{X(X-1)}{2}. \tag{4}$$

Ainsi,

$$Q(X) = -2 + 3X + 6\frac{X(X-1)}{2} = 3X^2 - 2$$

et

$$P(X) = 0 + 2X + 4\frac{X(X-1)}{2} = 2X^2.$$

La relation (4) résulte d'un résultat plus général : les polynômes de Hilbert, définis par $H_0 = 1$ et $H_n(X) = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(X-k)$, sont caractérisés par la relation $\Delta(H_n) = H_{n-1}$, d'où il découle que pour deux entiers $m, n \in \mathbb{N}$

$$\Delta^m(H_n)(0) = \delta_{m,n} = \begin{cases} 1 \text{ si } m = n \\ 0 \ \text{ sinon} \end{cases} \tag{5}$$

Échelonnée en degrés, $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forme une base de $\mathbb{R}[X]$. Si $A \in \mathbb{R}[X]$ s'écrit $A = \sum_{k\geq 0} a_k H_k$, la relation (5) donne $a_k = \Delta^k(A)(0)$, donc $A = \sum_{k\geq 0} \Delta^k A(0) H_k$, ce qui, dans le cas d'un polynôme de degré 2, est la relation (4).

Partant du principe vu plus haut selon lequel les valeurs $\Delta(Q)$ et $\Delta(P)$ en 1, 2, 3, … doivent former des progressions arithmétiques, **Éric Oswald** remarque que les termes $u_4 - u_1 = 9$, $u_6 - u_4 = 15$, $u_8 - u_6 = 21$ sont en progression arithmétique de raison 6. Il conjecture alors que la suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ a pour premiers termes 1, 10, 25 et trouve $Q(X) = 3X^2 - 2$, puis en déduit $P(X) = 2X^2$, qui est bien la[2] solution souhaitée.

Voici une dernière méthode pour déterminer les polynômes P et Q. Pour un polynôme $A(X) = aX^2 + bX + c$, **Richard Beczkowski** inverse le système

$$\begin{cases} a + b + c = A(1) \\ 4a + 2b + c = A(2) \\ 9a + 3b + c = A(3) \end{cases}$$

pour obtenir

$$\begin{cases} 2a = A(3) - 2A(2) + A(1) \\ 2b = -3A(3) + 8A(2) - 5A(1) \\ c = A(3) - 3A(2) + 3A(1) \end{cases}$$

On a également l'égalité

$$A(4) = 16a + 4b + c,$$

qui se traduit par

(2) La question de l'unicité de cette solution n'est pas abordée par cette méthode.

$$\mathrm{A}(4)-\mathrm{A}(1)=3\big(\mathrm{A}(3)-\mathrm{A}(2)\big).$$

Cette égalité (qui est en fait la relation (2) pour n = 1) est également mentionnée par **Maurice Bauval** qui, comme **Richard Beczkowski**, l'utilise pour déterminer une valeur convenable de P(4) ou Q(4). Si l'on suppose que Q(1) = 1, alors Q(4) ne peut valoir que 10, 25 ou 46 pour que la différence Q(4) – Q(1) soit divisible(3) par 3. Les valeurs correspondantes de $\mathrm{Q}(3)-\mathrm{Q}(2)=\frac{1}{3}\big(\mathrm{Q}(4)-1\big)$ seraient alors 3, 8 ou 15. La première n'est pas possible. La seconde correspond à Q(1) = 1, Q(2) = 10, Q(3) = 18 et Q(4) = 25, ce qui ne convient pas car parmi les valeurs restantes, la différence entre 46 et 2 n'est pas un multiple de 3. La troisième possibilité mène au résultat voulu.

La croissance stricte des suites $(\mathrm{P}(n) = 2n^2)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\mathrm{Q}(n) = 3n^2 - 2)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est évidente. Ces suites n'ont pas de terme commun puisque si deux entiers $a, b \in \mathbb{N}^*$ vérifient $\mathrm{P}(a) = \mathrm{Q}(b)$, alors $2a^2 = 3b^2 - 2$ donc $2a^2 \equiv 1 \bmod 3$, ce qui est impossible.

On peut trouver de façon heuristique la valeur de u_{1000}, comme le font **Maurice Bauval**, **Bernard Collignon**, **Michel Lafond**, **Éric Oswald** et **Pierre Renfer**. Voici une approche plus longue, due à **Richard Beczkowski**, mais permettant de savoir, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, si u_k est de la forme $\mathrm{P}(p)$ ou $\mathrm{Q}(q)$ (et qui fournit la valeur de u_k).

Pour un entier $k \in \mathbb{N}^*$, il y a exactement k termes de la forme $\mathrm{P}(p) = 2p^2$ ou $\mathrm{Q}(q) = 3q^2 - 2$ inférieurs ou égaux à u_k (avec $p, q \in \mathbb{N}^*$). Pour les termes de la première forme, il faut $1 \le p \le \sqrt{\frac{u_k}{2}}$, ce qui fait $\left\lfloor \sqrt{\frac{u_k}{2}} \right\rfloor$ choix. Pour les termes de la seconde forme, il faut $1 \le q \le \sqrt{\frac{u_k+2}{3}}$, ce qui fait $\left\lfloor \sqrt{\frac{u_k+2}{3}} \right\rfloor$ choix. Comme les suites $(\mathrm{P}(p))_{p\in\mathbb{N}^*}$ et $(\mathrm{Q}(q))_{q\in\mathbb{N}^*}$ sont sans valeur commune,

$$k = \left\lfloor \sqrt{\frac{u_k}{2}} \right\rfloor + \left\lfloor \sqrt{\frac{u_k+2}{3}} \right\rfloor \tag{6}$$

• Dans le cas où $u_k = 2p^2$, la relation (6) devient $k = p + \left\lfloor \sqrt{\frac{2p^2+2}{3}} \right\rfloor$, donc

$$k \le p + \sqrt{\frac{2p^2+2}{3}} < k+1. \tag{7}$$

La première inégalité (stricte car $2p^2 + 2 \equiv 0 \bmod 3$ est impossible) donne

$$3(k-p)^2 < 2p^2 + 2,$$

soit encore

$$3(k-p)^2 < 6k^2 + 2,$$

(3) Ceci suppose que Q(4) est dans la liste donnée dans l'énoncé, ce qu'il faudrait justifier.

soit enfin

$$3k-\sqrt{6k^2+2}<p. \tag{8}$$

La seconde inégalité de (7) donne, par le même type de calcul,

$$p<3(k+1)-\sqrt{6(k+1)^2+2}. \tag{9}$$

En posant $f(k)=3k-\sqrt{6k^2+2}$, les informations (8) et (9) donnent l'encadrement

$$f(k)<p<f(k+1). \tag{10}$$

Un entier vérifiant cet encadrement, s'il existe, est unique, à cause de l'inégalité

$$0<f(k+1)-f(k)<1,$$

établie par le théorème des accroissements finis : il existe $c>1$ tel que

$$f(k+1)-f(k)=f'(c)=3-\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{1+\frac{1}{3c^2}}}.$$

Or, pour $c>1$,

$$0<3-\frac{3}{\sqrt{2}}<3-\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{1+\frac{1}{3c^2}}}<3-\sqrt{6}<1.$$

• Dans le cas où u_k est de la forme $Q(q)=3q^2-2$ pour un $q\in\mathbb{N}^*$, on montre de façon similaire l'encadrement

$$k-f(k)<q<k+1-f(k+1). \tag{11}$$

Et un tel entier q, s'il existe, est également unique.
• En résumé, l'entier u_k est égal

– soit à $2p^2$ où p est l'unique entier tel que $f(k)<p<f(k+1)$,

– soit à $3q^2-2$ où q est l'unique entier tel que $k-f(k)<q<k+1-f(k+1)$.

Mais les existences d'un entier p vérifiant (10) et d'un entier q vérifiant (11) sont incompatibles car la somme de ces encadrements donnerait $k<p+q<k+1$. Ainsi, s'il existe un entier p tel que $f(k)<p<f(k+1)$ alors $k=2p^2$, sinon, il existe un entier q tel que $k-f(k)<q<k+1-f(k+1)$ et alors $k=3q^2-2$.
En prenant $k=1000$, on trouve

$$f(1000)\simeq 550.509849<f(k+1)\simeq 551.060360.$$

Il existe $p=551$ compris entre $f(k)$ et $f(k+1)$ donc $u_{1000}=P(550)=607\ 202$.

Pour finir, tous les lecteurs trouvent l'équivalent de u_k, essentiellement par la relation (6). Comme la suite u diverge vers $+\infty$,

$$k=\left\lfloor\sqrt{\frac{u_k}{2}}\right\rfloor+\left\lfloor\sqrt{\frac{u_k+2}{3}}\right\rfloor\underset{n\to+\infty}{\sim}\sqrt{\frac{u_k}{2}}+\sqrt{\frac{u_k}{3}}.$$

En notant $\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$, on obtient $u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{k}{\alpha}\right)^2$. Or

$$\frac{1}{\alpha^2} = \frac{6}{5+2\sqrt{6}} = 6\left(5-2\sqrt{6}\right) = 30-12\sqrt{6}.$$

L'équivalent cherché est donc

$$u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(30-12\sqrt{6}\right)k^2.$$

En prolongement, **Pierre Renfer** propose de chercher les entiers consécutifs parmi les termes de la suite u. Cela revient(4) à trouver les couples $(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tels que $Q(x) - P(y) = \pm 1$, soit

$$3x^2 - 2 - 2y^2 = \pm 1.$$

Dans le cas où $3x^2 - 2y^2 = 3$, l'entier y est divisible par 3 et l'on pose $y = 3y'$. Alors $x^2 - 6y'^2 = 1$, ce qui est une équation de Pell Fermat d'unité fondamentale $5+2\sqrt{6}$. Les solutions sont les couples d'entiers $\left(x_n, y'_n\right)$ tels que

$$x_n + y'_n\sqrt{6} = \left(5+2\sqrt{6}\right)^n \quad \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$$

ce qui donne la relation suivante :

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y'_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y'_n \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y'_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, les premiers couples sont

$$\left(x_1 = 5, y'_1 = 2\right) \text{ et } \left(P\left(3y'_1\right) = 72, Q\left(x_1\right) = 73\right),$$

$$\left(x_2 = 49, y'_2 = 20\right) \text{ et } \left(P\left(3y'_2\right) = 7200, Q\left(x_2\right) = 7201\right),$$

et

$$\left(x_3 = 485, y'_3 = 198\right) \text{ et } \left(P\left(3y'_3\right) = 705\,672, Q\left(x_2\right) = 705\,673\right).$$

Dans le second cas, l'équation est $3x^2 - 2y^2 = 1$. En posant $x' = 3x$, on obtient $x'^2 - 6y^2 = 3$. Les solutions sont les couples d'entiers $\left(x'_n, y_n\right)$ tels que

$$x'_n + y_n\sqrt{6} = \left(3+\sqrt{6}\right)\left(5+2\sqrt{6}\right)^n \quad \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$$

ce qui donne la relation suivante :

$$\begin{pmatrix} x'_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y'_n \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{pmatrix} x'_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Les premiers couples d'entiers consécutifs dans ce cas sont $(Q(1) = 1, P(1) = 2)$, $(Q(9) = 241, P(11) = 242)$ et $(Q(89) = 23\,761, P(109) = 23\,762)$.

---

(4) Effectivement, si deux termes de la suite u forment des entiers consécutifs, l'un s'écrit $Q(x)$ et l'autre $P(y)$ car $Q(x+1) - Q(x) > 1$ et $P(y+1) - P(y) > 1$.